すべり軸受ロータ系の安定限界の簡易予測

関口 泰久^{*1}, 松田 隆太郎^{*2}, 大上 雅弘^{*3}, 松下 修己^{*4}

Simplified prediction of stability limit for oil film bearing rotor systems

Yasuhisa SEKIGUCHI^{*1}, Ryutaro MATSUDA^{*2}, Masahiro OKAMI^{*3} and Osami MATSUSHITA^{*4}^{*1}Mechanical Systems Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima 739-8527, Japan

^{*2,*3}Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima 739-8527, Japan

^{*4}Department of Mechanical Engineering, National Defense Academy

1-10-20 Hashirimizu, Yokosuka-shi, Kanagawa 239-8686, Japan

Received: 16 November 2018; Revised: 13 May 2019; Accepted: 12 April 2020

Abstract

Oil film bearings are often used in large rotating machinery because they have large load capacity and damping coefficients. They, however, generate fluid forces and cause unstable vibrations such as oil whirl and oil whip at high rotational speed. Because the amplitudes of such self-excited vibrations are severe, it is important to predict the stability limit of rotational speed to avoid the unstable vibration problems in rotor systems supported by oil film bearings. This paper describes the vibration analyses of a flexible rotor system supported by oil film bearings and the simplified prediction method for the rotational speed limits of the self-excited vibration induced by the fluid force in oil film bearings. In the vibration analyses, the equations of motion for the rotor system are simplified and modeled as a two-degree-of-freedom system with parallel and flexural modes of vibration. The stability analyses are conducted by introducing the approximation equations instead of complex eigenvalue calculations. The rotational speed limits for the stability of the system obtained by the present method are compared with the calculation results in the references to discuss the validity of the present method. This paper also shows the importance of anisotropic properties of oil film bearings to increase the accuracy of stability prediction when the clearance of the oil film bearing is large.

Keywords : Flexible rotor, Oil film bearing, Oil whirl, Oil whip, Instability prediction, Rotational speed limit

1. 緒 言

大型回転機械の軸受部には、減衰効果を有し、振動抑制効果の高いすべり軸受が用いられることが多い。しかしながらすべり軸受が不安定化力を発生し、オイルホワールやオイルホイップと呼ばれる自励振動の原因となることがある。その際の振動振幅は過大となるため、機械の設計段階においてロータ系の振動解析を行い、安定限界となる回転数を把握しておき、不安定振動の発生を防ぐことは大切である。安定限界の詳細な解析においては、1 D-FEM (有限要素法) (松下, 2018) や伝達マトリックス法 (菊地, 小林, 1977, Kikuchi and Kobayashi, 1977) を使用し、ばねおよび減衰に関する 8 パラメータといわれるすべり軸受動特性 (松下他, 2012) などを加味し、複素固有値計算を行い、減衰比 (Q 値) あるいは安定性の判別が行われている。

しかし、一般に複素固有値の計算は困難であるが、安定限界を見つけることに限定すれば、簡易的にそれを求めることは可能であると考えられる。またそれに特化した理解は、安定限界の物理的な解釈に有用である。

No.18-00460 [DOI:10.1299/transjsme.18-00460], J-STAGE Advance Publication date : 20 April, 2020

本論文は、Dynamics and Design Conference 2018 講演論文集(2018), No.424 の掲載内容に基づいた論文である。

^{*1} 正員, 広島大学大学院工学研究科機械システム工学専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)^{*2} 広島大学大学院工学研究科機械システム工学専攻^{*3} 学生員, 広島大学大学院工学研究科機械システム工学専攻^{*4} 正員, フェロー, 防衛大学校機械工学科 (〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20)

E-mail of corresponding author: sekiguch@hiroshima-u.ac.jp

本論文では、すべり軸受で支持された弾性ロータの振動解析と、軸受に発生する不安定化力が原因となって発生する自励振動の発生回転数の簡易予測法について議論する。振動解析においては、運動方程式中でロータ系のたわみ振動を平行モードと曲げモードの2自由度系からなるモデルで簡略化する。複素固有値解析に代わるものとして系の安定性の予測近似式を導出し、ロータの安定判別を行う。また、本簡易予測計算によって求めた不安定振動が発生する安定限界回転数について、文献(菊地, 小林, 1997, Kikuchi and Kobayashi, 1977, 松下他, 2009)に記載のあるより詳細な1 D-FEM モデルを用いた厳密な複素固有値計算結果と比較検討し、本簡易予測法の有用性を示す。

2. 理論解析

2・1 剛体ロータ (1 自由度系) と簡易安定判別

図1に示す左右対称剛体ロータの平行モードを考える。すべり軸受の動特性は Bently-Muszynska (B-M) モデル (Muszynska, 1986, 2005, Bently and Hatch, 2002) で定義し、等方性軸受動特性 ($k_d \equiv k_{xx} = k_{yy}$, $c_d \equiv c_{xx} = c_{yy}$, $k_c \equiv k_{xy} = -k_{yx}$, c_{xy} および c_{yx} は無視) を考える。 k_d , c_d , k_c は等方性軸受のばね, 減衰定数, クロスばねとし, $k_c = \lambda \Omega c_d$ とする λ を定義する。付録に示すように, ラプラス変換を用いて軸受動特性は $BRG \equiv k_d - jk_c + c_d s = k_d + c_d(s - j\lambda\Omega)$ と表される。このようにクロスばねを λ で置き換えて油膜動特性を表せ得るとするのが B-M モデルである。ロータ全質量を m_t として, 等方性軸受の運動方程式は次式で表される。

$$m_t \ddot{z} + k_d z + c_d (\dot{z} - j\lambda\Omega z) = 0 \quad (1)$$

この式を質量 m_t で割り, 簡略化した次式を扱う。

$$\ddot{z} + 2\zeta_d \omega_d (\dot{z} - j\lambda\Omega z) + \omega_d^2 z = 0 \quad (2)$$

ただし, $\omega_d^2 = k_d/m_t$, $2\zeta_d \omega_d = c_d/m_t$ である。式(2)の特性方程式は次式となる。

$$s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) + \omega_d^2 = 0 \quad (3)$$

Fig. 1 Rigid rotor supported by oil film bearings.

