均質化法による吸音材微視構造の寸法最適化

山本 崇史^{*1}, 桂 大詞^{*2}, 久保田 寛^{*2}Sizing optimization of microstructure of sound-absorbing poroelastic material
by homogenization methodTakashi YAMAMOTO^{*1}, Daiji KATSURA^{*2} and Hiroshi KUBOTA^{*2}^{*1} Department of Mechanical Engineering, Kogakuin University
2665-1 Nakano-machi, Hachioji-shi, Tokyo 192-0015, Japan^{*2} Mazda Motor Corporation
3-1 Shinchii, Fuchu-cho, Aki-gun, Hiroshima 730-8670, Japan

Received: 12 March 2020; Revised: 5 July 2020; Accepted: 24 August 2020

Abstract

Acoustic properties of sound-absorbing poroelastic media such as sound absorption coefficient are affected by microscopic structures. However, the design method for microscopic structures of sound-absorbing poroelastic media has not been established and the trial and error approach based on prototypes is required. In this study, a parametric optimization method to design microscopic structures of sound-absorbing poroelastic media is proposed. First, various models of microscopic structure of sound-absorbing material are generated by some sets of microscopic parameters and homogenized macroscopic properties, such as air flow resistivity and equivalent density and bulk modulus, are calculated by the homogenization method. Then, Biot's parameters are identified for each microscopic structure of sound-absorbing poroelastic material by using non-linear least square method, and the functions that link between Biot's parameters and the microscopic parameters, such as fiber diameter and pore radius, are derived. Finally, the microscopic parameters of poroelastic materials are optimized by using genetic algorithm (GA) to maximize sound absorption coefficient at prescribed target frequencies. In the verification of the proposed design method, the microscopic structures of fibrous porous material and foamed poroelastic material are optimized.

Keywords : Sound absorption coefficient, Poroelastic material, Homogenization, Multi scale, Optimization, Genetic algorithm

1. 緒 言

自動車などの輸送機器や建物など室内における静粛性の向上は、快適性を高める重要な要素であり、その代表的な方策の一つとして、多孔質吸音材が多用されている。多孔質吸音材の音響性能を示す代表的な特性は吸音率であり、吸音率は多孔質吸音材の微視構造に依存することが知られている。したがって、吸音率の目標値を満たすよう多孔質吸音材を設計するためには、多孔質吸音材の微視構造モデルが必要となる。

多孔質吸音材は、基材となる固体相と、数 μm から数百 μm の径の流路からなる流体相が混在した微視構造となっている。これまで適用されてきた吸音材のモデルの一つに、Delany と Bazley (Delany and Bazley, 1970) による経験則に基づいたモデルがある。しかし、このモデルは、マクロパラメータである空気流れ抵抗で表現されており、微視構造を扱うことはできない。また、流体相しか考慮されておらず、流体相の体積分率が 100%に近い織

維系の吸音材に適用は限定される。近年広く適用されている Biot (Biot, 1956a,b), Allard (Allard and Atalla, 2009), Atalla ら (Atalla et al., 1998) によるモデル (Biot's model) は、固体相と流体相の両方の特性を考慮しており、弾性定数や空気流れ抵抗など 8 つのパラメータ (Biot パラメータ) で表現されている。しかし、Biot パラメータはマクロスケールで定義されており、多孔質吸音材の微視構造と直接関係付けることはできない。ただ、Biot パラメータの値が得られていれば、吸音率や音響透過損失などの音響性能を比較的少ない計算コストで求めることができるという利点がある。

一方、多孔質体の微視構造からマクロスケールにおける特性や支配方程式を導出することを目的とした研究がこれまでにいくつか報告されている (Auriault et al., 1985; Levy, 1979; Burridge and Keller, 1981; Boutin et al., 1998)。多くの研究は多孔質吸音材における物理現象の一部を扱ったものになっており、そのまま多孔質吸音材に適用することはできない。著者の一人は、従来の均質化法を多孔質吸音材に適用できるよう拡張しており (Yamamoto et al., 2011)、多孔質吸音材の微視構造モデルからマクロ特性を求め、そのマクロ特性から吸音率を直接求めることができる。本手法により、微視構造を直接設計することが可能となるものの、計算負荷が大きく、多様な微視構造を検討することは容易ではない。

そこで、本研究では、均質化法により求めたマクロ特性から Biot パラメータを同定し、Biot パラメータと空孔径、繊維径や繊維間距離などの微視構造を特徴づける寸法パラメータと関連付ける手法を提案する。これにより、微視構造の寸法パラメータに対する吸音率を効率よく求めることができる。また、本手法を用いて微視構造パラメータの最適設計を行う手法を提案する。

以下、2 章では本研究で提案する多孔質吸音材の微視構造の寸法最適設計法の概略を説明し、3 章では提案手法で用いる多孔質吸音材の均質化法について概説する。また、4 章では均質化法による計算から得られたマクロ特性を用いて Biot パラメータを同定する方法について述べる。5 章で本提案手法を繊維系吸音材に、6 章では発泡系吸音材に適用する。最後に本研究のまとめと今後の課題について述べる。

2. 均質化法による吸音材微視構造の最適設計法

多孔質吸音材の吸音率 α や音響透過損失 STL などの音響的性能を予測する手法として、現在、図 1 に示すような 2 つの方法がある。一つは、図 1 の上部に黒矢印線で示しているように、Biot パラメータを実験的に同定し、

Fig. 1 Proposed process to design optimal microstructure of sound-absorbing poroelastic materials (in red line). 1) Microscopic models are generated for selected microscopic parameters, such as fiber diameter and pore size. 2) Homogenized properties are calculated by using Homogenization method. 3) Biot parameters are identified by using nonlinear least square method. 4) Microscopic parameters are linked with Biot parameters. 5) Microscopic parameters are optimized to maximize sound absorption coefficient by genetic algorithm.

