圧電 NC シャント制振における低周波側スピルオーバー現象

軸屋 一郎^{*1}, 松田 樹生^{*2}, 堀 恭明^{*2}, 高木 賢太郎^{*3}

Low-frequency spillover phenomenon in NC-piezoelectric shunt damping

Ichiro JIKUYA^{*1}, Tatsuki MATSUDA^{*2}, Yasuaki HORI^{*2} and Kentaro TAKAGI^{*3}^{*1} Faculty of Frontier Engineering, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University
Kakuma-machi, Kanazawa-shi, Ishikawa 920-1192, Japan^{*2} Division of Electrical Engineering and Computer Science, Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University
Kakuma-machi, Kanazawa-shi, Ishikawa 920-1192, Japan^{*3} Dept. Mechanical Systems Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi 464-8603, Japan

Received: 1 April 2020; Revised: 27 May 2020; Accepted: 26 January 2021

Abstract

This paper discusses a spillover phenomenon on the lower frequency side in the multimode piezoelectric NC (Negative Capacitor)-shunt damping problem. In contrast to standard spillover phenomena, this phenomenon is quite interesting because the instability is caused by neglecting lower frequency vibration modes in controller design. First, an example of spillover phenomenon on the lower frequency side is illustrated. When the NC-shunt damping problem is interpreted as the H_∞ -control problem, the combination of mechanical and electrical systems is recognized as a stable generalized plant and the admittance of the NC circuit is recognized as an unstable controller. The circuit parameters of NC-circuits are tuned for each vibration mode, and then, it is demonstrated that the closed loop system becomes unstable when the first vibration mode is neglected in parameter tuning. Then, the graphical instability analyses are carried out by investigating the Bode and Nyquist diagrams. According to the Nyquist stability criterion, the closed loop system between the stable generalized plant and the unstable controller becomes stable if and only if the Nyquist diagram encircles $-1 + j0$ once in the counter-clockwise direction on the complex plane. In the example of unstable closed loop system, it is confirmed that the Nyquist diagram encircles $-1 + j0$ once in the clockwise direction and that both gain and phase intersections occur at the anti-resonance frequency in the Bode diagram. Finally, the approximate instability analysis is carried out to prove that the instability is caused by simultaneous gain and phase intersections at the anti-resonance frequency indeed. From the instability analysis, it is clarified that spillover phenomenon on the lower frequency side is not a special phenomenon limited to a specific experimental setup but can generally occur in the piezoelectric NC-shunt damping problem.

Keywords : Vibration control, Piezoelectric element, Negative capacitor, Multimode, Spillover phenomenon

1. 緒 言

スピルオーバー現象とは柔軟構造物の制御を行う際に、高周波側の振動モードを無視して制御系設計を行ったために、制御系設計では考慮しなかった高周波側振動モードと制御器が干渉して不安定化現象が生じることを意味する (Preumont, 2011). 古典制御におけるゲイン安定化や位相安定化, 現代制御における LQG (Linear Quadratic

Gaussian) や H_∞ -制御など様々なアプローチにより対処法が検討されてきた。

本研究ではスピルオーバー現象の対となる低周波側スピルオーバー現象を紹介し、不安定化現象の発生理由を検討する。この不安定化現象は、圧電素子を用いてシャント制振を検討する過程において発生し、シミュレーションにおいても実験においても確認された(堀他, 2019, Jikuya et al., 2019, 松田他, 2019)。具体的には、NC 回路(負性キャパシタ; Negative Capacitor)を用いて多モードの制振を行う際に、高周波側の振動モードの抑制に重みをおいて NC 回路の回路素子値の選定を行い、構造物と圧電素子から構成される制御対象と NC 回路から構成されるコントローラを接続したところ不安定化したというものである。

スピルオーバー現象は低次元コントローラの設計のために意図的に高周波側振動モードを制御系設計で考慮しない場合や高周波側振動モードのモデル化が困難なために見過ごした場合に発生すると考えられる。一方、低周波側スピルオーバー現象は、制御器である NC 回路の設計の自由度が少ないので、高周波側振動モードの制振を行うために意図的に低周波側振動モードを考慮せずに制御系設計(回路素子値選定)した場合に発生した。このことはシャント制振において一般的に生じうる状況と考えられる。例えば、LR シャント制振(Hagood and von Flotow, 1991), NC シャント制振(高木他, 2015, Berardengo et al., 2016)では、柔軟構造物を単一モードで近似して、解析的に回路素子値を決定する計算手法が提案されている。これら単一モードに対する手法を柔軟構造物に適用して高周波側の振動モードの制振を行うと、一般に柔軟構造物は無限個の振動モードを持つので、低周波側スピルオーバー現象を避ける必要があると思われる。また、多モード NC シャント制振の有効性を実験的に検証した先行研究は多々あるが、多モードに対する回路素子値の選定方法は明示されておらず、低周波側スピルオーバー現象については認識されていないように思われる(Behrens et al., 2002, Moheimani and Fleming, 2006)。そもそも、シャント制振に限らず、低周波側スピルオーバー現象に相当する不安定化現象を筆者らは知らない。今まで認識されていない不安定化現象を発見した可能性があり、低周波側スピルオーバー現象の発生理由を明らかにすることが望まれる。

本論文は以下のように構成される。第2章では NC シャント制振の定式化を行う。第3章では主結果を説明する。3.1 節において低周波側スピルオーバー現象を紹介し、3.2 節ではボード線図とナイキスト線図を用いて図的に不安定化現象が生じる理由を調べ、3.3 節では近似解析により不安定化現象が生じる理由を調べ、3.4 節で制御性能を確認する。第4章では結論を述べる。