式(3)において, パラメータ ζ_d が 1 より十分小さいときには特性方程式は第 2 項が無視でき, $s^2 + \omega_d^2 = 0$ に近似される。つまり特性根 $s \approx j\omega_d$ である。一方, 1 より十分大きいときには (松下他, 2012), 特性方程式(3)を解の公式を用いて s について解き, ζ_d が 1 より大きいことを考慮することで, 特性根は $s \approx j\lambda\Omega$ と近似できる。不安定振動の発生するすべり軸受ロータ系では多くの場合, 後者である。ここではこれらの近似解のより正確な解を求め, 安定判別を試みる。

(1) $\zeta_d \ll 1$ の場合, 改めて近似解を $s = j\omega_d + \Delta$ とおき, 式(3)に代入する。そして, ζ_d と Δ は微小量であることに注目し, 2 次以上の微小量が無視すると以下の結果を得る。

$$(j\omega_d + \Delta)^2 + \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (j\omega_d + \Delta - j\lambda\Omega) = 0 \rightarrow \Delta = -\zeta_d (\omega_d - \lambda\Omega) \quad (4)$$

$$\rightarrow 2j\omega_d \Delta + 2j\zeta_d \omega_d (\omega_d - \lambda\Omega) = 0$$

(2) $\zeta_d \gg 1$ の場合, 改めて近似解を $s = j\lambda\Omega + \Delta$ とおき, 式(3)に代入し, ζ_d は大, Δ は微小に注目し, 2 次以上の微小量を無視すると同時に安定限界の議論故実部に着目すると以下の結果を得る.

$$(j\lambda\Omega + \Delta)^2 + 2\zeta_d \omega_d \Delta + \omega_d^2 = 0 \rightarrow \text{Re}[\Delta] = -\frac{\zeta_d \omega_d \{\omega_d^2 - (\lambda\Omega)^2\}}{2\{(\zeta_d \omega_d)^2 + (\lambda\Omega)^2\}} \quad (5)$$

$$\rightarrow \omega_d^2 - (\lambda\Omega)^2 + 2\Delta(j\lambda\Omega + \zeta_d \omega_d) = 0$$

いずれの場合も, 固有値の修正分 Δ の実部は安定性に影響し, 実部が 0 の場合が安定限界の回転数 $\lambda\Omega = \omega_d$ を示す. したがって回転速度が不安定の発生速度 $\Omega = \omega_d / \lambda$ に達し, 周波数が ω_d の不安定振動の発生に注意する必要がある.

すべり軸受で支持された剛体ロータ系で, 固有振動数を $\omega_t = 1$ と基準化し, パラメータ ζ_d を種々に変化させたときの特性根 s を求めた. 特性根の実部と虚部を図 2(a) に示し, 図中の実部 $\text{Re}[s]$ が負から正に切り替わる回転速度が安定限界である. 虚部 $\text{Im}[s]$ (減衰固有振動数) に安定根なら $\circ$, 不安定根なら $\times$ を付記した. その結果 $\circ$ から $\times$ に切りかわるパラメータ $\zeta_d = 1$ を境に, $\zeta_d \ll 1$ なら水平の $\circ \times$ 線で, $\zeta_d \gg 1$ なら斜め線 $\lambda\Omega$ に $\circ \times$ 線が沿う. 安定限界はいずれの場合も $\lambda\Omega = \omega_d$ の時で, この振動数において自励振動が発生する. 同図(b) は特性根 s の根軌跡であり, パラメータ $\zeta_d = 1$ を境に $s = j\omega_d + \Delta$ 根と $s = j\lambda\Omega + \Delta$ 根に分かれることがわかる. 実部 = 0 が安定限界で, 1 自由度系の場合には $s = (0, \omega_t)$ が常に安定限界に一致する.

Fig. 2 Eigen frequency and Stability (1-dof $m = 1, k_d = \omega_d^2, c = 2\zeta_d \omega_d$). The stability limit coincides with the rotational speed where the real part of $\text{Re}[s]$ changes its sign from negative to positive.

2・2 弾性ロータ (2 自由度系) と不減衰固有振動数

松下らの文献 (松下他, 2009) に示すように, 図 3(a) の左右対称の弾性ロータ系 (全質量 m_t , 軸剛性 k_z) に対して, 平行モード δ と左右の軸受部を単純支持した曲げ固有モード ϕ (軸固有振動数 ω_z) より成るモード合成法モデルは次式の 2 自由度系で与えられる.

$$\begin{bmatrix} m_t & m_c \\ m_c & m^* \rightarrow 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BRG & 0 \\ 0 & k^* \rightarrow \omega_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

ただし、質量行列 M 、軸剛性行列 K 、平行モード $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ に対して、 $m_t = \mathbf{1}^T M \mathbf{1}$ = 全質量、 $m_c = \mathbf{1}^T M \phi$ = 連成質量、 $m^* = \phi^T M \phi \rightarrow 1$ = モード質量、 $k^* = m^* \omega_z^2 \rightarrow \omega_z^2$ と置いている。軸の曲りを示す η_2 は相対座標であるので、連成質量 m_c が存在する。固有モード ϕ は質量で規格化されている。

左右非対称ロータでも式(6)の形には書くことができるので、本研究は適用できる(松下他, 2009, 伊藤他, 2007)。しかし、ここではモード合成法モード δ , ϕ の形状を単純化して説明するため左右対称形と限定して説明している。

Fig. 3 Flexible rotor supported by oil film bearings.

軸中央の円板部の絶対座標を示す量として ξ_2 を示す座標変換

$$\eta_2 = a(\xi_2 - z_1), \quad a = m_c / m^*$$

を定義すると、等価な2質点系の擬モーダルモデル(松下他, 2009)が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BRG + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

ただし、 $m_2 = a^2 m^*$ は等価軸中央質量、 $m_1 = m_t - m_2$ は等価ジャーナル質量、および $k_2 = m_2 \omega_z^2$ は等価軸剛性である。上式を図示したものが同図(b)である。式(6)のように $m^* = 1$ と規格化したとき、上式で $m_2 = a^2 = m_c^2$ であるので、連成質量とは軸中央等価質量の平方根であると言える。

ここで、モード合成法モデル式(6)に戻り、これを質量 m_t および m^* で規格化した変位 z , η に次式

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_t} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} \quad (8)$$

で座標変換した次式を扱う。

$$\begin{bmatrix} 1 & \mu_c \\ \mu_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) & 0 \\ 0 & \omega_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \eta \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

ただし、 $\mu_c^2 = m_c^2 / (m_t m^*) = (m_c / m^*)^2 m^* / m_t = m_2 / m_t$ = 質量比である。その特性方程式は

$$\begin{vmatrix} s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) + \omega_d^2 & \mu_c s^2 \\ \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

となる．よって，減衰を無視した不減衰固有値 $s = j\omega_n$ は次式で得られる．

$$D_{20} = \begin{vmatrix} -\omega_n^2 + \omega_d^2 & \mu_c \omega_n^2 \\ \mu_c \omega_n^2 & -\omega_n^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} = (\omega_n^2 - \omega_d^2)(\omega_n^2 - \omega_z^2) - \mu_c^2 \omega_n^4 \equiv y_1 - y_2 = 0 \quad (11)$$

ただし， $y_1 \equiv (\omega_n^2 - \omega_d^2)(\omega_n^2 - \omega_z^2)$ ， $y_2 \equiv \mu_c^2 \omega_n^4$ である．

Fig. 4 Stability criteria for $\lambda\Omega$ and ω_z modes ($\zeta_d = \text{large}$, $\mu_c^2 = 0.5$). (A) The undamped natural frequency can be determined by the intersection between the curves y_1 and y_2 . The first natural frequency ω_1 is lower, and the second natural frequency ω_2 is higher than both ω_d and ω_z . (B) Instability occurs when $\lambda\Omega$ exceeds ω_1 , stability comes back after $\lambda\Omega$ exceeds ω_2 , and then instability occurs again when $\lambda\Omega$ exceeds ω_2 .