Biot のモデルを用いる方法である．もう一つは，図 1 の下部に青矢印線で示しているように，SEM や μX 線 CT などから得られた情報をもとに微視構造モデルを構築し，均質化法を用いる方法である．前者の方法では，微視構造を扱うことはできないが，Biot パラメータの値が得られれば，吸音率や音響透過損失などの音響性能を比較的少ない計算コストで効率よく求めることができる．後者の方法では，微視構造を直接扱うことができるが，均質化法によりマクロ特性を算出する計算の負荷が大きく，多くの微視構造を検討することは容易ではない．

そこで，本研究では図 1 の赤矢印線で示すように，微視構造を取り扱うことのできる均質化法と，効率よく吸音率などの音響的性能を算出することのできる Biot のモデルを併用し，多孔質吸音材の微視構造をパラメトリックに最適化するハイブリッド手法を提案する．すなわち，多孔質吸音材の微視構造に対して繊維径や空孔径などをパラメータにした微視構造モデルを複数作成し，それらに均質化法を用いて等価密度などのマクロ特性を算出する．次に，Biot のモデルにおいて，均質化法の計算により得られたマクロ特性と一致するように Biot パラメータを同定する．そして，微視構造パラメータと Biot パラメータを関連付ける関数を導出する．この関数を用いることで，微視構造のパラメータを変更した場合でも，吸音率などの音響的性能を容易に算出することができる．さらに，遺伝的アルゴリズムを適用し，指定周波数で吸音率が最大となる微視構造のパラメータを求める．

3. 多孔質吸音材の均質化

多孔質吸音材に適用できるよう拡張した均質化法について概略を説明する．詳細は文献 (Yamamoto et al., 2011) を参照されたい．

図 2 に示すように周期的な微視構造を有する多孔質吸音材を考える．ミクروسケールにおける支配方程式について，まず，固体相は線形弾性体の平衡式・構成式・変位-ひずみ関係式とし，流体相の流れ場は微小変位を仮定し線形化した Navier-Stokes の方程式とする．また，温度場は熱力学の第一法則にしたがうものとし，固体相の比熱が流体相の比熱に比して十分大きく平衡状態での温度を保持すると仮定し，流体相のみ温度変動するものとする．質量保存則および状態方程式も支配方程式として考慮し，また，固体相と流体相の境界において速度，垂

Fig. 2 Schematic view of homogenization method for sound-absorbing poroelastic material. Poroelastic material is assumed to be composed by periodically-aligned microscopic unit cell that is consisted by solid and fluid phases. Solid phase is made from isotropic elastic material, and fluid phase is made from compressive viscous fluid.

直応力および温度の連続条件を課す。漸近展開をした解を仮定し、ミクロスケールにおける支配方程式に代入すると、ミクロスケールにおける境界値問題を得ることができる。これらを解いて得られた解を体積平均することでマクロスケールにおける均質化特性を得ることができる。また、ミクロスケールにおける支配方程式を平均化することで、マクロスケールにおける固体相および流体相の支配方程式をそれぞれ導出することができる。これを解くことで吸音率などの音響的性能を求めることができる。

3.1 多孔質吸音材のミクロスケールにおける基礎支配方程式

多孔質吸音材のミクロスケールにおける支配方程式について、固体相は等方性の線形弾性体、流体相は圧縮性の粘性係数 μ^f の粘性流体で構成されているものとする。固体相の支配方程式は、固体相の変位を u_i^s 、質量密度を ρ^s 、弾性テンソルを c_{ijkl}^s 、応力を σ_{ij}^s 、ひずみを ϵ_{kl}^s とすると、以下の式で表される。

$$-\rho^s \omega^2 u_i^s = \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j}, \quad \sigma_{ij}^s = c_{ijkl}^s \epsilon_{kl}^s, \quad \epsilon_{kl}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^s}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^s}{\partial x_k} \right) \quad (1)$$

ここで、 ω は角振動数である。流体相の速度を v_i^f 、質量密度を ρ^f 、応力を σ_{ij}^f 、ひずみを ϵ_{ij}^f 、音圧を p^f とし、速度振幅が微小で速度の二乗の項が無視できるとすると、流体相の流れ場に関する支配方程式は、以下に示すように、線形化された Navier-Stokes の方程式で表される。

$$\rho^f j \omega v_i^f = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j}, \quad \sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + 2\mu^f \epsilon_{ij}^f - \frac{2}{3}\mu^f \delta_{ij} \epsilon_{kk}^f, \quad \epsilon_{ij}^f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^f}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

ここで、 j は虚数単位、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。固体相の比熱は流体相の比熱に比して十分大きく、平衡状態での温度 T^f を維持すると仮定すると、温度場は流体相のみを考慮すればよく、温度変動を τ^f 、熱流速を q_i^f とすると、支配方程式は熱力学の第一法則より次式で表すことができる。

$$-\frac{\partial q_i^f}{\partial x_i} = j \omega \rho^f C_v^f \tau^f + (j \omega \rho^f R \tau^f - j \omega p^f), \quad q_i^f = -\kappa_{ij}^f \frac{\partial \tau^f}{\partial x_j} \quad (3)$$

ここで、 C_v^f は定積比熱、 R は気体定数、 κ_{ij}^f は熱伝導率テンソルである。また、流体相に関する質量保存則および状態方程式はそれぞれ次式で表すことができる。

$$\rho^f \frac{\partial v_i^f}{\partial x_i} + j \omega \delta^f = 0, \quad \frac{p^f}{\rho^f} = \frac{\delta^f}{\rho^f} + \frac{\tau^f}{T^f} \quad (4)$$

ここで、 δ^f は質量密度の変動を表す。固体相と流体相の境界 Γ^{sf} における境界条件は、速度、境界垂直方向の応力、および温度の連続性から以下のように書くことができる。

$$j \omega u_i^s = v_i^f, \quad \sigma_{ij}^s n_j^s + \sigma_{ij}^f n_j^f = 0, \quad \tau^f = 0 \quad (5)$$

ここで、 n_i^s 、 n_i^f はそれぞれ、 Γ^{sf} に立てた固体相、流体相の領域外向きの単位法線ベクトルである。

3.2 漸近展開

微視構造は周期的であると仮定し、その単位領域（ユニットセル）を Y 、ユニットセルの大きさを l とする。マクロスケールの代表長さ L は多孔質体における波長とし、ミクロスケールとマクロスケールの代表長さの比を $\epsilon = l/L$ とする。また、マクロスケールにおける空間変数を $\mathbf{x}$ 、ミクロスケールにおける空間変数を $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) とする。Gilbert ら (Gilbert and Mikelić, 2000) や Clopeau ら (Clopeau et al., 2001) が two-scale 収束論を適用し数学的に明らかにしているように、多孔質体の問題においても漸近展開形の解が成り立つ。ここでは、状態量 u_i^s 、 v_i^f 、 p^f 、 τ^f 、 δ^f に対して、次式のような漸近展開形の解 (Sanchez-Palencia, 1980) を仮定する。

$$u_i^s = u_i^{s(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon u_i^{s(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 u_i^{s(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (6)$$

$$v_i^f = v_i^{f(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon v_i^{f(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 v_i^{f(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (7)$$

$$p^f = p^{f(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon p^{f(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 p^{f(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (8)$$

$$\tau^f = \tau^{f(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \tau^{f(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 \tau^{f(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (9)$$

$$\delta^f = \delta^{f(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \delta^{f(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^2 \delta^{f(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (10)$$

