マルチボディ運動学に基づく 2 自由度差動ネジ機構の構造の総合

原田 孝^{*1}, 中村 悠人^{*2}

Structural synthesis of two-dof differential screw mechanism by the multi-body kinematics

Takashi HARADA^{*1} and Yuto NAKAMURA^{*2}^{*1} Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Engineering, Kindai University
3-4-1 Kowakae, Higashiosaka-shi, Osaka 577-8502, Japan^{*2} Graduate School of Science and Engineering, Kindai University
3-4-1 Kowakae, Higashiosaka-shi, Osaka 577-8502, Japan

Received: 25 April 2020; Revised: 5 July 2020; Accepted: 17 August 2020

Abstract

A novel structural synthesis of a mechanism based on the multibody kinematics is proposed in this paper. Instead of the degree-of-freedom analysis by the Grübler's equation, numbers of the generalized coordinates and those of the constraint equations are introduced for the number synthesis of the mechanism. Sufficient and independent constraints which satisfy the number synthesis are described for the structural synthesis. The Jacobian matrix is derived by the derivative of the constraint equations with respect to time. By using the generalized coordinates, the proposed synthesis is widely applied for the lower degree analysis such as the three-dof planar mechanism, as well as the six-dof spatial mechanism without modifying the primary calculation method of the multibody kinematics. The lower degree analysis removes the redundant coordinates and over-constrained conditions, thus improves the complicated calculation, such as analyzing the planar mechanism using six-dof full spatial analysis. The proposed method is applied to the synthesis of the two-dof differential screw mechanism. The differential screw is comprised of two screw-nut mechanisms, each of them has two mechanical elements. The differential screw mechanisms are divided into two types; The coaxial serial-type differential screw mechanism in which one of the end of each non-driven mechanical element is directory connected to each other, and the parallel-type in which the non-driven mechanical element is connected via mechanical pairs. The rotational pair and the sliding pair are treated as the zero lead and the infinity lead of the screw pair as well as the general helix screw pair. A total of eight generalized coordinates, six kinematic constraints and two driving constraints are set for the number analysis. By evaluating the singularity of the Jacobian matrix from the generalized input velocity and that of the output element, forty combinations of the parallel-type differential screw mechanisms and twenty-four combinations of the serial-type are derived.

Keywords : Structural synthesis, Differential screw mechanism, Multibody kinematics, Generalized coordinates, Constraints, Jacobian analysis

1. 緒 言

2 組のネジ機構を用いて回転・直進運動を実現する 2 入力 2 出力の 2 自由度差動ネジ機構が、ロボットの機構部に広く応用されている (例えば, 井上, 2003). その構成要素であるネジ機構は, 雄ねじ部であるネジと雌ねじ部であるナットを剛体機素として, それらをねじで対偶した機構である. 2 自由度差動ネジ機構は 2 個のネジ機構を組合せて, 2 個の回転入力, あるいは 2 個の直進入力を出力節の回転・直進運動に変換する 2 入力 2 出力機構である. これまでに数多くの形式の 2 自由度差動ネジ機構が提案されており, その個々の研究事例を本論文の 2 章に整理している. 従来の研究は特定の差動ネジ機構の構造を提案し, 特定した構造の差動ネジ機構の力学の「解

析 (analysis)」を個別に扱うものであった。本研究では、差動ネジ機構全体を俯瞰し、これまでに提案されてきた差動ネジ機構を包含し、さらには、提案されていない新しい構成の差動ネジ機構の構造を見つけ出す、すなわち、差動ネジ機構の「構造の総合 (structural synthesis)」を行う。

機構学では、機構の総合の手順を、機構の形式を選択する「(1) 形式の総合」、節の数と対偶の数を決める「(2) 数の総合」、機構の具体的構造を決定する「(3) 構造の総合」、要求された入力関係を満たす機構定数を明らかにする「(4) 量の総合」の4ステップで実行する手順が整理されている(武田他, 2007)。「(2) 数の総合」までは Grübler 方程式に基づく自由度の計算が手順化されているが、「(3) 構造の総合」は存在する低次・高次対偶の組合せを用いて数の条件を満たす対偶を見つけ出す必要があり、機構学的な知識や経験を要する作業であり、数の条件を満たす対偶の一部を見落しかねない問題がある。近年、スクリュー理論を用いて機構の総合をシステムチックに行う研究が、特にパラレルメカニズムに対して盛んに取り組まれている(Kong and Gosselin, 2007)(Huang et al., 2013)(Zhao et al., 2014)。スクリュー理論は、3次元空間における剛体の速度・角速度(ツイスト)や力・トルク(レンチ)を6次元ベクトルである Plücker 座標系を用いて表現し、空間リンク機構の解析や総合に対して有効な理論体系である(Davidson and Hunt, 2004)。しかし、例えば平面4節平行リンク機構を6次元ベクトルを用いて空間リンク機構として扱う場合は、過拘束を排除したり適合条件を考慮するなどの機構解析が煩雑になる問題がある。6次元から3次元(直進2自由度、回転1自由度)に次元を落とすことによりこれら問題が解決できるが、低次元ベクトルの相反積を新たに定義するなど、スクリューの演算体系に修正が必要となる(Bonev et al., 2003)。

一方、機械力学の分野では、多剛体系の動力学であるマルチボディダイナミクス(multibody dynamics)に関して、剛体の変位を一般化座標で表現し、微分方程式である運動方程式(動力学)と、代数方程式である拘束条件式(運動学)をラグランジュ未定乗数法を介して連立させた混合微分代数方程式を用いる方法が整備され、さまざまな機械系の力学の「解析」に使用されている。マルチボディダイナミクスは広義では多剛体系の動力学を意味するが、現在では、混合代数微分方程式を用いる力学解析であると認知され、多くのマルチボディダイナミクスの専門書(田島, 2006)(岩村, 2018)においても混合微分代数方程式に基づく力学解析手法が紹介されている。本研究では、一般化座標と拘束条件式を利用した機構の運動学を「マルチボディ運動学(multibody kinematics)」と称することとする。

マルチボディ運動学では、一般化座標に任意の次数や単位系を使用することが可能であり、空間機構の場合は各剛体に6次元、平面機構の場合は各剛体に3次元の一般化座標を定義して、混合微分代数方程式の演算体系を修正することなく高次元から低次元に至る機構の力学解析が可能である。低次元化した必要最小数の一般化座標を用いることで冗長な座標変数と過拘束や適合条件を排除し、機構の解析や総合の見通しを良くできることが特徴である。本研究で対象とする差動ネジ機構は、各剛体機素のネジ軸に沿った直進と回転のみを対象とする2自由度の低次元機構であるために、マルチボディ運動学を用いて機構の総合を行うことを方針とする。これまで主として「解析」に用いられてきたマルチボディ運動学を、差動ネジ機構を対象例として新たに機構の「総合」に適用する方法を提案することが、機構の総合分野における本論文の新規性である。

本論文の差動ネジ機構の総合では、従来の機構学の総合のステップを踏襲するが、「(2) 数の総合」における機構学の Grübler 方程式を用いた自由度計算を、マルチボディ運動学では一般化座標と拘束条件の数を決定する方法に置き換える。「(3) 構造の総合」では具体的な拘束条件を連立方程式の形式で与える。従来の機構学の R(回転対偶)や P(直進対偶)など対偶記号では分類しにくい対偶も、マルチボディ運動学では拘束条件式を用いることで任意の拘束を与える対偶を表現することが出来る。一般化座標の拘束条件式の時間微分から、機構の入出力の一般化速度のヤコビ行列を導出し、ヤコビ行列の正則性を評価して機構として成立する構造を抽出する。

本論文では、2章でこれまでに提案されてきた2自由度差動ネジ機構を整理し、それらをネジ機構の物理的な配置方法に関して直列型と並列型に分類する。3章では、先ず本論文に関係する差動ネジ機構の形式と用語を定義する。らせんネジ対偶に加えて、ベアリングやスプラインもそれぞれリードがゼロおよび無限大のネジ対偶として機構の形式に組込むこととする。次に、比較として Grübler 方程式に基づいた差動ネジ機構の数の総合に関して述べた後に、マルチボディ運動学を用いた数の総合として、差動ネジ機構を構成する4個の剛体機素に合計8個の一般化座標を割り当て、ネジ機構を駆動する2個の駆動拘束条件式と6個の幾何拘束条件式が必要となることを述べる。4章の構造の総合では、数の総合で得た拘束条件の数を満たす独立な拘束条件を与えて、216通りの並列型および108通りの直列型が、2自由度差動ネジ機構の構造の候補として存在することを示す。拘束条件式の時間微分