この図式解を図 4(A) 上部に示す．第 1 次および第 2 次の不減衰固有振動数 ω_1 ， ω_2 は y_1 と y_2 曲線の交点である．同図(A)(1)は $\omega_d < \omega_z$ で剛太軸の重いロータの場合，また同図(A)(2)は $\omega_z < \omega_d$ で軟細軸の軽いロータの場合である．後者は著者らが経験した産業ポンプや圧縮機ロータのほとんどを含んでいる．いずれの場合にも，最低次固有振動数 ω_1 は，剛ロータ固有値 ω_d および軸曲げ固有振動数 ω_z のどちらの振動数より小さい．第 2 次固有振動数 ω_2 はそれらのどちらの振動数より大きい．

なお，同下図(B)は，図 5 の説明の後に説明する．

2・3 弾性ロータ (2 自由度系) の簡易安定判別

先の 1 自由度系と同様に，次に 2 自由度系の基本解の安定性を近似的に論じる (津野田他, 2016)．ここで ζ_d は多自由度系のとときの減衰比をモード減衰比の意味で略称している．

(1) $\zeta_d \ll 1$ の場合: ζ_d が 1 より十分小さい場合の基本解は，不減衰固有振動数 ω_1 と ω_2 である．そこでまず，第 1 次固有振動数 ω_1 の安定性を $s = j\omega_1 + \Delta$ で論じる．

$$\begin{vmatrix} (j\omega_1 + \Delta)^2 + \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (j\omega_1 + \Delta - j\lambda\Omega) & \mu_c (j\omega_1 + \Delta)^2 \\ \mu_c (j\omega_1 + \Delta)^2 & (j\omega_1 + \Delta)^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Δ および ζ_d を微小と考え，第 1 次近似までを近似的に解くと次のようになる．

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cc} -\omega_1^2 + 2j\omega_1\Delta + \omega_d^2 + 2\zeta_d\omega_d(j\omega_1 - j\lambda\Omega) & -\mu_c\omega_1^2 + 2j\mu_c\omega_1\Delta \\ -\mu_c\omega_1^2 + 2j\mu_c\omega_1\Delta & -\omega_1^2 + 2j\omega_1\Delta + \omega_z^2 \end{array} \right| \\
 &= \{-\omega_1^2 + 2j\omega_1\Delta + \omega_d^2 + 2\zeta_d\omega_d(j\omega_1 - j\lambda\Omega)\}(-\omega_1^2 + 2j\omega_1\Delta + \omega_z^2) - (\mu_c\omega_1^2)^2 + 4j\mu_c^2\omega_1^3\Delta \\
 &= 2j\omega_1\Delta(\omega_d^2 + \omega_z^2 - 2\omega_1^2 + 2\mu_c^2\omega_1^2) + 2j\zeta_d\omega_d(\omega_1 - \lambda\Omega)(\omega_z^2 - \omega_1^2) + (\omega_z^2 - \omega_1^2)(\omega_d^2 - \omega_1^2) - \mu_c^2\omega_1^4 = 0
 \end{aligned}$$

安定限界は上式を Δ について解き

$$\Delta = -\frac{\zeta_d\omega_d(\omega_1 - \lambda\Omega)(\omega_z^2 - \omega_1^2)}{\omega_1(\omega_d^2 + \omega_z^2 - 2\omega_1^2 + 2\mu_c^2\omega_1^2)} + j\frac{(\omega_z^2 - \omega_1^2)(\omega_d^2 - \omega_1^2) - \mu_c^2\omega_1^4}{2\omega_1(\omega_d^2 + \omega_z^2 - 2\omega_1^2 + 2\mu_c^2\omega_1^2)}$$

その実部の正負が切り替わる振動数であるため、実部のみを考え

$$Re[\Delta] = -\frac{\zeta_d\omega_d(\omega_1 - \lambda\Omega)(\omega_z^2 - \omega_1^2)}{\omega_1(\omega_d^2 + \omega_z^2 - 2\omega_1^2 + 2\mu_c^2\omega_1^2)} \quad (13)$$

より、 $\lambda\Omega = \omega_1$ となる。同様に、不減衰第2次固有振動数 ω_2 の安定性は、 $s = j\omega_2 + \Delta$ において次式となる。

$$Re[\Delta] = -\frac{\zeta_d\omega_d(\omega_2 - \lambda\Omega)(\omega_z^2 - \omega_2^2)}{\omega_2(2\omega_2^2 - \omega_d^2 - \omega_z^2 - 2\mu_c^2\omega_2^2)} \quad (14)$$

よって、安定限界は $\lambda\Omega = \omega_2$ となる。以上より、回転数の λ 倍の $\lambda\Omega$ が各不減衰固有振動数 ω_1 , ω_2 を越えれば不安定ということになる。

これを図示したものを図5上段(A)に示す。同図(a)が $\omega_d < \omega_z$, また(b)が $\omega_z < \omega_d$ の場合である。減衰が小さい $\zeta_d = 0.02$ の場合、固有振動数 ω_1 と ω_2 は回転数によらず一定に見える。回転数が低いときはいずれの固有振動数も緑色で示

(a) Case of $\omega_d = 1$ and $\omega_z = 1.4$

(b) Case of $\omega_z = 1$ and $\omega_d = 1.4$

Fig. 5 Frequency and stability ($\lambda = 0.49$). (A) When ζ_d is small (0.02), both the first and second modes, S_1 and S_2 , are unstable after the rotational speed exceeds $\lambda\Omega$. (B) When ζ_d is large (2), oil whirl instability occurs at the intersection between $\lambda\Omega$ and ω_1 , and then oil whip occurs when $\lambda\Omega$ approaches ω_2 .