ここで、右辺における全ての項は $\mathbf{y}$ について周期的 (Y -periodic) である。これら漸近展開形の解を支配方程式 (1)~(5) に代入し、 ε のオーダーで整理する。

3.3 境界値問題

固体相の ε^{-1} のオーダーの関係式に Galerkin 法を適用すると、固体相の変位に関する Y -periodic な特性関数 $\chi_i^{kl}(\mathbf{y})$ について、 δu_i^s を重み関数とする以下の境界値問題を得ることができる。

$$\int_Y \left(c_{ijkl}^s - c_{ijpq}^s \frac{\partial \chi_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right) \frac{\partial \delta u_i^s}{\partial y_j} dY = 0 \quad (11)$$

剛体変位を除くため $\int_Y \chi_i^{kl}(\mathbf{y}) dY = 0$ の条件のもと上式を解くと特性関数 $\chi_i^{kl}(\mathbf{y})$ を求めることができる。

ε^0 のオーダーにおける流体相の固体相に対する相対速度 $w_i^{f(0)} = v_i^{f(0)} - j\omega u_i^{s(0)}$ を考え、 $v_i^{f(0)}$ を $w_i^{f(0)} + j\omega u_i^{s(0)}$ で置き換える。 ε^{-1} のオーダーの関係式より流体相の流れ場に関して、 δw_i^f , δp^f を重み関数とする次のミクロスケールにおける境界値問題を得ることができる。

$$\begin{aligned} \int_Y \rho^f j\omega \xi_i^k(\mathbf{y}) \delta w_i^f dY + \int_Y \mu^f \frac{\partial \xi_i^k(\mathbf{y})}{\partial y_j} \frac{\partial \delta w_i^f}{\partial y_j} dY + \int_Y \frac{1}{3} \mu^f \frac{\partial \xi_i^k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \delta w_i^f}{\partial y_i} dY \\ - \int_Y \frac{\partial \xi_i^k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \delta p^f dY - \int_Y \frac{\partial \delta w_i^f}{\partial y_i} \pi^k(\mathbf{y}) dY = \int_Y \delta \xi_i^k(\mathbf{y}) dY \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\xi_i^k(\mathbf{y})$ および $\pi^k(\mathbf{y})$ はそれぞれ相対速度、圧力に関する Y -periodic な特性関数である。なお、 Γ^{sf} において $\xi_i^k(\mathbf{y}) = 0$ である。一定圧力の成分を除くため $\int_Y \pi^k(\mathbf{y}) dY = 0$ の条件を付加して解くことで、 $\xi_i^k(\mathbf{y})$ および $\pi^k(\mathbf{y})$ を求めることができる。

ε^0 のオーダーにおける流体相の温度 $\tau^{f(0)}$ についての関係式より、 $\delta \tau^f$ を重み関数とする次の境界値問題を得ることができる。

$$\int_Y \frac{1}{j\omega \rho^f C_p^f} \kappa_{ij}^f \frac{\partial \zeta(\mathbf{y})}{\partial y_j} \frac{\partial \delta \tau^f}{\partial y_i} dY + \int_Y \zeta(\mathbf{y}) \delta \tau^f dY = \int_Y \delta \tau^f dY \quad (13)$$

ここで $\zeta(\mathbf{y})$ は温度に関する Y -periodic な特性関数であり、 Γ^{sf} において温度変動がゼロの条件 $\zeta(\mathbf{y}) = 0$ をみたす。

3.4 均質化法により得られるマクロ特性

境界値問題を解き得られた特性関数 $\chi_i^{kl}(\mathbf{y})$ をユニットセル Y において体積平均をとることで、固体相の均質弾性テンソル c_{ijkl}^H は、次式により求めることができる (Terada et al., 1998)。

$$c_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[c_{ijkl}^s - c_{ijpq}^s \frac{\partial \chi_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_q} \right] dY \quad (14)$$

ここで、 $|Y|$ は多孔質体のユニットセル Y の体積である。

また、ユニットセル中の流体相 Y^f において $\xi_i^k(\mathbf{y})$ の体積平均をとると、流体相の等価密度 ρ_{ki}^{fc} を次式で求めることができる。

$$\rho_{ki}^{fc} = \frac{1}{j\omega} \langle \xi_i^k(\mathbf{y}) \rangle_{Y^f}^{-1} \quad (15)$$

ただし、 $|Y^f|$ をユニットセル中の流体相 Y^f の体積、 $\langle \cdot \rangle_{Y^f}$ は Y^f における体積平均である。

流体相の等価体積弾性率 K^f はユニットセル中の流体相 Y^f において $\zeta(\mathbf{y})$ の体積平均をとることで以下のように求めることができる。

$$K^f = \frac{\gamma^f P^f}{\gamma^f - (\gamma^f - 1) \langle \zeta(\mathbf{y}) \rangle_{Y^f}} \quad (16)$$

3.5 マクロスケールの支配方程式

得られたマクロ特性を用いて、マクロスケールにおける固体相および流体相の支配方程式をそれぞれ以下のよう導出することができる。

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{s(0)}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \omega^2 u_i^{s(0)} - \rho^f \omega^2 d_i^k u_k^{s(0)} - j \omega d_i^k \frac{\partial \psi^{f(0)}}{\partial x_k} + j \omega \phi \frac{\partial \psi^{f(0)}}{\partial x_i} + j \omega k_{ij}^H \frac{\partial \psi^{f(0)}}{\partial x_j} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d_i^k}{\rho^f} \frac{\partial^2 \psi^{f(0)}}{\partial x_k \partial x_i} + \omega^2 \left(\theta^f + \frac{\phi}{K^f} \right) \psi^{f(0)} - j \omega d_i^k \frac{\partial u_k^{s(0)}}{\partial x_i} + j \omega \phi \frac{\partial u_i^{s(0)}}{\partial x_i} + j \omega \theta^{s,pq} \varepsilon_{pq}^{s(0)} = 0 \quad (18)$$