により入出力の一般化速度の関係であるヤコビ行列を導出し、その正則性を評価して、216通りの中の40通りの並列型差動ネジ機構、および、108通りの中の24通りの直列型差動ネジ機構が機能する構造となることを導いた。

2. 差 動 ネ ジ 機 構

図1に代表的な2自由度差動ネジ機構の模式図を示す。図中のR, P, Hはそれぞれ回転対偶, 直進対偶, らせんネジ対偶を意味し, $\underline{R}$ などの下線はそれが能動対偶であることを表している。受動対偶R, P, Hは, 差動ネジ機構の機械要素として, それぞれベアリング, スプライン, らせんネジに該当する。図1(a)に示す, 同軸上に配置したリードが異なる2個のネジの一端どうしを結合したものを出力節とし, 原動節となる2個のナットの回転運動を出力節の回転・直進運動に変換する差動ネジ機構がガントリ型ロボットの手先の回転・直進運動機構に利用されている (Harada, 2020)。機構学では, 「結合」した2つの非駆動節を一体化して一つの節として扱う考え方が一般的であるが, 本論文では, 非駆動節間が「結合」されない並列型差動ネジ機構も含めて広く差動ネジ機構の総合を行うために, 「結合」も広義の対偶であるとする。また, 同形式の差動ネジ機構を平行ロボットの可動部に込み, 図1(b)のように2個のナットの直進運動を差動ネジの回転・直進運動に変換し, 平行ロボットの回転領域を拡張する研究も行われている (Lee and Lee, 2010) (Harada and Angeles, 2014) (原田, 牧野, 2018)。さらには, ナットの一端どうしを結合したものを出力節とし, 原動節となる2個のネジの回転運動を出力節の回転・直進運動に変換する差動ネジ機構がロボット用の円筒アクチュエータとして提案されている (Harada et al., 2014)。これらは, 2組のネジ機構を同軸上に配置するものであり, 本報では「直列型差動ネジ機構」と称することとする。本論文では, 差動ネジ機構の非駆動節間の対偶を記号M (Mate: 合致) として表現することとし, 直列型 (Serial), 並列型 (Parallel) に対してそれぞれSおよびPの添え字を用いることとする。直列型における非駆動節どうしの結合や, 後述する並列型における非駆動節間の同期回転などの機構学において対偶記号が定義されていない拘束に対しても, 後述する運動学的拘束条件式を用いてこれらの対偶関係を表現して機構の総合に組込むことを可能としたことが, 本研究の特徴の一つである。なお, 本論文の対偶Mは, 「相対変位がゼロで相対角度が同期する対偶」を総称したものであり, その詳細は4.1.3項で述べる。

Fig. 1 Typical mechanisms of the conventional 2-dof differential screw mechanisms. (a), (b) and (c) represent the serial type of nut-rotational drive, the serial type of nut-translational drive, and the parallel type of screw-rotational drive, respectively. The translational and rotational motions are generated at the output link.

また, 図1(a)のらせんネジの一方をスプラインに置き換えた直列型差動ネジ機構 (井上, 2003) を組込んだガントリ型ロボット (Forgó, 2010) や, 図1(b)のらせんネジの一方をベアリングに置き換えた直列型差動ネジ機構を可動部に組込んだ平行ロボット (Krut et al., 2007) なども提案されている。スプラインをリードが無大, ベアリングをリードがゼロのネジ対偶と見なすことで, これらの機構も差動ネジ機構に属すると考えられる。

さらに別の構成として, 図1(c)に示すように, 2組のネジ機構を並列に配置し, 2個のナットの相対直進運動を拘束すると共に2個のナット間の回転運動をベルトや歯車などで同期させたものを出力節とし, 2個のネジの回転を原動節とする差動ネジ機構が提案されている (Eskandary and Angeles, 2018)。本報では, これらを「並列型差動ネジ機構」と称することとする。関連して, らせんネジとスプラインを並列配置した機構に対して, 2個のナットの回転を原動節として相対直進運動を拘束したネジ組を出力節とする並列型差動ネジ機構 (Forgó and Tolvaly-Rosça, 2015) や, 1個のネジと1個のナットの回転を原動節として相対直進運動を拘束したナットとネジ組を出力節とす

る並列型差動ネジ機構を用いたロボット (Shariatee et al., 2014) が提案されている。

以上のように、これまでに数多くの形式の差動ネジ機構が提案されてきたが、従来の研究は個々に提案されたの差動ネジ機構の力学解析を個別に扱うものであった。本研究では、マルチボディ運動学解析に基づく機構の総合手法を提案し、差動ネジ機構を俯瞰する機構の総合を行う。

3. マルチボディ運動学に基づく2自由度差動ネジ機構の形式と数の総合

3.1 2自由度差動ネジ機構の形式

2自由度差動ネジ機構に関して、本論文で用いる用語と共に機構の形式を以下に定義する。

- 2自由度差動ネジ機構は、2組のネジ機構を組合せて、2つの回転入力あるいは2つの直進入力を出力節の回転・直進運動に変換する機構である。
- ネジ機構は、雄ねじ部であるネジ、雌ネジ部であるナット、およびネジ対偶で構成される。雄ねじ部および雌ネジ部は剛体機素の節であり、それぞれをネジ節およびナット節と称し、機構の運動を説明する場合には、駆動する節を駆動節、駆動しない節を非駆動節と称する。
- ネジ・ナット間の対偶として、図2(b)に示すリードがゼロでない有限長 l_e であるらせんネジ(らせんネジ対偶)に加えて、図2(a)に示すベアリング(回転対偶)と図2(c)に示すスプライン(直進対偶)とをそれぞれリードが0、およびリードが無限大である広義のネジ対偶として使用する。
- 本論文では、全節が同一方向(z 方向)に直進し、同一軸まわり(z 軸まわり)に回転する平行軸機構に限定する。
- 2自由度差動ネジ機構は2段のネジ機構と見なすことができる。各段のネジ機構や節を、ネジ機構1、ナット節1、駆動節1のように段番号を添えて指し示す。
- 差動ネジ駆動機構は、第1段の駆動節1と第2段の駆動節2を入力節とし、第1段の非駆動節1を中間節としてそれに対偶した第2段の非駆動節を出力節とする機構である。すなわち、ネジ機構1に対してネジ機構2が連鎖した機構であり、段番号は連鎖の順番を示す意味のある番号である。
- 入力部は2個の回転駆入力あるいは2個の直進駆入力とし、1個の回転駆動と1個の直進駆動を組合せた方式は対象としない。これは、2自由度差動ネジ機構の出力が回転・直進を実現するものであり、1個の回転駆動と1個の直進駆動入力の場合では、実質的な入出力間の運動変換が行なわれないためである。入力部の駆動方法を「駆動方式」と呼ぶことにし、本論文では、2個の回転駆動入力を用いる駆動方式、および2個の直進駆動入力を用いる駆動方式の2種類の駆動方式の差動ネジ機構を構造の総合の対象とする。

Fig. 2 Three options of helical pairs. In addition to (b) the helical screw pair of lead= l_e , (a) the rotational pair (bearing) and (c) the sliding pair (spline) are considered as options of the helical pair of lead=0 and lead= ∞ , respectively.

3.2 数の総合

選択された形式の機構に対して、それらの節の数と対偶の数を決定することが数の総合 (number synthesis) であり、機構学では Grübler 方程式により機構を拘束する対偶の数が決定される。マルチボディ運動学では、一般化座標を設定して拘束条件の数を決定することに相当すると考える。比較として、Grübler 方程式に基づいた差動ネジ機構の数の総合に関して述べた後に、マルチボディ運動学を用いた数の総合を行う。

3.2.1 Grübler 方程式に基づく数の総合

運動空間の次元を d としたときに、節の数 N 、対偶の数 K 、 i 番目の対偶の自由度が f_i である機構の自由度 F を式 (1) の Grübler 方程式を用いて計算する。

$$F = d(N - 1) - \sum_{i=1}^K (d - f_i) \quad (1)$$

最初に、差動ネジ機構を空間運動機構 ($d = 6$) として自由度を計算する。まず、図 3(a) に示す、2 組のネジ機構においてネジの非駆動節間を対偶させない機構の自由度を考える。この機構は、固定節を含む節の数 $N = 5$ であり、2 個の能動回転対偶 R と 2 個の受動らせんネジ対偶 H で構成される機構である。回転対偶とらせんネジ対偶の自由度は 1 であり、これらをまとめると、5 節を 4 個の 1 自由度対偶により拘束した機構となり、その自由度 F_0 は、

$$F_0 = 6(5 - 1) - (5 + 5 + 5 + 5) = 4 \quad (2)$$

となる。次に、図 3(b) のように、2 個のネジ節の一端どうしを直結した直列型差動ネジ機構の自由度を計算する。

Fig. 3 Pairs between the non-driven links of the differential screw mechanisms. Two independent screw mechanisms (a) are mated by the pair M_S for the serial type differential screw (b), and mated by the pair M_P for the parallel type (c).