2. モデル化

2.1 圧電素子を取り付けた柔軟構造物のモデル化

圧電素子を取り付けた柔軟構造物のモデル化を行う。圧電素子は機械的特性と電気的特性をあわせもつため、モデル化にあたり機械系と電気系に分けて考え、さらに機械系と電気系を結びつける電気機械結合系を考える。

まず機械系について考える。柔軟構造物の i 次振動モードは図1のような1自由度系で表される($i = 1, 2, 3, \dots$)。モード質量に関して正規化を行うと、モード変位 $\eta_i(t)$ に関する運動方程式は次式で表される。

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -u_i(t) + \phi_i^d d(t) \quad (1)$$

ここで ζ_i は i 次モード減衰比、 ω_i は i 次固有角周波数、 $u_i(t)$ は逆圧電効果による力の i 次モードへの寄与、 $d(t)$ は外力、 ϕ_i^d は外力 $d(t)$ の i 次モードへの寄与の大きさを表す。変位 $w(t)$ はモード変位 $\eta_i(t)$ を用いて以下のように表される。

$$w(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^w \eta_i(t) \quad (2)$$

ここで ϕ_i^w はセンサの位置における i 次振動モードの寄与の大きさを表す。

次に電気系モデルについて考える。圧電素子の電気系モデルはキャパシタンスで表現されることが多いが、ここでは図2に示すようにキャパシタンス C_p に加えて寄生抵抗 R_{p1} , R_{p2} を考慮した回路を考える。 R_{p1} は誘電損失などの高周波での損失、 R_{p2} は漏れ電流などの低周波での損失を表し、図2の回路を振動電気系モデルと呼ぶ(高

Fig. 1 The i -th modal mechanical system model, in which u_i is the modal force from the inverse piezoelectric effect and η_i is the modal displacement.

Fig. 2 Perturbed electrical system model, which consists of the current source i_p from the piezoelectric effect, the capacitance C_p , and the parasitic resistances R_{p1} and R_{p2} in the piezoelectric element.

木他, 2015). 摂動電気系モデルの回路方程式は次式で表される.

$$v_p(t) = \frac{1}{C_p} \int (i_p(t) - i_{s1}(t)) dt \quad (3)$$

$$i_s(t) - i_{s1}(t) + i_{s2}(t) = 0 \quad (4)$$

$$v_s(t) - R_{p2}i_{s2}(t) = 0 \quad (5)$$

$$v_s(t) - v_p(t) + R_{p1}i_{s1}(t) = 0 \quad (6)$$

ここで v_p はキャパシタンス C_p の端子間電圧, i_{s1} は R_{p1} を流れる電流, i_{s2} は R_{p2} に流れる電流を表す.

最後に電気機械結合系について考える. 電気系と機械系は圧電効果と逆圧電効果により相互に結合されており, それぞれ次式で表される.

$$i_p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \dot{\eta}_i(t) \quad (7)$$

$$u_i(t) = \psi_i v_p(t) \quad (8)$$

ここで ψ_i は i 次正規化モード電気機械結合係数を表す.

外力 $d(t)$ を無視して式 (1) から式 (8) を結合した系にラプラス変換を施し変数消去すると, $-i_s$ から v_s へのインピーダンスを求めることができ, Z と表記する. なお, 文脈から明らかな場合にはラプラス変換の複素変数 s を省略して信号と伝達関数を表記する. 例えば $Z(s)$ を Z と表記している. また, 図 2 において電流 i_s が電圧降下とは逆向きなので, 電流 i_s の符号を反転させてインピーダンスを定めていることに注意されたい.

式 (1) から式 (8) を結合した系が圧電シャント制振の制御対象であり, 式 (2) を見てわかるように無数のモードを含んでいる. 無数のモードを想定する振動制御は難しく, 工学的には限られた周波数帯域における振動制御を考えれば十分である. そのため, 有限個のモードを想定して振動制御を定式化することが一般的であり, 式 (1) の振動モードを 1 個だけ考える場合と複数個考える場合に分類される.

振動モードを 1 個だけ考えた時の制御対象を単一モードモデルと呼ぶ. i 次モードのみを考慮するときに, i 次単一モードと呼び, 式 (2) と式 (7) はそれぞれ以下のように近似される.

$$w(t) = \phi_i^w \eta_i(t) \quad (9)$$

$$i_p(t) = \psi_i \dot{\eta}_i(t) \quad (10)$$

振動モードを複数個考えた時の制御対象を多モードモデルと呼ぶ. 1 次モードから N 次モードまでを考慮したときに, 式 (1) は $i=1$ から $i=N$ までの N 個を考えることに相当し, 式 (2) と式 (7) はそれぞれ以下のように近似される.