ここで、 $\psi^{f(0)}$ は $p^{f(0)} = -j \omega \psi^{f(0)}$ と定義されるポテンシャル関数、 $\hat{\sigma}_{ij}^{s(0)}$ は流体相との連成を考慮しない場合の固体相の応力、 ϕ は空孔率、 $\bar{\rho}$ は多孔質体の平均質量密度で $\bar{\rho} = (1 - \phi) \rho^s + \phi \rho^f$ である。また、 k_{ij}^H 、 $\theta^{s,pq}$ は固体相に関する均質化マクロ特性、 θ^f 、 d_i^k は流体相に関する均質化マクロ特性であり、以下の式で表されるものである。

$$k_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y c_{ijkl}^s \frac{\partial \eta_k(\mathbf{y})}{\partial y_l} dY \quad (19)$$

$$\theta^{s,pq} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \chi_k^{pq}(\mathbf{y})}{\partial y_k} dY \quad (20)$$

$$\theta^f = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \eta_k(\mathbf{y})}{\partial y_k} dY \quad (21)$$

$$d_i^k = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho^f j \omega \xi_i^k(\mathbf{y}) dY \quad (22)$$

4. Biot パラメータの同定

Biot のモデルの平衡式や構成式については、文献 (Biot, 1956a,b; Allard and Atalla, 2009; Atalla et al., 1998) を参照されたい。固体相に関しては、Lamé の定数 λ 、 μ 、質量密度 ρ の 3 つ、流体相に関しては、空孔率 ϕ 、トーチエオシエティ α_∞ 、空気流れ抵抗 σ 、粘性特性長 Λ 、熱的特性長 Λ' の 5 つのパラメータが用いられている。いずれもマクロスケールで定義され、微視構造と直接関係付けられてはいない。ここでは、均質化法による計算から得られたマクロ特性より、Biot パラメータを同定する手法について述べる。

4.1 弾性率、ポアソン比および質量密度

Biot のモデルでは、一般的に固体相は等方性の線形弾性体として扱う。ここでは、均質化法による計算から得られた均質化弾性テンソル c_{ijkl}^H を用いて、等方性線形弾性体の弾性テンソルの各成分との残差二乗和 f が最小となるヤング率 E とポアソン比 ν を求める。Lamé の定数を λ 、 μ とすると、残差二乗和 f は以下のように書くことができる。

$$f = (\lambda + 2\mu - c_{1111}^H)^2 + (\lambda + 2\mu - c_{2222}^H)^2 + (\lambda + 2\mu - c_{3333}^H)^2 + (\lambda - c_{2233}^H)^2 + (\lambda - c_{3311}^H)^2 + (\lambda - c_{1122}^H)^2 \\ + (\mu - c_{2323}^H)^2 + (\mu - c_{3131}^H)^2 + (\mu - c_{1212}^H)^2 \quad (23)$$

f の λ 、 μ に関する停留条件 $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ より、Lamé の定数 λ 、 μ は次式で求めることができる。

$$\lambda = \frac{5}{18} C_1 - \frac{1}{9} C_2, \quad \mu = -\frac{1}{9} C_1 + \frac{1}{9} C_2 \quad (24)$$

ただし、

$$C_1 = c_{1111}^H + c_{2222}^H + c_{3333}^H + c_{2233}^H + c_{3311}^H + c_{1122}^H \quad (25)$$

$$C_2 = 2(c_{1111}^H + c_{2222}^H + c_{3333}^H) + c_{2323}^H + c_{3131}^H + c_{1212}^H \quad (26)$$

である。これより、ヤング率 E とポアソン比 ν は次式で求められる。

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (27)$$

また、質量密度 ρ は、均質化法の計算で求めた $\bar{\rho}$ に等しい。

4.2 空孔率

空孔率 ϕ は、多孔質体に占める流体相の体積分率であり、微視構造の有限要素モデルから次式で容易に求めることができる。

$$\phi = |Y^f|/|Y| \quad (28)$$

ここで、 $|Y^f|$ はユニットセルの流体相の体積、 $|Y|$ はユニットセルの体積である。

4.3 空気流れ抵抗

空気流れ抵抗テンソル σ_{ij} は流速 v_i で空気を多孔質吸音材に流入させたときに、 x_j 方向に生じる単位厚さあたりの圧力損失であり、次式で定義される。

$$\sigma_{ij}v_i = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (29)$$

一方、流体相の均質化計算より平均流速 $\langle w_i^{(0)} \rangle_{Y^f}$ は以下で求められる。

$$\langle w_i^{(0)} \rangle_{Y^f} = \langle \xi_i^j(\mathbf{y}) \rangle_{Y^f} \left(-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} \right) \quad (30)$$

上の二式を比較すると空気流れ抵抗テンソル σ_{ij} は以下で求めることができる。

$$\sigma_{ij} = \langle \xi_i^j(\mathbf{y}) \rangle_{Y^f}^{-1} \quad (31)$$

Biot パラメータとしては、垂直入射吸音率を算出する際の音波の入射方向に対応する空気流れ抵抗値を用いる。

4.4 トーチュオシティと粘性特性長

均質化法による計算から得られる流体相の等価密度と Biot のモデルにおける等価密度の残差二乗和が最小になるよう、トーチュオシティ α_∞ と粘性特性長 Λ の値を同定する。Biot のモデルにおける流体相の等価密度 ρ^{fc} は、 ρ^f を空気の質量密度として次式で表される。

$$\rho^{fc} = \rho^f \alpha_\infty + \frac{\sigma\phi}{j\omega} G, \quad G = \left(1 + \frac{4j\omega v^f \rho^{f2} \alpha_\infty^2}{\Lambda^2 \sigma^2 \phi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

ただし、 v^f は動粘性係数で、 $v^f = \mu^f / \rho^f$ である。ここで、 $\rho^f = 1.2 \text{ kg/m}^3$ および $\mu^f = 1.84 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ としている。上式は未知数 α_∞ , Λ について線形ではないため、非線形最小二乗法である Levenberg-Marquardt 法を適用する。なお、Levenberg-Marquardt 法を、上式のような複素関数に適用する場合、複素残差 r の絶対値の二乗 rr^* の和を最小にするものとする。また、Levenberg-Marquardt 法は反復計算による方法で初期値を与える必要があり、同定する未知数が 2 つの場合、初期値により得られる解が異なる場合がある。ここでは、等価密度の実部が $\omega \rightarrow 0$ のときに一定値に収束することを利用し、同定する未知数を 1 つにする。すなわち、 $\omega \rightarrow 0$ のとき

$$G \approx 1 + \frac{2j\omega v^f \rho^{f2} \alpha_\infty^2}{\Lambda^2 \sigma^2 \phi^2} \quad (33)$$