ネジ節間は完全に固定されているので、ネジ節間の対偶 M_S の自由度は 0 (6 自由度を拘束) となり、この機構の自由度 F_S は、

$$F_S = 6(5 - 1) - ((5 + 5 + 5 + 5) + 6) = -2 \quad (3)$$

であり、過拘束である。また、図 3(c) のように、2 個のネジ節の相対変位を固定し、歯車などでネジ節間の 1 軸周りの回転を同期させた並列型差動ネジ機構では、ネジ節間の対偶 M_P の自由度は 1 (5 自由度を拘束) となり、この機構の自由度 F_P は、

$$F_P = 6(5 - 1) - ((5 + 5 + 5 + 5) + 5) = -1 \quad (4)$$

であり、これも過拘束となる。式 (3) (4) の過拘束機構を動作させるためには、全ての節の直進方向と回転軸方向が一致する適合条件を満たす必要がある。

なお、機構を過拘束としないためには、非駆動節である 2 個のネジ節間の対偶 M_S および M_P の自由度を 4 (2 自由度を拘束) とする必要がある、この時、差動ネジ機構の自由度は、

$$F_S = 6(5 - 1) - ((5 + 5 + 5 + 5) + 2) = 2 \quad (5)$$

となる。例えば、図 3(b) の場合では、ネジ節間を完全固定するのではなく、 z 方向の相対位置と相対角度の 2 自由度を拘束し、 xy 方向の相対変位と相対角度をフリーとする軸継ぎ手 (対偶) を用いる必要がある。

適合条件や特殊な対偶を考慮すると機構の総合が煩雑になるために、全ての節の直進方向と回転軸方向が一致する適合条件を満たす前提条件のもとで、図 3 に示す座標系において、各節は対偶による拘束が無い場合に z 方

向の直進および z 軸周りの回転を行うことができることから、差動ネジ機構の運動空間の次元を $d=2$ として機構の総合を行う。過拘束を避けたり、適合条件を排除するために機構の運動空間の次元を小さくする方法は特殊ではなく、例えば、4節平行リンク機構では運動空間を平面($d=3$)として自由度の計算を行っている。空間運動の次元を $d=2$ としたとき、図3(b)(c)の差動ネジ機構は、ネジ節間の対偶 M_S および M_P の自由度を0(2自由度を拘束)とする必要があり、これにより差動ネジ機構の自由度は2となる。

$$F = 2(N-1) - \sum_{i=1}^K (2-f_i) = 2(5-1) - ((1+1+1+1)+2) = 2 \quad (6)$$

非駆動節であるネジ節間の対偶 M_S および M_P の自由度が0とは、ネジ節どうしを完全に固定する場合のみに該当するわけではなく、ネジ節1の変位 z_{s1} と角度 γ_{s1} 、および、ネジ節2の変位 z_{s2} と角度 γ_{s2} の4変数のうち、2個の変数を従属とすること、すなわち、2自由度を拘束することであることを意味することに注意する。

図3(b)の直列型差動ネジ機構では、対偶 M_S はネジ節どうしを完全固定、すなわち、相対変位と相対角度をゼロとする2自由度を拘束する対偶であり、次の2個の拘束条件式で拘束状態が表現できる。

$$z_{s1} - z_{s2} = 0 \quad (7a)$$

$$\gamma_{s1} - \gamma_{s2} = 0 \quad (7b)$$

また、図3(c)の並列型差動ネジ機構の対偶 M_P は、ネジ節どうしの相対変位を固定し($z_{s1} - z_{s2} = 0$)、相対回転を同期比 k で同期させる対偶であり、次の2個の拘束条件式で拘束状態が表現できる。

$$z_{s1} - z_{s2} = 0 \quad (8a)$$

$$\gamma_{s1} - k\gamma_{s2} = 0 \quad (8b)$$

非駆動節間の対偶の拘束条件は、本論文4.1.3項において詳細を議論する。

3.2.2 マルチボディ運動学に基づく数の総合

マルチボディ運動学に基づく数の総合は、機構の節の運動を定義する一般化座標の数と、節間の相対運動を拘束する対偶に関する拘束条件式の数を決する。ここでも、過拘束を避けるために空間運動の次元を $d=2$ とする。マルチボディ運動学では、空間運動の次元 $d=2$ は各節(ボディ)の一般化座標の数に該当し、すなわち各節にそれぞれ2個の一般化座標を与える。 $i(i=1,2)$ 番目ネジ機構のナット節の変位と角度を z_{ni} および γ_{ni} 、ネジ節の変位と角度を z_{si} および γ_{si} と定義する。差動ネジ機構全体の節の運動は、4(節数) $\times$ 2(各節の一般化座標の数) $=8$ 個の一般化座標を用いて表現され、それらを式(9)に示すベクトル形式に集約する。

$$\mathbf{q} = [z_{n1}, \gamma_{n1}, z_{n2}, \gamma_{n2}, z_{s1}, \gamma_{s1}, z_{s2}, \gamma_{s2}]^T \quad (9)$$

マルチボディ運動学では、一般化座標の次数 N と等しい独立な拘束条件式を与えて機構の運動学を定式化する。拘束条件式は、節間の一般化座標に拘束を与える幾何拘束条件式と、駆動節の運動を規定する駆動拘束条件式に大別される(田島, 2006)(岩村, 2018)。

節間の一般化座標に拘束を与える幾何拘束条件式は、一般化座標の関数として

$$C_i^K(\mathbf{q}) = 0, (i = 1, \dots, N_K) \quad (10)$$

と与えられる。 N_K は独立な幾何拘束条件の数である。例えば、図3(b)の直列型差動ネジ機構における式(7)の $z_{s1} - z_{s2} = 0, \gamma_{s1} - \gamma_{s2} = 0$ などが具体的な幾何拘束条件式に該当する。

駆動節の運動を規定する駆動拘束条件式は、一般化座標 $\mathbf{q}$ および時間 t の関数として、

$$C_j^D(\mathbf{q}, t) = 0, (j = 1, \dots, N_D) \quad (11)$$

と与えられる。 N_D は独立な駆動拘束条件の数である。例えば、図3に示すナットを回転駆動する差動ネジ機構の

場合では、ナット回転駆動を時間の関数 $f_i(t)$ として定義し、 $\gamma_{n1} - f_1(t) = 0, \gamma_{n2} - f_2(t) = 0$ が具体的な駆動拘束条件式となる。

マルチボディ運動学に基づく機構の総合では、独立な拘束条件の総数 $N_K + N_D$ が、一般化座標の次数 N と等しくなるように数の総合を行う。2つの駆動軸により駆動される2自由度差動ネジ機構の場合では、一般化座標の次数 $N = 8$ 、独立な駆動拘束条件の数 $N_D = 2$ であるので、独立な幾何拘束条件数を $N_K = 6$ 個与える必要がある。

4. マルチボディ運動学に基づく構造の総合

数の総合で得た拘束条件の数を満たす独立な拘束条件を与えて、2自由度差動ネジ機構の具体的な構造を明らかにする。2自由度差動ネジ機構では、図3(b)(c)に示す直列型および並列型機構に対して、

- 2個の広義の受動ネジ対偶の運動を拘束する2個の幾何拘束条件式
- 2個の回転駆動 (**R**) または直進駆動 (**P**) を定義する2個の駆動拘束条件式
- 2個の駆動軸を固定節に接続する2個の幾何拘束条件式
- ネジ機構の非駆動節間の対偶 (M_S, M_P) を表現する2個の幾何拘束条件式

の合計8個の拘束条件式を具体的に与えて、構造の総合を行う。

4.1 拘束条件式の定義

4.1.1 受動ネジ対偶の幾何拘束条件式 (C_1^K, C_2^K)

ナット節の直進 (z_n)・回転 (γ_n)、およびネジ節の直進 (z_s)・回転 (γ_s) を一般化座標とし、リードが l のネジで対偶したネジ機構のネジ部の幾何拘束条件式は、

$$z_n - z_s - l(\gamma_n - \gamma_s) = 0 \quad (12)$$

と与えられる。これまでのマルチボディダイナミクスの専門書や論文では、一般的に利用される回転対偶、直進対偶に関する幾何拘束条件式が紹介されている。しかし、筆者が調べたところではネジ対偶の幾何拘束条件を扱った事例はなく、式(12)は本研究において新たに導出したものである。有限のリード l_e を有する通常のらせんネジに加え、ベアリングとスプラインもそれぞれリードがゼロ、およびリードが無限大である広義のネジ対偶として式(12)に含むことができることも特徴の一つである。便宜上、有限のリード l_e に関しては、右ねじれのリードを正の値、左ネジのリードを負の値とする。