す通り安定であるが、回転が上昇すると、 $\lambda\Omega > \omega_1$ で○印から×印に変化するので、1次モードが不安定、 $\lambda\Omega > \omega_2$ で2次モードが不安定になることがわかる。

(2) $\zeta_d \gg 1$ の場合： ζ_d が1より十分大きいとき、式(3)と同様の検討から式(10)は次式のように近似される。

$$\begin{aligned} & (s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) + \omega_d^2)(s^2 + \omega_z^2) - (\mu_c s^2)^2 \\ & \approx 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega)(s^2 + \omega_z^2) = 0 \end{aligned}$$

このときの基本解は $s = j\lambda\Omega$ と $s = j\omega_z$ である。

そのひとつの基本解 $\lambda\Omega$ に対し、その近似解を $s = j\lambda\Omega + \Delta$ とおくと、特性方程式は次式となる。

$$\begin{vmatrix} \omega_d^2 + (j\lambda\Omega + \Delta)^2 + 2\zeta_d \omega_d \Delta & \mu_c (j\lambda\Omega + \Delta)^2 \\ \mu_c (j\lambda\Omega + \Delta)^2 & (j\lambda\Omega + \Delta)^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

Δ を微小と考え、近似的に解き、以下のように置く。

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \omega_d^2 - (\lambda\Omega)^2 & -\mu_c (\lambda\Omega)^2 \\ -\mu_c (\lambda\Omega)^2 & \omega_z^2 - (\lambda\Omega)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2(\zeta_d \omega_d + j\lambda\Omega)\Delta & -\mu_c (\lambda\Omega)^2 \\ 0 & \omega_z^2 - (\lambda\Omega)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_d^2 - (\lambda\Omega)^2 & 0 \\ -\mu_c (\lambda\Omega)^2 & 2j\lambda\Omega\Delta \end{vmatrix} \\ & = D_{20} + \Delta[2\zeta_d \omega_d \{\omega_z^2 - (\lambda\Omega)^2\} + 2j\lambda\Omega\{\omega_d^2 + \omega_z^2 - 2(1 - \mu_c^2)(\lambda\Omega)^2\}] \equiv D_{20} + \Delta(a + jb) = 0 \end{aligned}$$

この式を Δ について解き、実部に着目すると次のようになる。

$$Re[\Delta] = Re\left[-\frac{D_{20}}{a + jb}\right] = -\frac{D_{20}a}{a^2 + b^2} = -\frac{2\zeta_d \omega_d \{\omega_z^2 - (\lambda\Omega)^2\} D_{20}}{a^2 + b^2} \quad (16)$$

ただし、 ω_1 と ω_2 は不減衰系の根なので

$$D_{20} = \begin{vmatrix} \omega_d^2 - (\lambda\Omega)^2 & -\mu_c (\lambda\Omega)^2 \\ -\mu_c (\lambda\Omega)^2 & \omega_z^2 - (\lambda\Omega)^2 \end{vmatrix} = [\omega_1^2 - (\lambda\Omega)^2][\omega_2^2 - (\lambda\Omega)^2]$$

である。

よって、式(16)において安定性を示す Δ の正負の切り替え点は、回転数の λ 倍の $\lambda\Omega$ が、各固有振動数 ω_1 、 ω_2 あるいは ω_z と交差する点である。これを図に描いたものが図4下段(B)の $\lambda\Omega$ モードである。 $\lambda\Omega$ が第1次固有振動数 ω_1 を超えれば不安定が生じ、軸固有振動数 ω_z を超えれば安定に戻る。さらに第2次固有振動数 ω_2 を超えれば再び不安定になると予測される。

もうひとつの基本解 ω_z に対し、その近似解を $s = j\omega_z + \Delta$ とおくと、特性方程式は次式となる。

$$\begin{vmatrix} \omega_d^2 + (j\omega_z + \Delta)^2 + 2\zeta_d \omega_d (j\omega_z + \Delta - j\lambda\Omega) & \mu_c (j\omega_z + \Delta)^2 \\ \mu_c (j\omega_z + \Delta)^2 & \omega_z^2 + (j\omega_z + \Delta)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Δ を微小と考え、近似的に解き、以下のように置く。

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \omega_d^2 - \omega_z^2 + 2(\zeta_d \omega_d + j\omega_z)\Delta + 2\zeta_d \omega_d j(\omega_z - \lambda\Omega) & \mu_c (-\omega_z^2 + 2j\omega_z\Delta) \\ \mu_c (-\omega_z^2 + 2j\omega_z\Delta) & 2j\omega_z\Delta \end{vmatrix} = 0 \\ & \Delta\{-4\zeta_d \omega_d (\omega_z - \lambda\Omega) + 2j(\omega_d^2 - \omega_z^2 + 2\mu_c^2 \omega_z^2)\} - \mu_c^2 \omega_z^3 \equiv \Delta(a' + jb') - \mu_c^2 \omega_z^3 = 0 \end{aligned}$$

この式を Δ について解き、実部に着目すると次のようになる。

$$Re[\Delta] = Re\left[\frac{\mu_c^2 \omega_z^3}{a' + jb'}\right] = \frac{\mu_c^2 \omega_z^3 a'}{a'^2 + b'^2} = -\frac{4\mu_c^2 \zeta_d \omega_d \omega_z^3 (\omega_z - \lambda\Omega)}{a'^2 + b'^2} \quad (17)$$

よって、安定限界は回転数の λ 倍の $\lambda\Omega$ が軸曲げ固有振動数 ω_z と交差する点である。これを図に描いたものが図4(B)の ω_z モードである。 $\lambda\Omega$ が軸曲げ固有振動数 ω_z を超えれば不安定が発生する。

この予測を、実際の複素固有値計算で確認したものが図5に示す ζ_d が大きい場合($\zeta_d=2$)の複素固有値虚部(減衰固有振動数)の曲線である。それらの減衰固有振動数曲線は低速回転域では $\lambda\Omega$ モードの右上がり線(オイルホワール)と ω_z モードの水平な線(オイルホイップ)の2本が見える。厳密には右上がり線と $\lambda\Omega$ モードには少し差がある。不安定の起点は、 $\lambda\Omega$ モード曲線と第1次固有振動数 ω_1 の交点にあり、不安定根 $\lambda\Omega$ はオイルホワール現象を呈する。その後、このオイルホワールである右上がり線 $\lambda\Omega$ は、軸曲げ固有振動数 ω_z に接近し、一定値に収束し、オイルホイップ現象が生じる。左図の(a)は長期間のオイルホワールの後にオイルホイップになる例で、右図の(b)は直ちにオイルホイップに移る例である。

図5を俯瞰すると○から×に変化する安定限界は $\lambda\Omega$ である。よって回転数の上昇に伴い、斜め線の $\lambda\Omega$ に従えば、式(16)で示すように、最初 Δ の実部が負であることより系は安定であるが、 $\lambda\Omega = \omega_1$ を超えると Δ の実部が正となり不安定となる。その後 $\lambda\Omega = \omega_z$ で安定、 $\lambda\Omega = \omega_z$ で再度不安定となる。また水平 ω_z 線は式(17)のように $\omega_z = \lambda\Omega$ を超えると Δ の実部が正となり不安定に入る。いずれにしても $\Omega > \omega_1/\lambda$ から先は全域不安定である。

図6は ζ_d が大きい場合($\zeta_d=2$)の根軌跡を示す。いずれの根軌跡においても、安定限界周波数は第1次固有振動数 ω_1 であり、その際に不安定は虚軸上で生じる。また、高速回転になると自励振動周波数は虚軸上の軸曲げ固有振動数 ω_z に接近することなどが分かる。

Fig. 6 Root loci ($\lambda=0.49$) when ζ_d is large (2). The stability limit exists at ω_1 . When the rotational speed is high, the frequency of self-excited vibration approaches ω_z .