より、

$$\frac{\rho^{fc}}{\rho^f} \approx \alpha_\infty + \frac{\sigma\phi}{j\omega\rho^f} \left(1 + \frac{2j\omega v^f \rho_0^{f2} \alpha_\infty^2}{\Lambda^2 \sigma^2 \phi^2} \right) = \alpha_\infty + \frac{2\mu^f \alpha_\infty^2}{\sigma\phi \Lambda^2} + \frac{\sigma\phi}{j\omega\rho^f} \quad (34)$$

となり、等価密度の実部は次式のように一定値 c となることが分かる。

$$\alpha_\infty + \frac{2\mu^f \alpha_\infty^2}{\sigma\phi \Lambda^2} = c \quad (35)$$

これより、

$$\Lambda^2 = \frac{2\mu^f \alpha_\infty^2}{\sigma\phi (c - \alpha_\infty)} \quad (36)$$

となる．元の式 (32) に代入すると

$$\rho^{fc} = \rho^f \alpha_\infty + \frac{\sigma \phi}{j\omega} G, \quad G = \left[1 + \frac{2j\omega \rho^f (c - \alpha_\infty)}{\sigma \phi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

となり，Levenberg-Marquardt 法で同定すべき未知数はトーチオシティ α_∞ の 1 つとなる．なお，一定値 c は均質化法による計算から得られる．

4.5 熱的特性長

均質化法による計算から得られる等価体積弾性率と Biot のモデルにおける等価体積弾性率の残差二乗和が最小になるよう，熱的特性長 Λ' の値を同定する．Biot のモデルにおける等価体積弾性率 K^f は次式で表される．

$$K^f = \frac{\gamma^f P^f}{\gamma^f - (\gamma^f - 1) \left(1 + \frac{8v'^f}{j\omega \Lambda'^2} G' \right)^{-1}}, \quad G' = \left(1 + \frac{j\omega \Lambda'^2}{16v'^f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

ここで， v'^f は温度拡散率， P^f は大気圧で，定圧比熱を C_p^f として $v'^f = \kappa^f / (\rho^f C_p^f)$ で定義される．なお，比熱比は $\gamma^f = 1.4$ としている．等価体積弾性率も複素関数で表されることから Levenberg-Marquardt 法を適用する．この場合，同定する未知数は熱的特性長 Λ' の 1 つである．

5. 繊維材料の微視構造最適化

Fig. 3 Typical microscopic structure of fibrous poroelastic material obtained by scanning electron microscope (SEM). Straight fibers are stacked horizontally.

図 3 は代表的な繊維系吸音材を走査型電子顕微鏡により撮像したものである．繊維系吸音材は図に示すように，繊維が平面的に積層して構成されている．繊維の配向は平面内において特定の方向に偏ることはなく，等方的とみなすことができる．また，繊維系吸音材のヤング率は空孔内空気の体積弾性率に比して小さいため，固体相の吸音率への影響は無視できることが多い．その場合，Biot のモデルにおいて固体相の弾性率をゼロとし，繊維の質量による慣性項のみを考慮した Limp フレームモデルがよく用いられている．

本研究では，Limp フレームモデルを微視構造において表現したモデルを用いる．すなわち，図 4(a) に示すように，繊維の配向角は 0° と 90° を考慮し，各繊維は接触することなく繊維間距離 d_f の間隔で配置しているものとする．また，繊維の断面形状は，一般的に円形に近いが，ここでは 1 辺の長さが d の正方形で近似する．図 4(b) は，ユニットセルの構造を示しており，ここでは非接触直交ファイバーモデルと称する．

5.1 Biot パラメータと微視的パラメータの関係式

繊維径 d および繊維間距離 d_f を微視的パラメータとし，それらの値を変更して作成した多様なユニットセルモデルについて，上述した均質化法を適用し，その結果から Biot パラメータを同定する．また，得られた Biot パ

Fig. 4 (a) Micro structure model of fibrous poroelastic material. Straight fibers are orthogonally aligned. (b) Unit cell model of fibrous poroelastic material. Rectangular section is assumed due to the simplicity of model geometry. Fibers that have rectangular section of size $d \times d$ are aligned orthogonally with periodicity of d_f .

ラメータと微視的パラメータの関係式を導出する．実験的にも同様の手順をとることは可能であるが，実材料では繊維径や繊維間距離を制御することは容易ではなく，また繊維径の分布やばらつきもある．均質化法の計算において周期構造を仮定するという制約があるが，指定した微視的パラメータを有する微視構造を正確に表現した上で数値実験を行うことができるという利点があると考え．

図4に示す微視構造の場合，空孔率 ϕ は $\phi = 1 - d^2 / (d + d_f)^2$ と表すことができることから，空孔率 ϕ を繊維間距離 d_f と等価な微視的パラメータとする．ここでは，繊維径 d を $0.5 \mu\text{m}$, $1.0 \mu\text{m}$, $5.0 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$, $20 \mu\text{m}$, $30 \mu\text{m}$, $40 \mu\text{m}$, $60 \mu\text{m}$, $80 \mu\text{m}$, $100 \mu\text{m}$ の10種，空孔率 ϕ を 0.7500 , 0.8264 , 0.8889 , 0.9375 , 0.9722 , 0.9931 の5種の組み合わせを取り，計50種類の微視構造について，均質化法による計算結果より Biot パラメータの値を同定した．表1に，例として3つのケースについて求めた Biot パラメータの値を示す．

Table 1 Biot's parameters of some selective micro structures of fibrous poroelastic material. Porosity ϕ and air flow resistivity σ are obtained directly from the results by the homogenization method. Tortuosity α_∞ , viscous characteristic length Λ and thermal characteristic length Λ' are identified by a nonlinear least square method using the equivalent density and bulk modulus obtained by the homogenization method.