2自由度差動ネジ機構の2個の受動ネジ対偶の幾何拘束条件式は

$$C_1^K = z_{n1} - z_{s1} - l_1(\gamma_{n1} - \gamma_{s1}) = 0 \quad (13)$$

$$C_2^K = z_{n2} - z_{s2} - l_2(\gamma_{n2} - \gamma_{s2}) = 0 \quad (14)$$

となる。

4.1.2 駆動節の駆動拘束条件式 (C_1^D, C_2^D) と幾何拘束条件式 (C_3^K, C_4^K)

図1に例を示すように、本研究で対象とする差動ネジ機構のでは、2個の駆動方式に対して、

- 2個の回転駆動入力駆動方式を用いる差動ネジ機構
 - 入力節：ナット節1とナット節2（回転駆動）。出力節：ネジ節2（回転・直進）（図1(a)）
 - 入力節：ナット節1とネジ節2（回転駆動）。出力節：ナット節2（回転・直進）
 - 入力節：ネジ節1とナット節2（回転駆動）。出力節：ネジ節2（回転・直進）
 - 入力節：ネジ節1とネジ節2（回転駆動）。出力節：ナット節2（回転・直進）（図1(c)）
- 2個の直進駆動入力駆動方式を用いる差動ネジ機構
 - 入力節：ナット節1とナット節2（直進駆動）。出力節：ネジ節2（回転・直進）（図1(b)）
 - 入力節：ナット節1とネジ節2（直進駆動）。出力節：ナット節2（回転・直進）
 - 入力節：ネジ節1とナット節2（直進駆動）。出力節：ネジ節2（回転・直進）
 - 入力節：ネジ節1とネジ節2（直進駆動）。出力節：ナット節2（回転・直進）

のように、各 4 通りの入出力節の組合せが存在する。

一例として、図 1(a) に示すナット節 1 とナット節 2 を入力節として回転駆動し、ネジ節 2 を出力節とする差動ネジ機構では、入力節（駆動節）に対して、駆動拘束条件式

$$C_1^D = \gamma_{n1} - f_1(t) = 0 \quad (15)$$

$$C_2^D = \gamma_{n2} - f_2(t) = 0 \quad (16)$$

および、駆動するナット節を固定節に接続する（ナット節が直進しない）幾何拘束条件式

$$C_3^K = z_{n1} = 0 \quad (17)$$

$$C_4^K = z_{n2} = 0 \quad (18)$$

にて拘束条件を与える。 $f_i(t)$ は駆動節の運動を規定する時間 t の関数である。

上記で例とした 2 個のナット節を回転駆動する構造を含めて、2 個の回転駆動を用いる 4 通りの入出力節の組合せに対する駆動拘束条件式 (C_1^D, C_2^D) と幾何拘束条件式 (C_3^K, C_4^K)、および、2 個の直進駆動を用いる 4 通りの入出力節の組合せに対する駆動拘束条件式と幾何拘束条件式を、それぞれ表 1 および表 2 に整理する。

4.1.3 非駆動節間の対偶を表現する幾何拘束条件式 (C_5^K, C_6^K)

構造の総合が煩雑ではなく、かつ、具体的な機構設計が複雑とならないために、本研究では並列型差動ネジ機構として図 3(c) に示すように、2 個の非駆動節の相対変位がゼロとなり、かつ 2 個の非駆動節の相対回転が同期する対偶を用いる機構グループを対象とする。図 3(b) に示す直列型に関しても非駆動節の相対変位がゼロであり、また、非駆動節の相対回転は同期（回転が一致）しており、構造上は同じ機構グループに属すると見なすことができる。2 章で引用したこれまでに提案されてきた直列型および並列型差動ネジ機構も全てこの機構グループ属する。ナット回転駆動の場合、非駆動節の相対変位がゼロとなる幾何拘束条件式は、直列型の対偶 M_S の式 (7a)、並列型の対偶 M_P の式 (8a) に共通して示されるように、 $z_{s1} - z_{s2} = 0$ となる。また、式 (7b) と式 (8b) は、非駆動節の回転が同期する拘束条件を示しており、構造の総合ではこれら拘束条件式をさらに一般化して、 $k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{s2} = 0$ と与えることとする。以降は、「相対変位がゼロで相対角度が同期する対偶」を対偶記号 M で表現することとし、ナット駆動（ネジ節が非駆動軸）の場合、対偶 M の一般化した幾何拘束条件式は、

$$C_5^K = z_{s1} - z_{s2} = 0 \quad (19)$$

$$C_6^K = k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{s2} = 0 \quad (k_1 \neq 0 \text{ or } k_2 \neq 0) \quad (20)$$

となる。 k_1 と k_2 は 2 個の非駆動節相対角度の同期比を定義する定数であり、 $k_1 = 0$ かつ $k_2 = 0$ の場合は、拘束条件式 (20) が定義されなくなるために、どちらか一方はゼロでないように与える必要がある。

幾何拘束条件式 (19) (20) により与えられる対偶 M の具体的な機構を図 4 に示す。図中、対偶 M に該当する機構部分を一点鎖線で表示している。

$k_1 \neq 0$ かつ $k_2 \neq 0$ の場合、式 (20) は、 $\gamma_{s2} = (k_1/k_2)\gamma_{s1} = k\gamma_{s1}$ となり、ネジ節 2 はネジ節 1 に対して同期比 $k = (k_1/k_2)$ にて同期回転するように拘束されることに該当する。「相対変位がゼロかつ相対角度が同期する対偶」 M は、図 4(a1) に示すようなころがり対偶（あるいは歯車）と見なすことができる。 k_1 と k_2 が同符号のとき、1 段の歯車を用いた図 4(a1) のように非駆動節（ネジ節）は、 z 方向の相対変位がゼロかつ逆方向に同期回転する。 k_1 と k_2 が異符号のとき、1 つの中間歯車を介在した図 4(a2) のように非駆動軸は、 z 方向の相対変位がゼロかつ同方向に同期回転する。また、 $k_1 = k_2$ とすると式 (20) より $\gamma_{s1} = \gamma_{s2}$ となり、図 4(a3) に示す非駆動節間を直結した直列型差動ネジ機構の対偶を表現することができる。2 章で引用した文献 (Eskandary and Angeles, 2018) にて提案された並列型差動ネジ機構は、図 4(a1) タイプの対偶を使用し、文献 (Harada, 2020) (Lee and Lee, 2010) (Lee and Lee, 2010) (Forgó, 2010) (Krut et al., 2007) などで提案された直列型差動ネジ機構は、図 4(a3) タイプの対偶を使用している。

$k_1 \neq 0$ かつ $k_2 = 0$ の場合、対偶 M の相対回転に関する拘束条件式 (20) は $\gamma_{s1} = 0$ となる。これはネジ節 1 の回転が拘束され、かつ、ネジ節 2 の回転はフリーであることを意味し、図 4(b) に示すようにネジ節 2 を回転対偶、ネジ節 1 を完全固定し、相対変位をゼロとした機構に該当する。文献 (Forgó and Tolvaly-Rosça, 2015) や (Shariatee et al., 2014) にて提案された並列型差動ネジ機構は、図 4(b) タイプの対偶を使用している。なお、この場合はネジ

Fig. 4 Schematic images of the groups of pair M between the non-driven links of the differential screw mechanisms in accordance with the parameter k_1 and k_2 in the kinematic constraint equation of $C_6^K = 0$. The pair (a), (b) and (c) correspond to $(k_1 \neq 0, k_2 \neq 0)$, $(k_1 \neq 0, k_2 = 0)$ and $(k_1 = 0, k_2 \neq 0)$ respectively. The pair M of the serial type differential screw (a3) is regarded as the group (a).