2・4 3円板を有する弾性ロータ系の計算例

図7に示すロータ系に、前節に述べた手法を適用し、安定限界を予測する。

すべり軸受の動特性は回転数に依存する。しかし後述のように不安定開始速度を議論する際に重要となる回転数は $\Omega=90$ rpsである(図9および11参照)。そこで本論文では簡略化のために $\Omega=90$ rpsの場合の特性を採用し、すべての回転数範囲に用いることとする。表1にこれらの軸受の動特性をXY形式で示す(松下他, 2012)。次に本計算例では表2のように複素数として前向き、後向きで表す。

図7に示すロータのモード解析モデルを図8に示す。この2自由度モデルの全質量は $m_t=51.8$ kg, 軸曲げ固有振動数は $\omega_z=47.3$ Hz, また連成質量は $\mu_c=0.9$ である。図8に本簡易解析のための系の詳細と動特性を示す。本モデルの軸中心における等価質量は81% ($\mu_c^2=0.81=81\%$), すべり軸受部のジャーナル質量は19%である(松下他, 2009)。

Fig. 7 Shafting system with three disks.

 Table 1 Bearing dynamic properties on x-y coordinates ($\times 10^4$ N/m, $\times 10^4$ Ns/m).

C/R	Ω rps	k_{xx}	k_{xy}	k_{yy}	k_{yx}	c_{xx}	c_{xy}	c_{yy}	c_{yx}
0.001	90	1,622	41,680	3,230	-41,438	147	6	147	6
0.003	90	669	2,188	1,042	-1,572	7.2	1.8	6.0	1.8
0.010	90	539	533	262	-25	1.5	0.5	0.5	0.5

表 1 は軸受ひとつ当たりの値である．問題の平行モード全体では，2 倍して次式で定義する．

$$k_d = \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \times 2, \quad k_c = \frac{k_{xy} - k_{yx}}{2} \times 2, \quad c_d = \frac{c_{xx} + c_{yy}}{2} \times 2, \quad \omega_d^2 = \frac{k_d}{m_t}, \quad \zeta_d = \frac{c_d}{2\omega_d m_t}, \quad \lambda = \frac{k_c}{\Omega c_d}$$

また，式(11)で示す ω_1 ，および次節に示す k_b ， c_b によりまとめると表 2 となる．

 Table 2 Bearing dynamic modified properties ($\times 10^4$ N/m, $\times 10^4$ Ns/m).

C/R	k_d	k_c	c_d	ω_d Hz	ζ_d	λ	ω_1 Hz	$ k_b $	$ c_b $
0.001	4,852	83,118	294	154	29.3	0.5	45.6	1,626	12.0
0.003	1,711	3,760	13.2	91.4	2.2	0.503	42.7	720	3.79
0.010	801	558	2.0	62.5	0.49	0.493	38.6	579	1.41

C/R	① 0.001	② 0.003	③ 0.01
k_d	48×10^6	17×10^6	8×10^6
c_d	2.94×10^6	0.13×10^6	0.02×10^6
λ	0.5	0.503	0.493
ζ_d	29.3	2.2	0.49

Fig. 8 Two-dof reduced model.

表2に示す通り、式(11)により計算した図8の系の不減衰1次固有振動数は $\omega_1 = \{45.6, 42.7, 38.6\}$ Hzである。したがって、安定限界を描くと図9が得られる。水平線が ω_1 に、右上がり線が $\lambda\Omega$ に対応している。これら両線の交点が安定限界を示す。不安定が生じる開始速度は $\Omega_1 = \omega_1 / \lambda = \{91.1, 84.8, 78.3\}$ rpsである。軸曲げ振動数 ω_c は剛体ロータを想定した固有振動数 ω_b より低いので、安定限界は主に低い方の振動数 $\omega_1 \approx \omega_c$ で決定される。

先に述べた $\Omega = 90$ rpsの軸受動特性が、全回転数域で有効であるとの仮定のもと、厳密に複素固有値解析した結果は、図9中の右の表である。すなわち、不安定開始速度 $\Omega_{1e} = \{91.1, 82.3, 83.6\}$ rpsにおいて不安定振動数 $\omega_{1e} = \{45.6, 42.4, 33.3\}$ Hzが得られた。したがって係数 λ は $\lambda_e = \omega_{1e} / \Omega_{1e} = \{0.5, 0.51, 0.4\}$ となる。

不安定開始速度の予測値 Ω_1 と厳密値 Ω_{1e} を比較したとき、通常的设计範囲である $C/R=0.001$ や $C/R=0.003$ のように軸受のすきま比が小さい場合には、予測値はほとんど厳密値に一致する。しかしながら、 $C/R=0.010$ においては、軸受動特性の異方性の影響が大きくなり、予測値と厳密値の差は無視できない大きさとなる。その際にはすべり軸受動特性であるばね定数と減衰係数の後向き成分 k_b および c_b を考慮し、再度計算をする必要がある。この場合の計算を次節で述べる。

Fig. 9 Stability limits (Forward whirl bearing force only). The stability limit exists at the intersection between $\lambda\Omega$ and ω_1 . The estimated instability onset speed Ω_1 coincides well with the exact speed Ω_{1e} when $C/R = 0.001$ and 0.003 . The difference between them, however, is not negligible when $C/R = 0.010$ because of the anisotropic characteristics of bearings.