$$w(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i^w \eta_i(t) \quad (11)$$

$$i_p(t) = \sum_{i=1}^N \psi_i \dot{\eta}_i(t) \quad (12)$$

2.2 負性キャパシタンスを用いたシャント回路

圧電構造物を取り付けた柔軟構造物に対して、圧電構造物に電気回路を接続して振動制御を行うことをシャント制振と呼び、電気回路をシャント回路と呼ぶ。本論文では負性キャパシタンス (Negative Capacitance) を用いたシャント回路を考える。NC 回路のモデルは負性キャパシタ回路と負性抵抗を並列接続により表されることが多いが、圧電素子との間に不安定な極零相殺を起こしてしまうので適切ではない (Honda et al., 2018)。そこで、図 3 に示すように、負性キャパシタ回路 $-C$ と負性抵抗 $-R_c$ を並列接続し、さらに抵抗 R を直列接続した回路を考える。この回路は修正負性キャパシタ回路と呼ばれるが、本論文では表記の簡単のために **NC 回路** と呼ぶことにする。NC 回路の回路方程式は以下のように表される。

$$v_s(t) = v_c(t) + Ri_s(t) \quad (13)$$

$$i_s(t) = -C\dot{v}_c(t) + \frac{v_c(t)}{-R_c} \quad (14)$$

ここで v_c は負性キャパシタの端子間電圧、 v_s は圧電素子の端子間電圧、 i_s は圧電素子の端子間電流である。式 (13) と式 (14) にラプラス変換を施し変数消去すると、 i_s から v_s へのアドミタンスを求めることができ、 Y と表記する。NC 回路が近似的に $-C$ を実現することを想定すると $0 < R \ll R_c$ が成り立ち、 Y は不安定な一次伝達関数となる。

NC 回路の制御性能を評価するために比較対象としてシャント回路を短絡する場合も考える。このときの回路方程式は以下のように表される。

$$v_s(t) = 0 \quad (15)$$

短絡した時のアドミタンスは求まらないが、形式的に Y^s と表記することとする。

2.3 一般化制御対象を用いた圧電 NC シャント制振の定式化

圧電素子に NC 回路を接続して振動制御を行うことを圧電 **NC シャント制振** と呼ぶ。単一モードの場合でも多モードの場合でも、圧電素子と NC 回路を接続することは電圧 v_s と電流 i_s を変数消去することに相当し、振動制御問題は外乱 d から変位 w への影響を抑える問題として定式化される。

一般化制御対象と線形分数変換はこれらの接続と変数消去を表すのに有用である。単一モードの場合でも多モードの場合でも、外乱 d と電流 i_s の組を入力と考え、変位 w と電圧 v_s の組を出力と考えると、一般化制御対象 P とアドミタンス Y を用いて以下のように入出力関係が表現される。

$$\begin{bmatrix} w \\ v_s \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} d \\ i_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$i_s = Yv_s \quad (17)$$

電圧 v_s と電流 i_s を変数消去すると外乱 d から変位 w への入出力関係は以下のように表される。

$$w = \mathcal{F}(P, Y)d \quad (18)$$

ただし $\mathcal{F}(P, Y)$ は線形分数変換を表し、 P の部分行列と Y を用いて以下のように表される。

$$\mathcal{F}(P, Y) = P_{11} + P_{12}Y(I - P_{22}Y)^{-1}P_{21}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

以上をまとめると図 4 のブロック線図により表現される。圧電素子を取り付けた柔軟構造物が一般化制御対象 P であり、アドミタンス Y はコントローラとして解釈される。

外乱 d から変位 w への周波数応答の最大値は H_∞ -ノルムにより表され、外乱抑制は H_∞ -ノルムの低減として表現される。NC 回路のアドミタンス Y は不安定な 1 次伝達関数である。したがって、圧電 NC シャント制振は不安定な固定構造コントローラを用いた H_∞ -制御問題として解釈される。

Fig. 3 NC (Negative Capacitor) circuit, which consists of the negative capacitance $-C$, the negative resistance $-R_c$, and the resistance R .

Fig. 4 Block diagram representing the input-output relation of the linear fractional transformation (LFT) denoted by $\mathcal{F}(P, Y)$.

3. 主 結 果

3.1 低周波側スピルオーバー現象

圧電 NC シャント制振を単一モードと多モードの観点から再考する．区別のために， i 次単一モードの一般化制御対象を P_i ，多モードの一般化制御対象を P_{mul} と表記する．

現実の柔軟構造物は多モードであり，NC 回路は多モードに対して設計することが妥当である．例えば Beherens ら (2002) は多モードを想定して NC 回路を設計し実験を行っているが，回路素子値の選定方針は明らかにされていない．多モードでは対象の自由度と比較して回路素子のパラメータ数は高々3個と少なく，回路素子値の選定は自明な問題ではない．

一方，振動制御を考える際に限られた周波数帯域を考えれば十分な場合も多く，単一モードに対して NC 回路を設計することも考えられる．例えば高木ら (2015) は単一モードを想定した NC 回路の回路素子値選定方法を議論しており，負性キャパシタ $-C$ と負性抵抗 $-R_c$ を動吸振器のアナロジーから定め，抵抗 R を極配置最適化問題に帰着することを提案している．単一モードでは対象の自由度と回路素子のパラメータ数が釣り合っているため，解きやすい問題となっていることがわかる．

この考えを一步進めて，多モードを想定して圧電 NC シャント制振を解く際に，ある特定の高次モードを狙って制振を行うことが考えられる．例えば，ハードディスクのヘッドの制御を行う際に，低次モードは駆動用のボイスコイルモータを用いて制振を行い，高次モードを制振するためにヘッドに圧電素子を貼り付けて制振を行うような状況が想定される．また，多モードの全ての共振ピークを対象として制振を行う場合に，ある特定の高次モードを狙って回路素子値を決定してから，その回路素子値を初期値として多モード全体に対して最適化問題を解くことも考えられる．これらの考え方に共通する点は，回路素子値選定を単一モード P_i に対して行い得られたアドミタンスを Y_i とおいた時に，実装後は多モード P_{mul} と Y_i を組み合わせとなるので $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_i)$ の評価を行う必要があるということである．