節 1 (回転固定) とネジ節 2 (回転フリー) は「同期回転」を行っていないが, この場合も本論文ではネジ節 1 に対してネジ節 2 が無限大の同期比で回転していると広義に解釈し, 「同期」という表現を用いることとする。

$k_1 = 0$ かつ $k_2 \neq 0$ の場合, 対偶 M の相対回転に関する拘束条件式 (20) は $\gamma_{s2} = 0$ となる。これはネジ節 2 の回転が拘束され, かつ, ネジ節 1 の回転はフリーであることを意味し, 図 4(c) に示すようにネジ節 1 を回転対偶, ネジ節 2 を完全固定し, 相対変位をゼロとした機構に該当する。

機構学における構造の総合では, 数の総合で得られた節と対偶に関する数の条件を満たす具体的な対偶の種類と配置の順序や連鎖を明らかにするものである。差動ネジ機構の非駆動節間の 2 自由度を拘束する対偶 M に関しては, 従来の機構学では, 低次対偶の組合せなどの機構学的な知識を用いて数の条件を満たす具体的な対偶を見つけ出すことになると考えられる。マルチボディ運動学に基づく構造の総合では, 対偶 M の幾何拘束条件式の k_1 と k_2 に関する条件式を満たす具体的な対偶の種類を類推し, 図 4 に示す具体的な対偶の種類を網羅することができるのが手法の特徴の一つであると言える。

以上で導出してきた回転駆動および直進駆動する 2 自由度差動ネジ機構の駆動拘束条件式と幾何拘束条件式を, それぞれ表 1 および表 2 に整理した。表 1 は回転駆動入力駆動方式に対して 4 通りの入出力節の組合せに関する拘束条件式を整理し, 表 2 は直動駆動入力駆動方式に対して 4 通りの入出力節の組合せに関する拘束条件式を整理している。

Table 1 The kinematic and driving constraints of the rotational driven differential screw mechanism.

input links (RR)		nut 1, nut 2	nut 1, screw 2,	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)		screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
kinematic constraints	C_1^K	$z_{n1} - z_{s1} - l_1(\gamma_{n1} - \gamma_{s1}) = 0$			
	C_2^K	$z_{n2} - z_{s2} - l_2(\gamma_{n2} - \gamma_{s2}) = 0$			
	C_3^K	$z_{n1} = 0$	$z_{n1} = 0$	$z_{s1} = 0$	$z_{s1} = 0$
	C_4^K	$z_{n2} = 0$	$z_{s2} = 0$	$z_{n2} = 0$	$z_{s2} = 0$
	C_5^K	$z_{s1} - z_{s2} = 0$	$z_{s1} - z_{n2} = 0$	$z_{n1} - z_{s2} = 0$	$z_{n1} - z_{n2} = 0$
	C_6^K	$k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{s2} = 0$	$k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{n2} = 0$	$k_1\gamma_{n1} - k_2\gamma_{s2} = 0$	$k_1\gamma_{n1} - k_2\gamma_{n2} = 0$
driving constraints	C_1^D	$\gamma_{n1} - f_1(t) = 0$	$\gamma_{n1} - f_1(t) = 0$	$\gamma_{s1} - f_1(t) = 0$	$\gamma_{s1} - f_1(t) = 0$
	C_2^D	$\gamma_{n2} - f_2(t) = 0$	$\gamma_{s2} - f_2(t) = 0$	$\gamma_{n2} - f_2(t) = 0$	$\gamma_{s2} - f_2(t) = 0$

Table 2 The kinematic and driving constraints of the translational driven differential screw mechanism.

input links (PP)		nut 1, nut 2	nut 1, screw 2,	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)		screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
kinematic constraints	C_1^K	$z_{n1} - z_{s1} - l_1(\gamma_{n1} - \gamma_{s1}) = 0$			
	C_2^K	$z_{n2} - z_{s2} - l_2(\gamma_{n2} - \gamma_{s2}) = 0$			
	C_3^K	$\gamma_{n1} = 0$	$\gamma_{n1} = 0$	$\gamma_{s1} = 0$	$\gamma_{s1} = 0$
	C_4^K	$\gamma_{n2} = 0$	$\gamma_{s2} = 0$	$\gamma_{n2} = 0$	$\gamma_{s2} = 0$
	C_5^K	$z_{s1} - z_{s2} = 0$	$z_{s1} - z_{n2} = 0$	$z_{n1} - z_{s2} = 0$	$z_{n1} - z_{n2} = 0$
	C_6^K	$k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{s2} = 0$	$k_1\gamma_{s1} - k_2\gamma_{n2} = 0$	$k_1\gamma_{n1} - k_2\gamma_{s2} = 0$	$k_1\gamma_{n1} - k_2\gamma_{n2} = 0$
driving constraints	C_1^D	$z_{n1} - f_1(t) = 0$	$z_{n1} - f_1(t) = 0$	$z_{s1} - f_1(t) = 0$	$z_{s1} - f_1(t) = 0$
	C_2^D	$z_{n2} - f_2(t) = 0$	$z_{s2} - f_2(t) = 0$	$z_{n2} - f_2(t) = 0$	$z_{s2} - f_2(t) = 0$

4.2 構造の総合の方法

4.2.1 差動ネジ機構の構造の候補

表 1 に整理した 4 通りの回転駆動・並列型差動ネジ機構, および表 2 に整理した 4 通りの直進駆動・並列型差動ネジ機構に対して, 幾何拘束条件式をさらに細分化して機構として成立する構造の候補を網羅する.

幾何拘束条件式 C_1^K, C_2^K におけるネジ対偶 i のリード l_i に関しては, 図 2 に示す (a) $l_i = 0$, (b) $l_i = l_{ie}$ (有限長), (c) $l_i = \infty$ を異なる 3 種類の対偶とし, 幾何拘束条件式 C_6^K における非駆動節間の対偶 M の相対角度の同期係数 k_1, k_2 に関しては, 図 4 に示す (a) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, (b) $k_1 \neq 0, k_2 = 0$, (c) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ を異なる 3 種類の対偶として扱う. これにより, 表 1 に示す回転駆動入力 4 通りの並列型差動ネジ駆動機構に対しては, さらにネジ対偶 1 およびネジ対偶 2 がそれぞれ (3 通り $\times$ 3 通り), 非駆動節の対偶が 3 通り, 合計 $4 \times (3 \times 3) \times 3 = 108$ 通りの回転駆動・並列型差動ネジ機構の構造に細分化される. 同じ組合せを表 2 に適用し, $4 \times (3 \times 3) \times 3 = 108$ 通りの直進駆動・並列型差動ネジ機構の構造に細分化される. 回転駆動, 直進駆動を合計すると, $108 + 108 = 216$ 通りの並列型差動ネジ機構の構造に細分化される. ただし, これら 216 通りの組合せは, 並列型差動ネジ機構の構造の候補として組み合わされたものであり, 全てが差動ネジ機構として機能するものではなく, 次項以降に機構として機能する構造を抽出する. 差動ネジ機構の各要素である, ネジ対偶 (screw pairs : 3 通り $\times$ 3 通り), 非駆動節対偶 M (pair M : 3 通り), 入出力節の組合せ (input link and output link : 4 通り), および駆動方式 (driving methods : 2 通り) の模式図を図 5 にまとめる. 図に示した各要素の模式図を組合せて, 次項以降の差動ネジ駆動機構の構造を模式表現する.

直列型差動ネジ機構は非駆動節間の対偶 M の相対角度の同期係数 k_1, k_2 は (a) $k_1 = k_2$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$) と設定した構造となり, 表 1 に示す 4 通りの組合せに対して, ネジ対偶 1 およびネジ対偶 2 が (3 通り $\times$ 3 通り) ((a) $l_i = 0$, (b) $l_i = l_{ie}$ (有限長), (c) $l_i = \infty$), 非駆動節の対偶 M が 1 通り ((a) $k_1 = k_2$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$))), 計 $4 \times (3 \times 3) \times 1 = 36$ 通りの回転駆動・直列型差動ネジ機構の構造に細分化され, 同じ組合せを表 2 に適用し, $4 \times (3 \times 3) \times 1 = 36$ 通りの直進駆動・直列型差動ネジ機構の構造に細分化される. 回転駆動, 直進駆動を合計すると, $36 + 36 = 72$ 通りの直列型差動ネジ機構の構造の候補を得る.

Fig. 5 Schematic images of the combinations of the parallel type differential screw mechanisms. $(3 \times 3: \text{screw pairs}) \times (3: \text{pairs M}) \times (4: \text{combination of the input and output link}) \times (2: \text{driving methods}) = 216$ combinations are candidates of the differential parallel type screw mechanisms.

4.2.2 ヤコビ行列と等価機構および構造定数の定義

前項で得た 216 通りの並列型差動ネジ機構の構造の候補と, 72 通りの直列型差動ネジ機構の構造の候補に対して, 入力節の速度と出力節の速度の関係性を規定するヤコビ行列が正則な機構を機能する差動ネジ機構の構造として抽出する.