2・5 軸受動特性異方性の影響

(1) 1自由度系

すべり軸受の動特性係数は異方性を考慮すると、ばね定数と減衰係数の前向き成分 $\{k_f, c_f\}$ と後向き成分 $\{K_b, C_b\}$

$$k_f = \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \times 2 - j \frac{k_{xy} - k_{yx}}{2} \times 2 = k_d - jk_c, \quad K_b = \frac{k_{xx} - k_{yy}}{2} \times 2 + j \frac{k_{xy} + k_{yx}}{2} \times 2,$$

$$c_f = \frac{c_{xx} + c_{yy}}{2} \times 2 - j \frac{c_{xy} - c_{yx}}{2} \times 2 = c_d - jc_c \approx c_d, \quad C_b = \frac{c_{xx} - c_{yy}}{2} \times 2 + j \frac{c_{xy} + c_{yx}}{2} \times 2$$

を用いて、式(18)のように表せる。また、付録の式(A2)を参照して k_d , c_d , k_c を付記している。 c_c は $c_{xy} \approx c_{yx}$ のため省略している。等方性軸受では前者のみで定義できるが、異方性軸受では両者を用いて表す。したがって、式(1)に後向き成分を加え、異方性軸受動特性を有する1自由度系の運動方程式は次式となる。

$$m_i \ddot{z} + k_d z + c_d (\dot{z} - j\lambda\Omega z) + K_b \bar{z} + C_b \dot{\bar{z}} = 0 \quad (18)$$

その特性方程式は次式となる。

$$D_2 = \left| \frac{s^2 + \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega)}{\bar{k}_b + \bar{c}_b s} \frac{k_b + c_b s}{s^2 + \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (s + j\lambda\Omega)} \right| = 0 \quad (19)$$

ただし, $\omega_d^2 = k_d/m_t$, $2\zeta_d \omega_d = c_d/m_t$, $k_b = K_b/m_t$, $c_b = C_b/m_t$ である.

式(19)を展開し, 整理すると以下の式となる.

$$\begin{aligned} D_2 &= (s^2 + \omega_d^2)^2 + (2\zeta_d \omega_d)^2 [s^2 + (\lambda\Omega)^2] + 2(2\zeta_d \omega_d)(s^2 + \omega_d^2)s - (k_b + c_b s)(\bar{k}_b + \bar{c}_b s) \\ &= D_{2a} + D_{2b} \\ D_{2a} &\equiv (s^2 + \omega_d^2)^2 + (2\zeta_d \omega_d)^2 [s^2 + (\lambda\Omega)^2] - (k_b \bar{k}_b + c_b \bar{c}_b s^2) \\ D_{2b} &\equiv 2(2\zeta_d \omega_d)(s^2 + \omega_d^2)s - (k_b \bar{c}_b + \bar{k}_b c_b)s \end{aligned} \quad (20)$$

安定限界では, $D_2(s = j\omega_{1a})$ (ω_{1a} = 安定限界固有振動数) としたとき, その実部を与える $D_{2a}(s) = 0$ かつ虚部を与える $D_{2b}(s) = 0$ となる. 虚部 $D_{2b}(s) = 0$ より安定限界時の固有振動数 ω_{1a} を得る. それを実部 $D_{2a}(s)$ に代入して $D_{2a}(s) = 0$ より安定限界回転数 $\lambda\Omega$ を得る. 具体的に見てみると, 虚部 $D_{2b}(s = j\omega_{1a}) = 0$ より, 異方性軸受特性を有する系の安定限界時の固有振動数 ω_{1a} が求まる.

$$s^2 + \omega_d^2 = \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{2\zeta_d \omega_d} \rightarrow \omega_{1a}^2 = \omega_d^2 - \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{2\zeta_d \omega_d} \quad (21)$$

つまり, 不安定固有振動数 ω_d は, 異方性を有する系の場合には ω_{1a} となる.

$$\omega_{1a} = \omega_d \sqrt{1 - \delta_a} \quad \text{ただし,} \quad \delta_a = \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{2\zeta_d \omega_d^3} \quad (22)$$

もし, $\delta_a > 0$ であれば固有振動数は減少し, 逆の場合には増加する. 一方, 実部 $D_{2a}(s = j\omega_{1a}) = 0$ より

$$s^2 + (\lambda\Omega)^2 = \frac{k_b \bar{k}_b}{(2\zeta_d \omega_d)^2} + \frac{c_b \bar{c}_b s^2}{(2\zeta_d \omega_d)^2} - \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{(2\zeta_d \omega_d)^4} \quad (23)$$

を得る. よって, 安定限界回転数は異方性の効果を考慮し, 次式で決まる.

$$\lambda\Omega = \omega_{1a} \sqrt{1 + \delta_k - \delta_c - \delta_{kc}} \quad (24)$$

ただし, $\delta_k = \frac{k_b \bar{k}_b}{\omega_{1a}^2 (2\zeta_d \omega_d)^2}$, $\delta_c = \frac{c_b \bar{c}_b}{(2\zeta_d \omega_d)^2}$, $\delta_{kc} = \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{\omega_{1a}^2 (2\zeta_d \omega_d)^4}$ である.

(2) 2 自由度系

運動方程式は式(6)に後向き動特性を加えて次式となる.

$$\begin{bmatrix} m_t & m_c \\ m_c & m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BRG_F & 0 \\ 0 & k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BRG_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

ただし, $BRG_F = k_d + c_d(s - j\lambda\Omega)$, $BRG_B = K_b + C_b s$

式(9)のように無次元質量行列を用いて規格化すると次式となる.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mu_c \\ \mu_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_{11} \\ \ddot{\eta}_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} brg_F & 0 \\ 0 & \omega_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ \eta_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} brg_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_{11} \\ \bar{\eta}_{21} \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

ただし, $brg_F = (BRG_F)/m_t = \omega_d^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega)$, $brg_B = (BRG_B)/m_t = k_b + c_b s$, $\omega_z^2 = k^*/m_t$, $z_{11} = \sqrt{m_t} z_1$, $\eta_{21} = \sqrt{m^*} \eta_2$ である.

よって、特性方程式は次式となる．

$$\begin{vmatrix} s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) + \omega_d^2 & \mu_c s^2 & k_b + c_b s & 0 \\ \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 & 0 & 0 \\ \bar{k}_b + \bar{c}_b s & 0 & s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s + j\lambda\Omega) + \omega_d^2 & \mu_c s^2 \\ 0 & 0 & \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s - j\lambda\Omega) + \omega_d^2 & \mu_c s^2 \\ \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s^2 + 2\zeta_d \omega_d (s + j\lambda\Omega) + \omega_d^2 & \mu_c s^2 \\ \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} \\
 - (k_b + c_b s)(\bar{k}_b + \bar{c}_b s)(s^2 + \omega_z^2)^2 = 0 \quad (27)$$

安定限界の特性根を $s = j\omega_a$ と表すと、上式の実部、虚部は次式で与えられる．

$$\text{実部： } D_{F0}^2 + (2\zeta_d \omega_d)^2 (s^2 + \omega_z^2)^2 [s^2 + (\lambda\Omega)^2] - (k_b \bar{k}_b + c_b \bar{c}_b s^2)(s^2 + \omega_z^2)^2 = 0 \quad (28)$$

$$\text{虚部： } 2(2\zeta_d \omega_d) s (s^2 + \omega_z^2) D_{F0} - (k_b \bar{c}_b + \bar{k}_b c_b) s (s^2 + \omega_z^2)^2 = 0 \quad (29)$$