	$d = 5 \mu\text{m}$ $d_f = 25 \mu\text{m}$	$d = 5 \mu\text{m}$ $d_f = 10 \mu\text{m}$	$d = 10 \mu\text{m}$ $d_f = 50 \mu\text{m}$
Porosity ϕ [–]	0.9722	0.8889	0.9722
Air flow resistivity σ [kNs/m ⁴]	249.9	2255.	62.46
Tortuosity α_∞ [–]	1.013	1.095	1.013
Viscous characteristic length Λ [μm]	31.91	9.392	63.82
Thermal characteristic length Λ' [μm]	34.75	11.75	69.72

図5は，表1の左端列にある繊維径 d が $5 \mu\text{m}$ ，繊維間距離 d_f が $25 \mu\text{m}$ の場合について，均質化法の計算結果より直接求めた等価密度・等価体積弾性率と，同定したトーチュエシティ α_∞ と粘性特性長 Λ ・熱的特性長 Λ' お

Fig. 5 Comparisons of (a) equivalent density normalized by mass density of air and (b) equivalent bulk modulus normalized by static pressure of air. Blue dots are obtained by homogenization method and red lines are obtained by Biot's model with identified parameters. Red lines agree well with blue dots in frequency range of interest.

よび均質化法により得られた空気流れ抵抗 σ を用いて Biot のモデルより求めた等価密度・等価体積弾性率の比較である。図より、対象周波数範囲で両者は良く一致していることが分かる。

次に、トーチュシティ α_∞ 、空気流れ抵抗 σ 、粘性特性長 Λ および熱的特性長 Λ' について、 d_f のべき乗と $(1-\phi)$ のべき乗からなる関数を仮定し、それらの指数と係数の値を最小二乗法により同定した。その結果、各 Biot パラメータと微視的パラメータについて以下の関係式を得ることができた。

$$\alpha_\infty = 2.03 - 1.03\phi \quad [-] \quad (39)$$

$$\sigma = 3.33 \times 10^5 d_f^{-2.00} (1-\phi)^{0.16} \quad [\text{kNs/m}^4] \quad (40)$$

$$\Lambda = 0.70 d_f (1-\phi)^{-0.15} \quad [\mu\text{m}] \quad (41)$$

$$\Lambda' = 0.76 d_f (1-\phi)^{-0.13} \quad [\mu\text{m}] \quad (42)$$

ここで、 d_f は $[\mu\text{m}]$ の単位における値を用いるものとする。これより、 σ は d_f の 2 乗に反比例、 Λ と Λ' は d_f に比例することが分かる。図 6 において、マーカーは均質化法による計算結果より同定した Biot パラメータの値、実線は式 (39) から式 (42) の関数による値を示しており、(a) はトーチュシティ、(b) は空気流れ抵抗、(c) は粘性特性長、および (d) は熱的特性長である。図より、いずれの Biot パラメータ においても両者は良く一致していることが分かる。

5.2 微視構造の寸法最適化

ここでは、微視構造の寸法パラメータである繊維径 d および 繊維間距離 d_f および 繊維材料の質量密度 ρ^s を設計変数とし、指定周波数における垂直入射吸音率の最大化を目的に、遺伝的アルゴリズムを用いて最適化する。ここでは周波数として 250 Hz, 500 Hz, 1.0 kHz, 2.0 kHz および 4.0 kHz の 5 ケースを考え、設計変数の上下限は、現実的な材料構成を考慮して、 $0.5 \mu\text{m} \leq d \leq 100 \mu\text{m}$, $0.800 \leq \phi \leq 0.990$, $900 \text{ kg/m}^3 \leq \rho^s \leq 2000 \text{ kg/m}^3$ とする。また、吸音材の厚さは 20 mm とした。なお、垂直入射吸音率は伝達マトリックス法により求めており、遺伝的アルゴリズムは Matlab の組込関数を用いている。

表 2 は、指定周波数において垂直入射吸音率が最大となる設計変数の値を示している。繊維径は 4.0 kHz の場合を除き $3 \mu\text{m}$ から $5 \mu\text{m}$ が最適値となっている。また、低周波数ほど空孔率が小さく圧縮度合いの大きい繊維材となっており、これまで得られている経験則にも合致している。

(a) Tortuosity

(b) Air flow resistivity

(c) Viscous characteristic length

(d) Thermal characteristic length

Fig. 6 Relationships between Biot parameters and micro structural parameters. Markers represent Biot's parameters identified from the results by the homogenization method. whereas solid lines represent the functions that relate microscopic parameters and Biot's parameters: (a) tortuosity, (b) air flow resistivity, (c) viscous characteristic length and (d) thermal characteristic length.

図7は、指定周波数において垂直入射吸音率が最大となるように最適化したときの垂直入射吸音率を示している。なお、図中の縦点線は最適化の対象とする指定周波数を示している。指定周波数において吸音率はほぼ1となっていることが分かる。

6. 発泡材料の微視構造最適化

6-1 微視構造モデル

図8は代表的な発泡材料であるポリウレタンフォームを走査型電子顕微鏡により撮像したものである。吸音材として使用される場合、吸音性能を高めるため連続気泡になっていることが多い。こうした材料の微視構造を表現するものとして、図9(a)に示す Kelvin セルモデルが使われている。図9(b)は Kelvin セルモデルのユニットセルで、四角形と六角形を組み合わせた構造となっている。ユニットセルの3辺の長さが同じ場合 ($w_x = w_y = w_z = w_f$)、四角形および六角形の空孔の大きさはそれぞれおよそ $1/3w_f$ および $2/3w_f$ である。

Table 2 Optimal microscopic parameters obtained by a genetic algorithm (GA) of Matlab. The objective is to maximize absorption coefficient for normal incidence at prescribed target frequency.

Target frequency	d [μm]	d_f [μm]	ϕ [–]	ρ^s [kg/m^3]
250 Hz	4.572	6.452	0.828	1650.
500 Hz	4.956	14.049	0.932	956.6
1.0 kHz	3.278	25.472	0.987	1301.
2.0 kHz	3.535	42.102	0.994	944.5
4.0 kHz	34.911	77.764	0.904	2000.

Fig. 7 Frequency characteristics of sound absorption coefficients for normal incidence when the optimal microscopic parameters for prescribed target frequency are applied. Sound absorption coefficient reaches 1.0 at the target frequency that is represented by dotted line.

Fig. 8 Typical microscopic structure of foamed poroelastic material obtained by scanning electron microscope (SEM). Microscopic pores are connected throughout material.