表 1 および表 2 に示す 6 個の幾何拘束条件式 $C_i^K = 0$ と 2 個の駆動拘束条件式 $C_j^K = 0$ をベクトル形式にまとめる.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} C_1^K(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ C_6^K(\mathbf{q}) \\ C_1^D(\mathbf{q}, t) \\ C_2^D(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (21)$$

次に式 (21) を時間で微分する.

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0} \quad (22)$$

$\mathbf{C}_q$ は拘束条件ベクトル $\mathbf{C}$ を一般化座標ベクトル $\mathbf{q}$ で偏微分した行列である.

式 (22) に関して, 具体的に表 1 第 1 列目のナット節 1 とナット節 2 を回転駆動する差動ネジ機構の拘束条件

式を代入すると,

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -l_1 & -1 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -l_2 & -1 & l_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_{n1} \\ \dot{\gamma}_{n1} \\ \dot{z}_{n2} \\ \dot{\gamma}_{n2} \\ \dot{z}_{s1} \\ \dot{\gamma}_{s1} \\ \dot{z}_{s2} \\ \dot{\gamma}_{s2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dot{f}_1(t) \\ -\dot{f}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (23)$$

を得る. これを, 一般化速度 $\dot{\mathbf{q}}$ に関して解くと,

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n1} &= \dot{z}_{n2} = 0 \\ \dot{z}_{s1} &= \dot{z}_{s2} = \frac{l_1 l_2 (k_1 \dot{f}_1(t) - k_2 \dot{f}_2(t))}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \\ \dot{\gamma}_{n1} &= \dot{f}_1(t) \\ \dot{\gamma}_{n2} &= \dot{f}_2(t) \\ \dot{\gamma}_{s1} &= \frac{k_2 (l_1 \dot{f}_1(t) - l_2 \dot{f}_2(t))}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \\ \dot{\gamma}_{s2} &= \frac{k_1 (l_1 \dot{f}_1(t) - l_2 \dot{f}_2(t))}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \end{aligned} \quad (24)$$

が導かれる. マルチボディ機構解析では, 入力節の一般化速度に対する出力節であるネジ節 2 の速度 ($\dot{z}_{s2}$)・角速度 ($\dot{\gamma}_{s2}$) の関係だけでなく, 入力に対する全節の一般化速度が導かれることも特徴の一つである. 式 (24) より, 2 つの駆動節の一般化速度 ($\dot{\gamma}_{n1} = \dot{f}_1(t)$, $\dot{\gamma}_{n2} = \dot{f}_2(t)$) と出力節の一般化速度 ($\dot{z}_{s2}$, $\dot{\gamma}_{s2}$) との関係は以下となる.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{s2} \\ \dot{\gamma}_{s2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{RR} \begin{bmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{RR} = \frac{1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \begin{bmatrix} k_1 l_1 l_2 & -k_2 l_1 l_2 \\ k_1 l_1 & -k_1 l_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

式 (25) の $\mathbf{J}_{RR}$ がナット節 1 とナット節 2 を回転駆動節とし, ネジ節 2 を出力節とする並列型差動ネジ機構のヤコビ行列である. ヤコビ行列 $\mathbf{J}_{RR}$ の行列式は,

$$\det \mathbf{J}_{RR} = \frac{k_1 l_1 l_2}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \quad (26)$$

となる. 同様の計算を表 1 の残りの 3 通りの入出力節の組合せに対して行ったところ, 全てのヤコビ行列が式 (25) の $\mathbf{J}_{RR}$ と同じとなった. 入出力関係を規定するヤコビ行列に着目すると, 表 1 の 4 通りの入出力節の組合せの回転駆動・並列型差動ネジ機構は等価な機構となる. その結果, 図 5 に示すネジ対偶 ($3 \times 3 = 9$ 通り), 非駆動節間の対偶 $\mathbf{M}$ (3 通り), 入出力節の組合せ (4 通り) からなる ($9 \times 3 \times 4 = 108$) 通りの回転駆動・並列型差動ネジ機構は, 4 通りの入出力節の組合せを一つに集約した, ($108/4 = 27$) 通りの構造に集約される. ヤコビ行列の正則性の評価は 108 通りの構造の候補に対してすべて行うのではなく, 集約した 27 通りの機構に対して行えば良いように簡略化される. 本論文では, ヤコビ行列が正則となる, すなわち, その行列式がゼロまたは無限大とならない場合に機構として機能する構造であるとする.

ここで, 式 (25) のヤコビ行列および式 (26) の行列式は機構定数 k_1, k_2, l_1, l_2 の関数である. 一般的に機構定数の値に関する機構の総合は「量の総合」に分類される. 本論文では, 例えば機構定数 l_i (ねじ対偶のリード) に対して, その量の大きさではなく, (a) $l_i = 0$ (ベアリング: 回転対偶 R), (b) $l_i = l_{ie}$ (有限長リードを有するねじ: らせんネジ対偶 H), (c) $l_i = \infty$ (スプライン: 直進対偶 P) のように量の種類を対偶の種類として識別して, 機構の構造の総合を行う. 量を意味する機構定数と区別するために, 構造の総合におけるこれらの定数を「構造定数」

と称することとする。4.2.1 項で述べたように、直列型差動ネジ機構は、構造的に並列型差動ネジ機構の構造定数を $k_1 = k_2$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$) とした機構となるために、その構造の総合は並列型差動ネジ機構の総合に含ませることとする。

同様の計算を表 2 の駆動節を直進駆動する 4 通りの並列型差動ネジ機構に対して行ったところ、それらの入出力関係を規定するヤコビ行列 $\mathbf{J}_{PP}$ は同じとなり、構造定数の関数として、

$$\mathbf{J}_{PP} = \frac{1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \begin{bmatrix} -k_1 l_2 & k_2 l_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

より与えられる。入出力関係を規定するヤコビ行列に着目すると、表 2 の 4 通りの直進駆動・並列型差動ネジ機構も等価な機構となる。入出力関係を規定するヤコビ行列に着目すると、回転駆動・並列型差動ネジ機構と同様に 27 通りの構造に集約され、直列型差動ネジ機構の構造もその一部分に含まれる。ヤコビ行列 $\mathbf{J}_{PP}$ の行列式は、

$$\det \mathbf{J}_{PP} = \frac{k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \quad (28)$$

である。以下では簡単のために、「ヤコビ行列の行列式」を「ヤコビ行列式」と略することとする。

4.3 回転駆動 差動ネジ機構の構造の総合

4.2.2 項において構造的に等価であるとして 27 通りに集約した回転駆動・並列型差動ネジ機構に関して、ヤコビ行列式 (26) がゼロまたは無限大にならずに差動ネジ機構の構造が機能する構造定数 k_1, k_2, l_1, l_2 の条件を求める。

(a) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ の場合 (非駆動節が同期回転, 図 4(a))

・ $l_1 = 0$ (ベアリング) または、 $l_2 = 0$ (ベアリング) の場合は、ヤコビ行列式 (26) の分子 $k_1 l_1 l_2$ がゼロとなり、ヤコビ行列が特異となるために機能しない構造となる。

・ $l_1 \neq 0$ かつ $l_2 \neq 0$ の条件下で、 l_1 および l_2 がゼロでない有限長 (らせんネジ) のときは、ヤコビ行列式 (26) の分母が 0 とならない、すなわち、 $k_2 l_1 - k_1 l_2 \neq 0$ の場合に機能する構造となる。

・ $l_1 \neq 0$ かつ $l_2 \neq 0$ の条件下で、 l_1 が無限大 (スプライン) のときは、ヤコビ行列式 (26) が

$$\lim_{l_1 \rightarrow \infty} \det \mathbf{J}_{RR} = \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \frac{k_1 l_2}{k_2 - k_1 \frac{l_2}{l_1}} = \frac{k_1 l_2}{k_2} \quad (29)$$

となり、 l_2 がゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に機能する構造となるが、 l_2 が無限大 (スプライン) の場合は行列式 (29) が無限大となり機能しない構造となる。

・ $l_1 \neq 0$ かつ $l_2 \neq 0$ の条件下で、 l_2 が無限大 (スプライン) のときは、ヤコビ行列式 (26) が

$$\lim_{l_2 \rightarrow \infty} \det \mathbf{J}_{RR} = \lim_{l_2 \rightarrow \infty} \frac{k_1 l_1}{k_2 \frac{l_1}{l_2} - k_1} = -l_1 \quad (30)$$

となり、 l_1 がゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に機能する構造となるが、 l_1 が無限大 (スプライン) の場合はヤコビ行列式 (30) が無限大となり機能しない構造となる。

非駆動節が回転同期する $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ の構造において、リード l_1 と l_2 の $3 \times 3 = 9$ 通りの組合せに対して、各機構が機能するか否かを表現した模式図を図 6(a) に示す。なお、図では代表としてナット節 1 およびナット節 2 を入力節とする入出力節の組合せを用いた機構に関して模式図を示している。ネジ対偶のリードの組合せ 9 通りに対して、図 6(a) の青枠で囲った 3 通りの機構が差動ネジ機構として機能することとなる。

(b) $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ の場合 (非駆動節 1 が回転固定かつ非駆動節 2 が回転フリー, 図 4(b))

Fig. 6 Possible structures of the parallel type differential screw mechanism by the rotational drive of nut 1 and nut 2. Five arrangements are derived as the operable mechanisms.