先行研究では，暗黙の了解として，制御対象を単一モードと近似して得られた回路を多モードの制御対象に対しても適用できると考えられてきたと推測される．この考え方が正しいか確認するために，筆者らは $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_i)$ の組み合わせを評価し，組み合わせによっては不安定化現象が生じることを発見した．とくに，設計時に低次の振動モードを無視した時に $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_i)$ が不安定化したことから，この不安定化現象を低周波側スピルオーバー現象と名付けた (Jikuya et al., 2019)．

以下にその具体例を説明する． P_1 ， P_2 ， P_{mul} に含まれるパラメータを表 1 に示す．これらは実験装置実機に対してインピーダンス計測に基づき推定したものであり (Matsuda et al., 2019)， ϕ_i^w と ϕ_i^d はインピーダンス計測から求まらないので簡単化のため 1 とした．まず， P_1 に対して高木ら (2015) の回路素子選定方法を適用して Y_1 を設計する．設計結果を表 2 に示す． $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$ の開ループ極および $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ と $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ の閉ループ極を表 3 にまとめる．設計時に想定する $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ は安定であり，実装時に現れる $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ も安定となることが確認できる．同様に， P_2 に対して Y_2 を設計し，設計結果を表 4 に示す． $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$ の開ループ極および $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$ と $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ の閉ループ極を表 5 にまとめる．設計時に想定する $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$ は安定であるが，実装時に現れる $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ は閉

ループ極が正の実数部を持つ複素極を持つため、不安定となることが確認できる。

次節では、上記のような低周波側スピルオーバー現象が生じる原因について解析する。

Table 1 Model Parameters in P_1 , P_2 , P_{mul} .

Parameter	Value	Parameter	Value
$C_p[\text{F}]$	6.7045×10^{-8}	ζ_2	6.9972×10^{-3}
$\omega_1[\text{rad/s}]$	247.46	$\psi_2[\text{N}/(\text{V} \cdot \sqrt{\text{kg}})]$	3.8080×10^{-2}
ζ_1	9.2498×10^{-3}	$R_{p1}[\Omega]$	4.3772
$\psi_1[\text{N}/(\text{V} \cdot \sqrt{\text{kg}})]$	1.2655×10^{-2}	$R_{p2}[\Omega]$	3.8162×10^8
$\omega_2[\text{rad/s}]$	1577.3	$\phi_1^w, \phi_2^w, \phi_1^d, \phi_2^d$	1

Table 3 Poles of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$, $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$, $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$.

$\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$	$\mathcal{F}(P_1, Y_1)$	$\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$
$-2.2889 + 247.45j$	$-23.493 + 230.15j$	$-90.773 + 78.7j$
$-2.2889 - 247.45j$	$-23.493 - 230.15j$	$-90.773 - 78.7j$
$-11.036 + 1577.2j$	$-99.671 + 68.427j$	$-25.106 + 230.58j$
$-11.036 - 1577.2j$	$-99.671 - 68.427j$	$-25.106 - 230.58j$
		$-18.321 + 1583.1j$
		$-18.321 - 1583.1j$

Table 2 Circuit Parameters in Y_1 .

Parameter	Value
$C[\text{F}]$	7.7689×10^{-8}
$R[\Omega]$	8721.2
$R_c[\Omega]$	1.7145×10^6

Table 5 Poles of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$, $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$, $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$.

$\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$	$\mathcal{F}(P_2, Y_2)$	$\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$
$-2.2889 + 247.45j$	$-67.651 + 1525.8j$	-1106.3
$-2.2889 - 247.45j$	$-67.651 - 1525.8j$	$34.594 + 202.28j$
$-11.036 + 1577.2j$	-1165.9	$34.594 - 202.28j$
$-11.036 - 1577.2j$	-253.78	-388.99
		$-66.732 + 1525.7j$
		$-66.732 - 1525.7j$

Table 4 Circuit Parameters in Y_2 .

Parameter	Value
$C[\text{F}]$	7.1755×10^{-8}
$R[\Omega]$	639.46
$R_c[\Omega]$	1.1602×10^6

3.2 周波数応答に基づく不安定解析

表 1 から定まる P_1 , P_2 , P_{mul} , 表 2 から定まる Y_1 , 表 4 から定まる Y_2 に対して、周波数応答に基づく不安定解析を行う。圧電シャント制振における一般化制御対象 P は安定なので、式 (19) の $\mathcal{F}(P, Y)$ が不安定化することは $(I - P_{22}Y)^{-1}$ が不安定化することに等しい。ここで、 P_{22} と Y の間に不安定極零相殺は生じないので、 P_{22} と Y から構成されるフィードバックループの内部安定性を考慮すると $Y(I - P_{22}Y)^{-1}$ の安定性と $(I - P_{22}Y)^{-1}$ の安定性は等価であることに注意されたい。以降では、一般化制御対象 P の (2,2)-ブロック成分とコントローラ Y から構成されるフィードバックループに着目する。モードの違いを区別するために、 P_1 の (2,2)-ブロック成分を $-Z_1$, P_2 の (2,2)-ブロック成分を $-Z_2$, P_{mul} の (2,2)-ブロック成分を $-Z_{\text{mul}}$ と表記する。

まず $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ と $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ を比較する。ナイキスト安定判別法に基づき安定性解析を行うために、開ループ伝達関数 $Z_1 Y_1$ と $Z_{\text{mul}} Y_1$ の周波数応答を比較する。図 5 に $Z_1 Y_1$ のボード線図を示す。1 次固有角周波数付近において、ゲイン線図に反共振・共振特性、位相線図に位相進み特性がみられることが確認できる。図 6 に $Z_{\text{mul}} Y_1$ のボード線図を示す。1 次固有角周波数付近とともに設計時には想定していない 2 次固有角周波数付近でも反共振・共振特性および位相進み特性がみられることが確認できる。2 次固有角周波数付近においてゲインは 0[dB] を交差するが、位相は -180° よりも進んでいるので、ゲイン交差と位相交差が同時に生じることはない。図 9 に $Z_1 Y_1$

Fig. 5 Bode diagram of the open-loop transfer function Z_1Y_1 , which contains the first vibration mode.