6.2 Biot パラメータと微視的パラメータの関係式

固体相のマクロ特性であるヤング率とポアソン比、流体相のマクロ特性である空気流れ抵抗については、構造を単純化したりすることで解析的に表現することも検討されている (Tarnow, 1997). 工学的な定義が明確でないト

Fig. 9 (a) Kelvin cell model that represents microscopic structure of foamed poroelastic material. (b) Unit cell model of Kelvin cell. Cell sizes w_x , w_y and w_z are assumed to be equal for this study.

チュオシティや粘性特性長については、微視構造の寸法との関係式を実験的に検討している事例もある (Boutin and Geindreau, 2008). いずれの検討事例においても、同一のモデルあるいは仮定に基づいて、全ての Biot パラメータを同定している事例はない. ここでは、提案する手法を Kelvin セルモデルに適用し、前節と同じ方法で、均質化法の計算結果から全ての Biot パラメータを同定する.

ユニットセルの3辺の長さが同じでいずれも w_f であるとし、ユニットセルサイズ w_f と空孔率 ϕ を微視構造のパラメータにとる. ここでは、ユニットセルサイズ w_f を $1.0 \mu\text{m}$, $5.0 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$, $20 \mu\text{m}$, $40 \mu\text{m}$, $100 \mu\text{m}$, $200 \mu\text{m}$, $300 \mu\text{m}$, $400 \mu\text{m}$, $1000 \mu\text{m}$ の 10 種、空孔率 ϕ を 0.9047 , 0.9326 , 0.9528 , 0.9685 , 0.9915 の 5 種の組み合わせをとり、合計 50 種類の微視構造を作成し、均質化法による計算結果から Biot パラメータの値を求めた. また、トーチュエシティ α_∞ 、空気流れ抵抗 σ 、粘性特性長 Λ および熱的特性長 Λ' について、 w_f のべき乗と $(1-\phi)$ のべき乗からなる関数を仮定し、それらの指数と係数の値を最小二乗法により同定した. その結果、各 Biot パラメータと微視的パラメータについて以下の関係式を得ることができた.

$$\alpha_\infty = 1.43 - 0.43\phi \quad [-] \quad (43)$$

$$\sigma = 3.88 \times 10^6 w_f^{-2.00} (1-\phi)^{0.355} \quad [\text{kNs/m}^4] \quad (44)$$

$$\Lambda = 0.094 w_f (1-\phi)^{-0.359} \quad [\mu\text{m}] \quad (45)$$

$$\Lambda' = 0.383 w_f (1-\phi)^{-0.149} \quad [\mu\text{m}] \quad (46)$$

ここで、 w_f は $[\mu\text{m}]$ の単位における値を用いるものとする. これより、 σ は w_f の 2 乗に反比例、 Λ と Λ' は w_f に比例することが分かる. なお、ヤング率 E とポアソン比 ν については Warren and Kraynik の式 (Warren and Kraynik, 1988) を用いて表すことができ、以下のように書くことができる.

$$E = \frac{2(1-\phi)^2}{3(1.9-0.9\phi)} E^s \quad (47)$$

$$\nu = \frac{\phi}{2(2-\phi)} \quad (48)$$

なお、 E^s は固体相を構成する材料のヤング率である.

6.3 微視構造の寸法最適化

微視構造のパラメータであるユニットセルサイズ w_f 、空孔率 ϕ 、固体相を構成する材料のヤング率 E^s 、質量密度 ρ^s 、損失係数 η^s を設計変数とし、指定周波数における垂直入射吸音率の最大化を目的に遺伝的アルゴリズム

を用いて最適化する．ここでは，2つの周波数における垂直入射吸音率の平均値を最大化することを考える．周波数は，500 Hz と 1.0 kHz, 500 Hz と 2.0 kHz, 500 Hz と 4.0 kHz, 1.0 kHz と 2.0 kHz, および 1.0 kHz と 4.0 kHz の5 ケースとし，設計変数の上下限は，現実的な材料構成を考慮して， $1.0 \mu\text{m} \leq w_f \leq 500 \mu\text{m}$, $0.900 \leq \phi \leq 0.990$, $200 \text{ MPa} \leq E^s \leq 500 \text{ MPa}$, $1000 \text{ kg/m}^3 \leq \rho^s \leq 2000 \text{ kg/m}^3$, $0.010 \leq \eta^s \leq 0.300$ とする．また，吸音材の厚さは 20 mm とした．

Table 3 Optimal microscopic parameters obtained by a genetic algorithm (GA) of Matlab. The objective is to maximize mean absorption coefficient for normal incidence at prescribed two target frequencies.

Target frequencies	$w_f [\mu\text{m}]$	$\phi [-]$	$E^s [\text{MPa}]$	$\rho^s [\text{kg/m}^3]$	$\eta^s [-]$
500 Hz, 1.0 kHz	62.1	0.974	500.	1832.	0.297
500 Hz, 2.0 kHz	69.4	0.969	500.	1959.	0.300
500 Hz, 4.0 kHz	51.6	0.964	349.	1843.	0.011
1.0 kHz, 2.0 kHz	75.1	0.989	500.	1174.	0.297
1.0 kHz, 4.0 kHz	66.8	0.986	221.	1262.	0.013

Fig. 10 Frequency characteristics of sound absorption coefficients for normal incidence when the optimal microscopic parameters for prescribed target frequency are applied: (a) target frequencies are set to 500 Hz and 1 kHz (blue line), 500 Hz and 2.0 kHz (green line), and 500 Hz and 4.0 kHz (red line), (b) target frequencies are set to 1.0 kHz and 2.0 kHz (blue line), and 1.0 kHz and 4.0 kHz (red line).