ただし、 $D_{F0} = \begin{vmatrix} s^2 + \omega_d^2 & \mu_c s^2 \\ \mu_c s^2 & s^2 + \omega_z^2 \end{vmatrix} = 0$ は等方性軸受系の場合の 1 次不減衰固有振動数 ω_1 を与える．

式(29)より不安定固有振動数 $s = j\omega_a$ が決まる．

$$D_{F0} = \frac{\text{Re}[k_b \bar{c}_b]}{2\zeta_d \omega_d} (s^2 + \omega_z^2) \rightarrow (s^2 + \omega_d^2)(s^2 + \omega_z^2) = (\mu_c s^2)^2 + \delta_a \omega_d^2 (s^2 + \omega_z^2) \quad (30)$$

この 1 次不減衰固有振動数 ω_1 の図式解は図 10 である．図中の曲線 y_1 と y_2 は式(11)に示すもので、両者の交点が前向きふれまわり成分のみを有する等方性軸受系の場合の固有振動数 ω_1 である．前向きと後向きのふれまわり成分を考慮した場合には、固有振動数 ω_{1a} は、曲線 y_1 と図中の y_3 の交点となる．この振動数 ω_{1a} は、 $\omega_{1a} < \omega_1$ であるのでわずかに ω_1 より低い．その推定近似式は前述の式(22)で表される．

Fig. 10 Natural frequency revised by backward properties. The natural frequency can be determined by the intersection between curves y_1 and y_3 , instead of y_1 and y_2 in Fig. 4, when the anisotropic characteristics of bearings are taken into account in the calculations.

次に安定限界回転数 $\lambda\Omega$ は式(28)より次のように決まる．

$$s^2 + (\lambda\Omega)^2 = \frac{k_b \bar{k}_b + c_b \bar{c}_b s^2}{(2\zeta_d \omega_d)^2} - \frac{D_{F0}^2}{(2\zeta_d \omega_d)^2 (s^2 + \omega_z^2)^2} = \frac{k_b \bar{k}_b + c_b \bar{c}_b s^2}{(2\zeta_d \omega_d)^2} - \frac{\text{Re}^2[k_b \bar{c}_b]}{(2\zeta_d \omega_d)^4} \quad (31)$$

上式に $s = j\omega_a$ を代入して，安定限界回転数は以下のように計算できる．

$$(\lambda\Omega)^2 = \omega_{1a}^2 \left[1 + \frac{k_b \bar{k}_b}{\omega_{1a}^2 (2\zeta_d \omega_d)^2} - \frac{c_b \bar{c}_b}{(2\zeta_d \omega_d)^2} - \frac{\text{Re}^2[k_b \bar{c}_b]}{\omega_{1a}^2 (2\zeta_d \omega_d)^4} \right] = \omega_{1a}^2 (1 + \delta_k - \delta_c - \delta_{kc}) \quad (32)$$

(3) 計算精度の検証

等方性の軸受特性を有する場合に前向きふれまわりのみを考慮し，安定性予測を行った結果を図9に示した．しかしながら，軸受のすきま比が大きい $C/R=0.010$ の場合には，軸受動特性の強い異方性のため，不安定開始回転数の予測精度は十分ではなかった．ここで再度新しい式(30)より軸受動特性に異方性があり，後向きふれまわりを扱う場合の予測精度を考察する．新しい式による $C/R = \{0.001, 0.003, 0.010\}$ の場合における計算過程を表3に示す．

図10の図式解法により式(30)を解く前に，表3の3行目に示す無次元係数 δ_k については， $C/R=0.010$ の際には ω_1 から ω_{1a} への変化に伴い，比較的大きな影響があるが，それ以外のすきま比の場合には，それほどの変化がないことがわかる．同表1行目に示す通り，等方性の場合の安定限界での振動数は $\omega_1 = \{45.6, 42.7, 38.6\}$ Hz であるが，式(30)の解によると，異方性のある場合には，同表4行目に示す通り， $\omega_{1a} = \{45.6, 42.4, 33.3\}$ Hz となる． $C/R=0.010$ の場合には 38.6 から 33.3 Hz に低下し，安定性の上で「不利」である．

次に5から10行目において不安定の開始速度を計算した．軸受剛性の異方性の比 δ_k によって安定性が向上し，減衰異方性の比 δ_c によって安定性が低下する．比 δ_{kc} (剛性異方性と減衰異方性の積) によって安定性に影響があることがわかる．これらの比の合計を同表8行目に示す． $C/R=0.010$ の場合には，式(32)中の $1 + \delta_k - \delta_c - \delta_{kc} = 1.53$ となり，安定性の上で「有利」である．9行目に示すように，不安定開始回転数は $\Omega_{1a} = \{91.0, 82.0, 83.5\}$ rps となり，結果的に $\lambda_a = \omega_{1a} / \Omega_{1a} = \{0.50, 0.51, 0.40\}$ となる．表3に示す通り， $C/R = 0.001$ および 0.003 の場合については，すきま比が十分に小さく，異方性は無視できるので，安定限界回転数はほぼ変わらない．しかし $C/R = 0.010$ の場合には，上記「有利」と「不利」の積が示す通り，安定限界回転数が向上し，安定域が拡大する．いわゆる軸受剛性の異方性で安定性が向上する．

Table 3 Parameter values influenced by backward components.

Note: F = only Forward whirl bearing force and

FB = both of Forward and Backward whirl bearing forces

	C/R		0.001	0.003	0.010
No.	$\lambda = k_c / (c_d \Omega)$		0.5	0.503	0.493
1	F	ω_1 Hz	45.6	42.7	38.6
2	F	$\Omega_1 = \omega_1 / \lambda$	91	84.8	78.3
3	FB	δ_a	0.002	0.08	0.49
4	FB	ω_{1a} Hz	45.6	42.4	33.3
5	FB	δ_k	0.0004	0.042	1.9
6	FB	$-\delta_c$	-0.002	-0.08	-0.5
7	FB	$-\delta_{kc}$	0	-0.0014	-0.87
8	FB	$\delta_k - \delta_c - \delta_{kc}$	-0.001	-0.042	0.53
9	FB	Ω_{1a_onset} rps	91.0	82.0	83.5
10	FB	$\lambda_a = \omega_{1a} / \Omega_{1a}$	0.50	0.51	0.40

したがって、前向きふれまわりのみを考慮した安定性チャート図 9 を、後向き成分を考慮して書き直すと図 11 になる。 $C/R = 0.010$ の場合には軸受特性の強い異方性のために安定限界が上昇していることがわかる。 $C/R=0.010$ の場合には ω_{1a} の水平線が 33.3 Hz へ低下する。しかし、安定限界は $\Omega_{1a} = 83.5$ rps まで広がる。同図表 C は、交点法による予測値をまとめた結果である。その結果は、同図 B の厳密値に近づき、精度は向上したことが確認される。

Fig. 11 Stability limit revised by backward properties. The estimated instability onset speed Ω_{1a} calculated with the anisotropic characteristics of bearings is closer to the exact speed Ω_{1e} compared to the calculation results in Fig. 9.