Fig. 6 Bode diagram of the open-loop transfer function $Z_{mul}Y_1$, in which the second vibration mode appears. The second mode does not cause the phase intersection at -180° .

のナイキスト線図, 図 10 に $Z_{mul}Y_1$ のナイキスト線図を示す. 点線は $\omega < 0$ をあらわし, 実線は $\omega > 0$ をあらわす. Z_1Y_1 と $Z_{mul}Y_1$ の DC ゲインは負であり, 図 9 と図 10 からはみ出たナイキスト線図は時計回りに回転して負の実軸と交差する. Z_1Y_1 が $-1 + j0$ のまわりを回る回数は反時計回りに 1 回であることが確認できる. $Z_{mul}Y_1$ には 2 次固有角周波数付近での反共振・共振特性および位相進み特性が表れているが, $-1 + j0$ のまわりを回る回数が反時計回りに 1 回であって変化しないことが確認できる. Z_1 と Z_{mul} は安定であり, Y は不安定であり不安定極を 1 個もつ. ナイキスト安定判別法を用いると, $(1 + Z_1Y_1)^{-1}$ と $(1 + Z_{mul}Y_1)^{-1}$ の両方が安定であり, $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ と $\mathcal{F}(P_{mul}, Y_1)$ の両方も安定であることが確認できる. 従って, 設計時に想定しない 2 次モードが出現しても安定性に影響を及ぼすことはない.

次に $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$ と $\mathcal{F}(P_{mul}, Y_2)$ を比較する. 図 7 に Z_2Y_2 のボード線図を示す. 2 次固有角周波数付近で反共振・共振特性および位相進み特性がみられることが確認できる. 図 8 に $Z_{mul}Y_2$ のボード線図を示す. 2 次固有角周波数付近だけでなく設計時には想定していなかった 1 次固有角周波数付近でも反共振・共振特性および位相進み特性がみられることが確認できる. 1 次固有角周波数付近における反共振特性により 0[dB] と交差し, 位相進み特性により -180° と交差するので, ゲイン交差と位相交差がほぼ同時に生じたといえる. 図 11 に Z_2Y_2 のナイキスト線図, 図 12 に $Z_{mul}Y_2$ のナイキスト線図を示す. Z_2Y_2 と $Z_{mul}Y_2$ の DC ゲインは負であり, 図 11 と図 12 からはみ出たナイキスト線図は時計回りに回転して負の実軸と交差する. Z_2Y_2 が $-1 + j0$ のまわりを回る回数は反時計回りに 1 回であることが確認できる. $Z_{mul}Y_2$ には 1 次固有角周波数付近での反共振・共振特性および位相進み特性が表れており, $-1 + j0$ のまわりを回る回転数が反時計回りに 1 回から時計回りに 1 回と変化することが確認できる. Z_2 と Z_{mul} は安定であり, Y は不安定であり不安定極を 1 個もつ. ナイキスト安定判別法を用いると, $(1 + Z_2Y_2)^{-1}$ は安定であり, $(1 + Z_{mul}Y_2)^{-1}$ は不安定であり, $\mathcal{F}(P_{mul}, Y_2)$ も不安定となる. 従って, 設計時に想定しない 1 次モードが出現することにより不安定化したことがわかる.

3.3 近似解析による検証

3.3.1 アドミタンスの近似

式 (13) と式 (14) より NC 回路のアドミタンス $Y(s)$ を計算すると次式で表される.

$$Y(s) = \frac{CR_c s + 1}{CRR_c s + R - R_c} =: \frac{N_Y(s)}{D_Y(s)} \quad (20)$$

図 13 にアドミタンス $Y_1(s)$ のボード線図を例示する. 以下に $Y(s)$ の折れ線近似を考える.

まず, 分子多項式 $N_Y(s)$ の折れ線近似を考える. ゲイン線図は $\omega = \frac{1}{CR_c}$ が折れ点となる. $0 < \omega < \frac{1}{CR_c}$ の範囲では 0dB で定数近似され, $\frac{1}{CR_c} < \omega$ の範囲では 20dB/dec の傾きで直線近似される. 位相線図は $\omega = \frac{1}{5CR_c}$ と $\omega = \frac{5}{CR_c}$

Fig. 7 Bode diagram of the open-loop transfer function Z_2Y_2 , which contains the second vibration mode.

Fig. 8 Bode diagram of the open-loop transfer function $Z_{mul}Y_2$, in which the first vibration mode appears. The first mode causes the phase intersection at -180° .

Fig. 9 Nyquist diagram of the open-loop transfer function Z_1Y_1 , where the dotted line for $\omega < 0$ and the solid line for $\omega > 0$. The arrows and the angular frequency information are supplementary materials to indicate an increase for $\omega > 0$. The diagram encircles $-1 + j0$ once in the counter-clockwise direction.

Fig. 10 Nyquist diagram of the open-loop transfer function $Z_{mul}Y_1$, where the dotted line for $\omega < 0$ and the solid line for $\omega > 0$. The diagram also encircles $-1 + j0$ once in the counter-clockwise direction. Hence, $\mathcal{F}(P_{mul}, Y_1)$ becomes stable.