この場合は、ヤコビ行列式 (26) が,

$$\det \mathbf{J}_{RR} |_{k_2=0} = -\frac{l_1 l_2}{l_2} \quad (31)$$

となる. $l_2 = 0$ (ベアリング) の場合はヤコビ行列式 (31) の分母と分子でゼロ割となるために行列式が不定となる. また, $l_2 = \infty$ (スプライン) の場合を $l_2/l_2 \rightarrow 1$ と数学的に解釈し, l_2 がゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合を含めて, $\det \mathbf{J}_{RR} |_{k_2=0} = -l_1$ となる. このとき, l_1 がゼロでなく, かつ無限大でない有限長 (らせんネジ) である場合にヤコビ行列は正則となり, 構造として機能することとなる. 以上を整理すると, $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ の場合は, ネジ対偶 1 のリードがゼロでない有限長 (らせんネジ), かつ, ネジ対偶 2 のリードがゼロでない (らせんネジまたはスプライン) の場合に差動ネジ機構として機能することとなる. この条件を満たす構造定数を有する並列型差動ネジ機構の模式図を図 6(b) に示す. ネジ対偶のリードの組合せ 9 通りに対して, 図の青枠で囲った 2 通りが差動ネジ機構として機能することとなる.

(c) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ の場合 (非駆動節 1 が回転フリーかつ非駆動節 2 が回転固定, 図 4(c))

この場合は, ヤコビ行列式 (26) がゼロとなるために, 差動ネジ機構として機能しない.

図 6(a)(b) に示した機能する 5 通りの回転駆動・並列型差動ネジ機構を, 4 通りの入力節の組合せに展開したものを図 7 に示す. 108 通りの組合せの中から, 図 7 に示す 20 通りが機能する回転駆動・並列型差動ネジ機構として抽出された. また, 非駆動節間の対偶 M の条件を $k_1 = k_2 \neq 0$ と置き換えたものである回転駆動・直列型差動ネジ機構は, 図 8 に示す 12 通りが抽出された.

2 章で引用した回転駆動・並列型差動ネジ機構に関する文献 (Eskandary and Angeles, 2018), (Forgó and Tolvaly-Rosça, 2015) および (Shariatee et al., 2014) にて提案された回転駆動・並列型差動ネジ機構は, それぞれ図 7 の第 3 行第 1 列, 第 5 行第 1 列, および, 第 5 行第 3 列に示す機構に該当する. また, 文献 (Harada, 2020), (Harada et al., 2014), (Forgó, 2010) で提案された回転駆動・直列型差動ネジ機構は, それぞれ図 8 の第 3 行第 1 列, 第 2 行第 1 列, および, 第 3 行第 3 列に示す機構に該当する. 本論文の差動ネジ機構の構造の総合により, 従来の構造を包含し, さらに, 新しい構造を見つけ出すことができる事が示された.

4.4 直進駆動 差動ネジ機構の構造の総合

前節と同様の方法で, 27 通りに集約した直進駆動・並列型差動ネジ機構に関して, ヤコビ行列式 (28) がゼロまたは無限大にならずに差動ネジ機構の構造が機能する構造定数 k_1, k_2, l_1, l_2 の条件を求める.

input links (RR)			nut 1, nut 2	nut 1, screw 2	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)			screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
pair M	$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ synchronized	$l_1 = \infty$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = \infty$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				
	$k_1 \neq 0, k_2 = 0$ fixed and rotation	$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = \infty$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				

Fig. 7 Possible structures of the parallel type differential screw mechanism by the rotational drive. Twenty arrangements are derived as the operatable mechanisms.

input links (RR)			nut 1, nut 2	nut 1, screw 2	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)			screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
pair M	$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ synchronized	$l_1 = \infty$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = \infty$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				

Fig. 8 Possible structures of the serial type differential screw mechanism by the rotational drive. Twelve arrangements are derived as the operatable mechanisms.

(a) $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ の場合 (非駆動節が同期回転, 図 4(a))

・ヤコビ行列式 (28) は,

$$\det \mathbf{J}_{PP} = \frac{k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} = \frac{\frac{k_1}{l_1}}{k_2 - k_1 \frac{l_2}{l_1}} = \frac{\frac{k_1}{l_2}}{k_2 \frac{l_1}{l_2} - k_1} \quad (32)$$

と式変形できるので, l_1 または l_2 が無限大 (スプライン) の場合はヤコビ行列式 (32) の値がゼロとなり, ヤコビ行列が特異となるために機能しない機構となる。

・ $l_1 \neq \infty$ かつ $l_2 \neq \infty$ の下で, l_1 および l_2 がゼロでない有限長 (らせんネジ) のときは, ヤコビ行列式 (28) の分母が 0 とならない, すなわち, $k_2 l_1 - k_1 l_2 \neq 0$ の場合に機能する構造となる。

・ $l_1 \neq \infty$ かつ $l_2 \neq \infty$ の下で, $l_1 = 0$ (ベアリング) のときは,

$$\det \mathbf{J}_{PP} \big|_{l_1=0} = -\frac{1}{l_2} \quad (33)$$

より, $l_2 = 0$ (ベアリング) の場合にはヤコビ行列式 (33) がゼロ割りとなり機構が機能しない. l_2 がゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に, 機能する機構となる.

・ $l_1 \neq \infty$ かつ $l_2 \neq \infty$ の下で, $l_2 = 0$ (ベアリング) のときは,

$$\det \mathbf{J}_{PP} |_{l_2=0} = \frac{k_1}{k_2 l_1} \quad (34)$$

より, $l_1 = 0$ (ベアリング) の場合にはヤコビ行列式 (34) がゼロ割りとなり計算できない. l_1 がゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に, 機能する機構となる.

Fig. 9 Possible structures of the parallel type differential screw mechanism by the translational drive of nut 1 and nut 2. Five arrangements are derived as the operable mechanisms.

以上の条件を満たす構造定数を有する直進駆動・並列型差動ネジ機構の模式図を図 9(a) に示す. ネジ対偶のリードの組合せ 9 通りに対して, 図の青枠で囲った 3 通りが差動ネジ機構として機能する構造となる.

(b) $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ の場合 (非駆動節 1 が回転固定かつ非駆動節 2 が回転フリー, 図 4(b))

この場合は, ヤコビ行列式 (28) が,

$$\det \mathbf{J}_{PP} |_{k_2=0} = -\frac{1}{l_2} \quad (35)$$

となり, ネジ対偶 2 のリードがゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に差動ネジ機構として機能する. ただし, ネジ対偶 1 のリードが無限大 (スプライン) の場合, $\det \mathbf{J}_{PP}$ の分母の $k_2 l_1$ がゼロ $\times$ 無限大となり計算ができないために機能しない構造とする. これらを整理すると, $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ の場合は, ネジ対偶 1 のリードが 0 を含む有限長 (ベアリングまたはらせんネジ) であり, かつ, ネジ対偶 2 のリードがゼロでない有限長 (らせんネジ) の場合に差動ネジ機構として機能することとなる. この条件を満たす構造定数を有する並列型差動ネジ機構の模式図を図 9(b) に示す. ネジ対偶のリードの組合せ 9 通りに対して, 図の青枠で囲った 2 通りが差動ネジ機構として機能することとなる.

(c) $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ の場合 (非駆動節 1 が回転フリーかつ非駆動節 2 が回転固定, 図 4(c))

この場合は, ヤコビ行列式 (28) がゼロとなるために, 差動ネジ機構として成立しない.