3. 結 言

本論文では、すべり軸受で支持された弾性ロータの振動解析と、軸受に発生する不安定化力が原因となって発生する自励振動の発生回転数の簡易予測法について議論した。簡易予測法では、ロータ系のたわみ振動を平行モードと曲げモードの2自由度系からなるモデルで簡略化し、ロータの安定判別を行った。その結果、すべり軸受のすきま比が実用的な範囲であれば、軸受動特性が等方的であると考え、本簡易予測計算によって精度良く安定限界を求めることができることがわかった。また、すきま比が実用より大きい場合には、軸受動特性の異方性を考慮した解析を行うことで、本簡易予測法の精度が向上することがわかった。

文 献

- Bently, D. E. and Hatch, C. T., Fundamentals of rotating machinery diagnostics, Bently Pressurized Bearing Press (2002).
- 伊藤誠, 藤原浩幸, 松下修己, 磁気軸受形オーバハングロータの Q 値評価と回転試験, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 73, No. 727 (2007), pp.669-676.
- 菊地勝昭, 小林暁峯, 多軸受多円板回転軸系の安定性解析, 日本機械学会論文集, Vol. 43, No. 368 (1977), pp.1338-1347.
- Kikuchi, K. and Kobayashi, S., Stability analysis of a rotating shaft system with many bearings and disks, Bulletin of JSME, Vol.20, No.150 (1977), pp.1592-1600.
- 松下修己, 田中正人, 神吉博, 小林正生, 回転機械の振動, コロナ社 (2009), pp. 79-86, 189-192.
- 松下修己, 田中正人, 小林正生, 古池治孝, 神吉博, 続回転機械の振動, コロナ社 (2012), pp.32, 39, 231.
- 松下修己, MyROT, available from <http://www.myrot.jp/>, (参照日 2018 年 11 月 10 日).
- Muszynska, A., Whirl and whip rotor /bearing stability problems, Journal of Sound and Vibration, Vol.110, No.30 (1986), pp.443-462.
- Muszynska, A., Rotordynamics, Chapter4, CRC Press (2005).

染谷常雄, 日本機械学会編, すべり軸受の静特性および動特性資料集, 日本工業出版 (1984).

津野田亘, 土方亘, 進士忠彦, 藤原浩幸, 松下修己, 磁気軸受加振によるすべり軸受ロータの安定性診断, 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 834 (2016) , DOI:10.1299/transjsme.15-00500.

References

- Bently, D. E. and Hatch, C. T., Fundamentals of rotating machinery diagnostics, Bently Pressurized Bearing Press (2002).
- Ito, M., Fujiwara, H. and Matsushita, O., A Q-value measurement for damping evaluation and rotational test of over-hung rotor supported by AMBs, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.73, No.727 (2007), pp.669-676 (in Japanese).
- Kikuchi, K. and Kobayashi, S., Stability analysis of rotating shaft system with many bearings and disks, Bulletin of JSME, Vol.43, No.368 (1977), pp.1338-1347 (in Japanese).
- Kikuchi, K. and Kobayashi, S., Stability analysis of a rotating shaft system with many bearings and disks, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.20, No.150 (1977), pp.1592-1600.
- Matsushita, O., Tanaka, M., Kanki, H. and Kobayashi, M., Vibration of rotating machinery, Corona Publishing (2009), pp. 79-86, 189-192 (in Japanese).
- Matsushita, O., Tanaka, M., Kobayashi, M., Koike, H. and Kanki, H., The second volume of vibration of rotating machinery, Corona Publishing (2012), pp.32, 39, 231 (in Japanese).
- Matsushita, O., MyROT, available from <<http://www.myrot.jp/>>, (accessed on 10 November, 2018) (in Japanese).
- Muszynska, A., Whirl and whip rotor /bearing stability problems, Journal of Sound and Vibration, Vol.110, No.30 (1986), pp.443-462.
- Muszynska, A., Rotordynamics, Chapter 4, CRC Press (2005).
- Someya, T., The Japan Society of Mechanical Engineers ed., Reference materials on static and dynamic properties of oil bearings, Japan Industrial Publishing (1984) (in Japanese).
- Tsunoda, W., Hijikata, W., Shinshi, T., Fujiwara, H. and Matsushita, O., Stability diagnosis of rotor-oil film bearing system by utilizing magnetic bearing, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol. 82, No. 834 (2016) , DOI:10.1299/transjsme.15-00500.

付 録

真円軸受の油膜動特性の例を文献（染谷, 1984, 松下他, 2012）から示す. ここには無次元ばね係数 K_{ij} , および無次元粘性減衰係数 C_{ij} の計 8 パラメータが示されている. 図 7 のロータ系で実機に近い $C/R = 0.001$, 安定限界付近の回転数 $\Omega = 90 \text{ rps}$ のときのゾンマーフェルト数 S は 3.4, $S(L/D)^2 = 3.4$ であるので, 概略 $K_{xx} = 1.1$, $K_{yy} = 2.6$, $K_{xy} = -K_{yx} = 30$, $C_{xx} = C_{yy} = 60$ である. 等方性と見て, 無次元クロスばね $K_c = K_{xy} = 30$, 無次元直交減衰 $C_d = 60$ である. ここで λ は有次元クロスばね k_c と有次元直交減衰 $c_d \times \Omega$ の比である. すなわち無次元パラメータを用い, 次のように計算される.

$$\lambda \equiv \frac{k_c}{c_d \Omega} = \frac{K_c}{C_d} = \frac{30}{60} = 0.5 \quad (\text{A1})$$

このように通常運転領域では, $\lambda =$ 無次元クロスばね/無次元直交減衰はおおよそ 0.5 であることが分かる. よって軸受動特性は, 前向き成分のみを採用し, クロス減衰は無視すると

$$\begin{aligned} BRG &= \frac{k_{xx} + k_{yy}}{2} \times 2 - j \frac{k_{xy} - k_{yx}}{2} \times 2 + \frac{c_{xx} + c_{yy}}{2} \times 2 \times s \\ &= k_d - jk_c + c_d s = k_d - j\lambda c_d \Omega + c_d s = k_d + c_d (s - j\lambda \Omega) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となり, 式(1)に至る.