の点が折れ点となる。 $0 < \omega < \frac{1}{5CR_c}$ の範囲では 0deg で定数近似され、 $\frac{1}{5CR_c} < \omega < \frac{5}{CR_c}$ の間の範囲では徐々に位相が進み、 $\frac{5}{CR_c} < \omega$ の範囲では 90deg で定数近似される。

続いて、分母多項式 $D_Y(s)$ の折れ線近似を考える。表 2 と表 4 を参考に $R \ll R_c$ と仮定する。ゲイン線図は $\omega = \frac{R_c - R}{CRR_c}$ が折れ点となる。 $0 < \omega < \frac{R_c - R}{CRR_c}$ の範囲では $20\log_{10}|R_c - R|[\text{dB}]$ で定数近似され、 $\frac{R_c - R}{CRR_c} < \omega$ の範囲では 20dB/dec の傾きで直線近似される。位相線図は $\omega = \frac{R_c - R}{5CRR_c}$ と $\omega = \frac{5(R_c - R)}{CRR_c}$ が折れ点となる。 $0 < \omega < \frac{R_c - R}{5CRR_c}$ の範囲では 180deg で定数近似され、 $\frac{R_c - R}{5CRR_c} < \omega < \frac{5(R_c - R)}{CRR_c}$ の範囲では徐々に位相が遅れ、 $\frac{5(R_c - R)}{CRR_c} < \omega$ の範囲では 90deg で定数近似される。

$Y(s)$ の折れ線近似は $N_Y(s)$ の折れ線近似から $D_Y(s)$ の折れ線近似を引くことにより得られる。ここで表 1, 表 2, 表 4 を対比すると $\frac{1}{CR_c} \ll \omega_1 \ll \omega_2 \approx \frac{R_c - R}{CRR_c}$ なる関係が成り立つので、 $\frac{1}{CR_c} < \omega < \frac{R_c - R}{CRR_c}$ の範囲で $Y(s)$ の折れ線近似を求める。 $Y(s)$ のゲイン線図は $20\log_{10}|\frac{1}{R_c - R}| \approx 20\log_{10}|\omega| + 20\log_{10}|C|[\text{dB}]$ で直線近似され、位相線図は -90deg

Fig. 11 Nyquist diagram of the open-loop transfer function Z_2Y_2 , where the dotted line for $\omega < 0$ and the solid line for $\omega > 0$. The diagram encircles $-1 + j0$ once in the counter-clockwise direction.

Fig. 12 Nyquist diagram of the open-loop transfer function $Z_{mul}Y_2$, where the dotted line for $\omega < 0$ and the solid line for $\omega > 0$. The diagram encircles $-1 + j0$ once in the clockwise direction. Hence, $\mathcal{F}(P_{mul}, Y_2)$ becomes unstable.

Fig. 13 Bode diagram of the admittance Y_1 of the NC circuit. This diagram shows monotone increase in both gain and phase from 10^2 rad/s to 10^4 rad/s including the first vibration mode.

Fig. 14 Bode diagram of impedance Z_1 composed of the mechanical and electrical systems. This diagram shows monotone decrease in the gain and almost flat value in the phase from 10^2 rad/s to 10^4 rad/s except the first vibration mode.

で定数近似され、 $Y(s) \simeq -sC$ として負性キャパシタ回路により近似できることが確認できる。また局所的には徐々に位相が進むことも確認できる。

以上は表 1, 表 2, 表 4 の具体例に対する近似解析である。この議論を一般化すると、NC 回路は負性キャパシタ回路を近似的に実現するために導入されたことから、NC 回路が有効に機能する周波数帯域において $Y(s) \simeq -sC$ として負性キャパシタ回路により近似でき、局所的に徐々に位相が進むことが一般的に成り立つと考えられる。

3.3.2 インピーダンスの近似

表 1 に示すパラメータを推定する際に、式 (3) から式 (6) の振動電気系モデルを仮定してインピーダンス測定値に対するフィッティングを行った (Matsuda et al., 2019)。図 14 にインピーダンス $Z_1(s)$ のボード線図を例示する。

寄生要素 R_{p1} と R_{p2} は高周波領域と低周波領域におけるフィッティングの適合度を向上させるのに効くが、共振

ピーク付近の周波数応答にはあまり影響がない．そこで本節では寄生要素を無視して近似解析を行う．寄生要素を $R_{p1} \simeq 0$, $R_{p2} \simeq \infty$ と近似すると，式 (3) から式 (6) は以下のように簡略化され，公称電気系モデル (高木他, 2015) が得られる．

$$v_s(t) = \frac{1}{C_p} \int (i_p(t) - i_s(t)) dt \quad (21)$$

機械系と電気機械結合系と公称電気系モデルを組み合わせると， $-i_s$ から v_s までのインピーダンス $Z(s)$ を計算すると次式のように表される．

$$Z(s) = \frac{1}{s \left(C_p + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right)} \quad (22)$$