表 3 は，各ケースにおける設計変数の最適値を示している．また，図 10 は，設計変数の最適値を用いたときの垂直入射吸音率を示している．なお，図中の縦点線は最適化の対象とする指定周波数を示している．図から，指定周波数が 500 Hz と 4.0 kHz, 1.0 kHz と 4.0 kHz のケースでは 2 つの指定周波数において吸音率の周波数特性がピークになっている．また，指定周波数が 500 Hz と 1.0 kHz, 500 Hz と 2.0 kHz および 1.0 kHz と 2.0 kHz のケースでは，指定周波数において周波数特性がピークにはなっていないが，近傍の周波数域において吸音率を大きくすることができる．

7. ま と め

本研究では、多孔質吸音材の微視構造を直接扱うことのできる均質化法と、吸音率を効率良く予測できる Biot のモデルを併用し、多孔質吸音材の微視構造の寸法を最適化するハイブリッド手法を構築した。繊維材料については Limp フレームモデルにならない、非接触直交ファイバーモデルでモデル化し、均質化法を適用して得られた計算結果から Biot パラメータを同定し、繊維径や繊維間距離の微視パラメータと Biot パラメータを関係付ける式を最小二乗法により同定した。また、発泡材料については、Kelvin セルモデルでモデル化し、ユニットセルサイズや空孔率の微視パラメータと Biot パラメータを関係付ける式を最小二乗法により同定した。さらに、その関係式に遺伝的アルゴリズムを用いて、指定周波数において垂直入射吸音率を最大にする最適な微視構造パラメータを得ることができた。

謝 辞

本研究の一部は JSPS 科研費 17K06238 および工学院大学総合研究所プロジェクト研究の助成を受けたものです。

References

- Allard, J. F. and Atalla, N., *Propagation of Sound in Porous Media*, Wiley (2009), pp.111–135.
- Atalla, N., Panneton, R. and Debergue, P., A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 104, No.3 (1998), pp.1444–1452.
- Auriault, J. L., Borne, L. and Chambon, R., Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 77, No. 5 (1985), pp.1641–1650.
- Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 2 (1956a), pp.168–178.
- Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 2 (1956b), pp.179–191.
- Boutin, C. and Geindreau, C., Estimates and bounds of dynamic permeability of granular media, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 124, No.4 (2008), pp.3576–3593.
- Boutin, C., Royer, P. and Auriault, J. L., Acoustic absorption of porous surfacing with dual porosity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, Issues 34–35 (1998), pp.4709–4737.
- Burridge, R. and Keller, J. B., Poroelasticity equations derived from microstructure, *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 70, No.4 (1981), pp.1140–1146.
- Clopeau, T., Ferrín, J. L., Gilbert, R. P. and Mikelić, A., Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 33, Issues 8–9 (2001), pp.821–841.
- Delany, M. E. and Bazley, E. N., Acoustical properties of fibrous absorbent materials, *Applied Acoustics*, Vol. 3, Issue 2 (1970), pp.105–116.
- Gilbert, R. P. and Mikelić, A., Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I, *Nonlinear Analysis*, Vol. 40 (2000), pp.185–212.
- Levy, T., Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 17, Issue 9 (1979), pp.1005–1014.
- Sanchez-Palencia, E., *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer-Verlag (1980).
- Tarnow, V., Calculation of the dynamic air flow resistivity of fiber materials, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 102, Issue 3 (1997), pp.1680–1688.
- Terada, K., Ito, T. and Kikuchi, N., Characterization of the mechanical behaviours of solid-fluid mixture by the homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 153, Issues 3–4 (1998), pp.223–257.

Warren, W. E. and Kraynik, A. M., The linear elastic properties of open-cell foams, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, No.2 (1988), pp.341–346.

Yamamoto, T., Maruyama, S., Terada, K., Izui, K. and Nishiwaki, S., A generalized macroscopic model for sound-absorbing poroelastic media using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 200, No.1 (2011), pp.251–264.

付録: 複素関数に拡張した Levenberg-Marquardt 法

実数関数に対する非線形最小二乗法である Levenberg–Marquardt 法を複素関数に拡張する. すなわち, 複素残差 r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) の絶対値二乗和 $S = \sum_{i=1}^m r_i r_i^*$ を実数関数の場合と同様のアルゴリズムで最小化する. なお, $*$ は複素共役を表すものとする.

データ (x_i, y_i) と係数 β_j を有する関数 $f(x, \beta_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) の残差二乗和 S は以下のように書くことができる.

$$S(x_i, y_i, \beta_j) = \sum_{i=1}^m r_i r_i^* = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \beta_j)][y_i - f(x_i, \beta_j)]^* \quad (49)$$

係数 β_j による偏微分は

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^m r_i \frac{\partial r_i^*}{\partial \beta_j} + \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j} r_i^* = - \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i, \beta_j)) \frac{\partial f(x_i, \beta_j)^*}{\partial \beta_j} + \frac{\partial f(x_i, \beta_j)}{\partial \beta_j} (y_i - f(x_i, \beta_j))^* \quad (50)$$

$\Delta \beta_j = \beta_j - \beta_j^{(k)}$ として, すなわち $\beta_j = \beta_j^{(k)} + \Delta \beta_j$ として, $f(x_i, \beta_j)$ を $\beta_j^{(k)}$ のまわりで展開し, 1 次式で近似すると以下のように書くことができる.

$$f(x_i, \beta_j) = f(x_i, \beta_j^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_i, \beta_j)}{\partial \beta_j} (\beta_j - \beta_j^{(k)}) + \dots \approx f(x_i, \beta_j^{(k)}) + \sum_{j=1}^n J_{ij} \Delta \beta_j \quad (51)$$

ここで, $\frac{\partial f(x_i, \beta_j)}{\partial \beta_j} = J_{ij}$ である. $\Delta y_i = y_i - f(x_i, \beta_j^{(k)})$ として

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = - \sum_{i=1}^m [(y_i - f(x_i, \beta_j)) J_{ij}^* + (y_i - f(x_i, \beta_j))^* J_{ij}] = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n (J_{ij}^* J_{il} + J_{ij} J_{il}^*) \Delta \beta_l - \sum_{i=1}^m (J_{ij}^* \Delta y_i + J_{ij} \Delta y_i^*) \quad (52)$$

S が最小のとき $\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0$ となることから,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n (J_{ij}^* J_{il} + J_{ij} J_{il}^*) \Delta \beta_l = \sum_{i=1}^m (J_{ij}^* \Delta y_i + J_{ij} \Delta y_i^*), \quad j = 1 \dots n \quad (53)$$

これは $n \times n$ の方程式になり, マトリックスで表記すると次式で表すことができる.

$$(\mathbf{J}^{*T} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{J}^*) \Delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{J}^{*T} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{y}^* \quad (54)$$

なお, 安定性のため実数関数の場合と同様に次式を用いる.

$$(\mathbf{J}^{*T} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{J}^* + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}^{*T} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{J}^*)) \Delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{J}^{*T} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{y}^*, \quad \lambda \geq 0 \quad (55)$$

得られた解より $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ を $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\beta}$ で更新し, 上記のプロセスを S が所定の閾値より小さくなるまで繰り返す.