図 9(a)(b) に示した機能する 5 通りの直進駆動・並列型差動ネジ機構を, 4 通りの入力節の組合せに展開したものを図 10 に示す. 108 通りの組合せの中から, 図 10 に示す 20 通りが機能する直進駆動・並列型差動ネジ機構と

input links (PP)			nut 1, nut 2	nut 1, screw 2	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)			screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
pair M	$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ synchronized	$l_1 = 0$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = 0$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				
	$k_1 \neq 0, k_2 = 0$ fixed and rotation	$l_1 = 0$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = 0$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				

Fig. 10 Possible structures of the parallel type differential screw mechanism by the translational drive. Twenty arrangements are derived as the operable mechanisms.

input links (PP)			nut 1, nut 2	nut 1, screw 2	screw 1, nut 2	screw 1, screw 2
output link (PR)			screw 2	nut 2	screw 2	nut 2
pair M	$k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ synchronized	$l_1 = 0$ $l_2 = l_{2e}$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = 0$				
		$l_1 = l_{1e}$ $l_2 = l_{2e}$				

Fig. 11 Possible structures of the serial type differential screw mechanism by the translational drive. Twelve arrangements are derived as the operable mechanisms.

して抽出された。また、非駆動節間の対偶 M の条件を $k_1 = k_2 \neq 0$ と置き換えたものである直進駆動・直列型差動ネジ機構は、図 11 に示す 12 通りが抽出された。2 章で引用した直進駆動・直列型差動ネジ機構に関する文献 (Lee and Lee, 2010), (Harada and Angeles, 2014) は図 11 の第 3 行第 1 列に示す機構に該当し、文献 (Krut et al., 2007) は図 11 の第 2 行第 1 列に示す機構に該当する。直進駆動においても、本論文の差動ネジ機構の構造の総合により、従来の構造を包含し、さらに、新しい構造を見つけ出すことができる事が示された。

5. 結 言

マルチボディ運動学を用いた機構の構造の総合方法を提案し、2 自由度差動ネジ機構の構造の総合を行った。マルチボディ運動学を用いた機構の構造の総合方法を以下に要約する。

- 「数の総合」における機構学の Grübler 方程式を用いた自由度計算を、マルチボディ運動学では一般化座標と拘束条件の数を決定する方法に置き換える。
- 「構造の総合」では、数の総合で得た数の独立な幾何拘束条件式および運動学的拘束条件式を用いて機構の

構造を表現する。拘束条件式の時間微分を用いて、入出力の一般化速度の関係であるヤコビ行列を導出する。新たに機構の構造に関連する構造定数を定義し、ヤコビ行列を正則とする構造定数に該当する構造を機能する機構として抽出する。

提案した手法により 2 自由度差動ネジの機構の構造の総合を行い、40 通りの並列型差動ネジ機構、および、24 通りの直列型差動ネジ機構の構造を導いた。

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 JP18K04068, JP19K04303 の助成を受けた。

文 献

- Bonev, I. A., Zlatanov, D. and Gosselin, C., Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 125, No. 574 (2003), pp. 573–581.
- Davidson, J. K. and Hunt, K. H., Robot and screw theory, Oxford University Press (2004).
- Eskandary, P. M. and Angeles, J., The translating Π -joint: design and applications, Mechanism and Machine Theory, Vol. 122 (2018) pp. 361–370.
- Forgó, Z., Mathematical modelling of 4 DOF gantry type parallel manipulator, Proceedings of the IEEE International Symposium on Robotics and ROBOTIK (2010) pp. 1206–1211.
- Forgó, Z. and Tolvaly-Rosça, F., Analytical and numerical model for low DOF manipulators, Procidia Technology, Vol. 19 (2015), pp. 40–47.
- Harada, T., Novel schönfli motion parallel robot driven by differential mechanism, International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, Vol. 9, No. 1 (2020), pp. 106–110.
- Harada, T. and Angeles, J., Kinematics and singularity analysis of CRRHRRRC parallel schönfli motion generator, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 38, No. 2 (2014), pp. 173–183.
- Harada, T. and Angeles, J., From the McGill pepper-mill carrier to the Kindai atarigi carrier, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO) (2017), pp. 1328–1333.
- Harada, T., Friedlaender, T. and Angeles, J., The Development of an innovative two-DOF cylindrical drive: design, analysis and preliminary tests, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA) (2014), pp. 6338–6344.
- 原田 孝, 牧野 達, 運動学的冗長性と駆動冗長性を有する 2 リム 6 自由度パラレルロボットの提案と閉形式運動学解の導出, 日本機械学会論文集, Vol. 84, No. 866 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00025.
- Huang, Z., Li, Q. and Ding, H., Theory of parallel mechanisms, Springer (2013).
- 井上久美夫, スプライン付きボールネジ”ロボッテ”, 日本ロボット学会誌, Vol. 21, No. 1 (2003), pp.7–9.
- 岩村 誠人, マルチボディダイナミクス入門, 森北出版 (2018).
- Kong, X. and Gosselin, C., Type synthesis of parallel mechanisms, Springer (2007).
- Krut, S., Company, O., Nabat, V. and Pierrot, F., Heli4: A parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design, Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (2007), pp. 1656–1661.
- Lee, C. C. and Lee, P. C., Isoconstrained mechanisms for fast pick-and-place manipulation, in Geometric Methods in Robotics and Mechanism Research, Lambert Academic Publishing (2010) pp. 85–99.
- Shariatee, M., Akbarzadeh, A., Mousavi, A. and Alimardani, S., Design of an economical scara robot for industrial applications, Proceedings of the Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM) (2014), pp. 534–539.
- 田島 洋, マルチボディダイナミクスの基礎, 東京電機大学出版局 (2006).
- 武田 行生, 杉本 浩一, 大岩 孝彰, 西田 雅夫, 森田 信義, 渡辺 克己, 船橋 宏明, JSME テキストシリーズ 機構学, 日本機械学会 (2007).

Zhao, J., Feng, Z., Chu, F. and Ma, N., Advanced theory of constraint and motion analysis for robot mechanisms, Elsevier (2014).

References

- Bonev, I. A., Zlatanov, D. and Gosselin, C., Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 125, No. 574 (2003), pp. 573–581.
- Davidson, J. K. and Hunt, K. H., Robot and screw theory, Oxford University Press (2004).
- Eskandary, P. M. and Angeles, J., The translating Π -joint: design and applications, Mechanism and Machine Theory, Vol. 122 (2018) pp. 361–370.
- Forgó, Z., Mathematical modelling of 4 DOF gantry type parallel manipulator, Proceedings of the IEEE International Symposium on Robotics and ROBOTIK (2010) pp. 1206–1211.
- Forgó, Z. and Tolvaly-Rosça, F., Analytical and numerical model for low DOF manipulators, Procidia Technology, Vol. 19 (2015), pp. 40–47.
- Harada, T., Novel schönflies motion parallel robot driven by differential mechanism, International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, Vol. 9, No. 1 (2020), pp. 106–110.
- Harada, T. and Angeles, J., Kinematics and singularity analysis of CRRHHRRC parallel schönflies motion generator, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 38, No. 2 (2014), pp. 173–183.
- Harada, T. and Angeles, J., From the McGill pepper-mill carrier to the Kindai atarigi carrier, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO) (2017), pp. 1328–1333.
- Harada, T., Friedlaender, T. and Angeles, J., The development of an innovative two-DOF cylindrical drive: design, analysis and preliminary tests, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA) (2014), pp. 6338–6344.
- Harada, T. and Makino, T., Closed-form solutions of the kinetostatics of a two-limbs six-dof parallel mechanism with kinematic and actuation redundancies, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol. 84, No. 866 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00025.
- Huang, Z., Li, Q. and Ding, H., Theory of parallel mechanisms, Springer (2013).
- Inoue, K., Ball screw with spline "Robotte," Journal of the Robotics Society of Japan, Vol. 21, No. 1 (2003), pp. 7–9 (in Japanese).
- Iwamura, M., Introduction to multibody dynamics, Morikita Shuppan (2018) (in Japanese).
- Kong, X. and Gosselin, C., Type synthesis of parallel mechanisms, Springer (2007).
- Krut, S., Company, O., Nabat, V. and Pierrot, F., Heli4: A parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design, Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (2007), pp. 1656–1661.
- Lee, C. C. and Lee, P. C., Isoconstrained mechanisms for fast pick-and-place manipulation, in Geometric Methods in Robotics and Mechanism Research, Lambert Academic Publishing (2010) pp. 85–99.
- Shariatee, M., Akbarzadeh, A., Mousavi, A. and Alimardani, S., Design of an economical scara robot for industrial applications, Proceedings of the Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM) (2014), pp. 534–539.
- Tajima, H., Fundamentals of multibody dynamics, Tokyo Denki University Press (2006) (in Japanese).
- Takeda, Y., Sugimoto, K., Nishida, M., Morita, N., Watanabe, K. and Funahashi, H., Kinematics of machinery, JSME Textbook Series, Japan Society of Mechanical Engineers (2007) (in Japanese).
- Zhao, J., Feng, Z., Chu, F. and Ma, N., Advanced theory of constraint and motion analysis for robot mechanisms, Elsevier (2014).