これは一般化制御対象 P の (2,2)-ブロック成分の符号を反転させたものに相当する．

ここで，設計時には想定しなかったモードを想定して第 k 次モードに着目し， $\omega \simeq \omega_k$ 付近のゲイン線図と位相線図を近似解析する． $i < k$ では $\frac{\psi_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \simeq \frac{\psi_i^2}{-\omega_k^2 + j2\zeta_i \omega_i \omega_k + \omega_i^2} \simeq -\frac{\psi_i^2}{\omega_k^2}$ と近似して， $k < i$ では $\frac{\psi_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \simeq \frac{\psi_i^2}{-\omega_k^2 + j2\zeta_i \omega_i \omega_k + \omega_i^2} \simeq \frac{\psi_i^2}{\omega_k^2}$ と近似すると， $\omega \simeq \omega_k$ 付近の角周波数伝達関数 $Z_k(j\omega)$ は以下のように近似される．

$$Z_k(j\omega) = \frac{1}{j\omega \left(C_k + \frac{\psi_k^2}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \right)}, \quad C_k := C_p - \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{\psi_i^2}{\omega_k^2} + \sum_{k+1 \leq i} \frac{\psi_i^2}{\omega_k^2} \quad (23)$$

式 (23) において減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると， $Z_k(j\omega_k) \simeq 0$ より $\omega = \omega_k$ が $Z_k(s)$ の反共振点であり， $Z_k \left(j\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \right) \simeq \infty$ より $\omega = \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}$ が $Z_k(s)$ の共振点であることが確認できる．

直接計算により $Z_k(j\omega)$ のゲインは以下のように計算される．

$$20 \log_{10} |Z_k(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega} \right| + 20 \log_{10} |\omega_k^2 - \omega^2 + j2\zeta_k \omega_k \omega| - 20 \log_{10} \left| \omega_k^2 - \omega^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k} + j2\zeta_k \omega_k \omega \right| \quad (24)$$

減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると，反共振点と共振点から離れた角周波数では以下のように近似される．

$$20 \log_{10} |Z_k(j\omega)| \simeq 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega} \right| + 20 \log_{10} |\omega_k^2 - \omega^2| - 20 \log_{10} \left| \omega_k^2 - \omega^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k} \right| \simeq 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega} \right| \quad (25)$$

反共振点 $\omega = \omega_k$ におけるゲインは以下のように近似される．

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} 20 \log_{10} |Z_k(j\omega)| = \begin{cases} 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega_k} \right| + 20 \log_{10} |2\zeta_k \omega_k^2| - 20 \log_{10} \left| \frac{\psi_k^2}{C_k} \right|, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k \omega_k^2 \\ 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega_k} \right| - 10 \log_{10} 2, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \simeq 2\zeta_k \omega_k^2 \\ 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \omega_k} \right|, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \ll 2\zeta_k \omega_k^2 \end{cases} \quad (26)$$

ここで表 1 を用いて比較すると， $\frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k \omega_k^2$ が低周波側モードに相当して， $\frac{\psi_k^2}{C_k} \ll 2\zeta_k \omega_k^2$ が高周波側モードに相当することがわかる．減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると，低周波側の反共振点の谷が深くなり，高周波側の反共振点の谷が浅くなることを確認できる．

共振点 $\omega = \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}$ におけるゲインは以下のように近似される．

$$\lim_{\omega \rightarrow \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}} 20 \log_{10} |Z_k(j\omega)| = \begin{cases} 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{\psi_k^2}{C_k} \right| - 20 \log_{10} \left| 2\zeta_k \omega_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \right|, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k \omega_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \\ 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}} \right| + 10 \log_{10} 2, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \simeq 2\zeta_k \omega_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \\ 20 \log_{10} \left| \frac{j}{C_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}} \right|, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \ll 2\zeta_k \omega_k \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \end{cases} \quad (27)$$

減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると、低周波側の共振点の山が高くなり、高周波側の共振点の山が低くなることを確認できる。

直接計算により $Z_k(j\omega)$ の位相は以下のように計算される。ただし $\angle$ は複素数の偏角を表す記号である。

$$\angle Z_k(j\omega) = -90^\circ + \angle(\omega_k^2 - \omega^2 + j2\zeta_k\omega_k\omega) - \angle\left(\omega_k^2 - \omega^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k} + j2\zeta_k\omega_k\omega\right) \quad (28)$$

減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると、反共振点と共振点から離れた角周波数で位相は以下のように近似される。

$$\angle Z_k(j\omega) \simeq -90^\circ + \angle(\omega_k^2 - \omega^2) - \angle\left(\omega_k^2 - \omega^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}\right) \simeq -90^\circ \quad (29)$$

減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると、反共振点 $\omega = \omega_k$ における位相は以下のように近似される。

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_k} \angle Z_k(j\omega) = \begin{cases} -90^\circ + \angle(j2\zeta_k\omega_k^2) - \angle\left(\frac{\psi_k^2}{C_k}\right) \simeq 0^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k\omega_k^2 \\ -90^\circ + \angle(j2\zeta_k\omega_k^2) - \angle\left(\frac{\psi_k^2}{C_k} + j2\zeta_k\omega_k^2\right) \simeq -45^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \simeq 2\zeta_k\omega_k^2 \\ -90^\circ + \angle(j2\zeta_k\omega_k^2) - \angle(j2\zeta_k\omega_k^2) \simeq -90^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \ll 2\zeta_k\omega_k^2 \end{cases} \quad (30)$$

低周波側の位相進みが大きく、高周波側の位相進みが小さいことが確認できる。

減衰比を $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると、共振点 $\omega = \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}$ における位相は以下のように近似される。

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}} \angle Z_k(j\omega) \\ &= \begin{cases} -90^\circ + \angle\left(-\frac{\psi_k^2}{C_k}\right) - \angle\left(j2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}\right) \simeq 0^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \\ -90^\circ + \angle\left(-\frac{\psi_k^2}{C_k} + j2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}\right) - \angle\left(j2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}\right) \simeq -45^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \simeq 2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \\ -90^\circ + \angle\left(j2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}\right) - \angle\left(j2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}}\right) \simeq -90^\circ, & \frac{\psi_k^2}{C_k} \ll 2\zeta_k\omega_k\sqrt{\omega_k^2 + \frac{\psi_k^2}{C_k}} \end{cases} \quad (31) \end{aligned}$$

低周波側の位相進みが大きく、高周波側の位相進みが小さいことが確認できる。

従って、設計時に想定しない低周波側モードが出現した場合は反共振点におけるゲインの谷の深さが深く位相の進みが大きく、設計時に想定しない高周波側モードが出現した場合は反共振点におけるゲインの谷の深さが浅く位相の進みが小さいことが確認できた。

以上は表 1 の具体例に対する近似解析である。この議論を一般化すると、式 (27) と式 (30) の場合分けを行う不等式条件が鍵となる。不等式 $\frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k\omega_k^2$ が成り立つとみなせる時に、反共振点におけるゲインの谷の深さが深く位相の進みが大きくなると考えられる。この不等式が成り立たない時には、反共振点におけるゲインの谷の深さが浅く位相の進みが小さくなると考えられる。

3.3.3 開ループ伝達関数の近似

表 1, 表 2, 表 4 の具体例では不等式 $\frac{\psi_k^2}{C_k} \gg 2\zeta_k\omega_k^2$ が成り立つとみなすことができる。アドミタンスとインピーダンスの近似結果を組み合わせ、開ループ伝達関数の近似解析を行い、数値的に求めたボード線図と対比する。

まず設計時に想定しない低周波側モードが出現した場合を検討する。低周波側モードの反共振点 $\omega = \omega_k$ におけるゲイン線図と位相線図を調べる。 $Y(s)$ のゲイン線図は $20\log_{10}|\omega| + 20\log_{10}|C|[\text{dB}]$ として直線近似される。 $Z(s)$ のゲイン線図は共振点と反共振点以外では $-20\log_{10}|\omega| - 20\log_{10}|C_k|[\text{dB}]$ として直線近似される。 $Z(s)$ のゲイン線図は反共振点の谷が深く $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると $-\infty$ に漸近する。 $Z(s)Y(s)$ のゲイン線図は共振点と反共振点以外では $20\log_{10}|C| - 20\log_{10}|C_k|[\text{dB}]$ として定数近似され、反共振点では深い谷があらわれることがわかる。 $Y(s)$ の位相線図は -90° より若干遅れて定数近似される。 $Z(s)$ の位相線図は共振点と反共振点以外では位相遅れが -90° として定数近似され、反共振点付近において $\zeta_k \simeq 0$ と近似すると位相進みが 0° に漸近する。 $Y(s)Z(s)$ の位相線図は共振点と反共振点以外では -180° より若干遅れて定数近似され、反共振点付近において -90° 付近まで位相が

進むことがわかる。従って、図 8 の $\omega = \omega_1$ 付近において確認されたように、設計時に想定しない低周波側モードが出現した場合にはゲイン交差と位相交差の両方が発生することがわかる。

次に設計時に想定しない高周波側モードが出現した場合を検討する。高周波側モードの反共振点 $\omega = \omega_k$ におけるゲイン線図と位相線図を調べる。 $Y(s)$ のゲイン線図は $20\log_{10}|\omega| + 20\log_{10}|C|[\text{dB}]$ として直線近似される。 $Z(s)$ のゲイン線図は共振点と反共振点以外では $-20\log_{10}|\omega| - 20\log_{10}|C_k|[\text{dB}]$ として直線近似される。 $Z(s)$ のゲイン線図は反共振点の谷が浅く $\zeta_k \simeq 0$ と近似しても $-\infty$ に漸近しない。 $Y(s)Z(s)$ のゲイン線図は共振点と反共振点以外では $20\log_{10}|C| - 20\log_{10}|C_k|[\text{dB}]$ として定数近似され、反共振点では浅い谷があらわれることがわかる。 $Y(s)$ の位相線図は -90° より若干進んで定数近似される。 $Z(s)$ の位相線図は共振点と反共振点以外では位相遅れが -90° として定数近似され、反共振点付近において $\zeta_k \simeq 0$ と近似しても位相遅れは -90° から若干進む程度にとどまる。 $Y(s)Z(s)$ の位相線図は共振点と反共振点以外では -180° より若干進んで定数近似され、反共振点付近において -180° 付近から若干進む程度にとどまることがわかる。従って、図 6 の $\omega = \omega_2$ 付近において確認されたように、設計時に想定しない高周波側モードが出現した場合には位相交差が発生しないことがわかる。

従って、設計時に想定しない低周波側モードが出現した場合は反共振点付近において開ループ伝達関数にゲイン交差と位相交差が同時に生じるので、ナイキスト線図における回転数が変化し、不安定化することが確認できる。設計時に想定しない高周波側モードが出現した場合は反共振点付近において開ループ伝達関数の位相交差が生じないので、ナイキスト線図における回転数は変化せず、安定性が保たれることが確認できた。

以上は表 1, 表 2, 表 4 の具体例に対する近似解析である。この議論を一般化すると、開ループ伝達関数の位相特性が第一の鍵となる。共振点と反共振点以外ではインピーダンスの位相は -180° で定数近似され、負性キャパシタの特性が現れる帯域ではアドミタンスの位相は単調増加する。設計時に想定するモードでは開ループ伝達関数の位相が -180° より少し進むようにアドミタンスを設計するので、設計時に想定しない低周波側モードでは開ループ伝達関数の位相が -180° より若干遅れて、設計時に想定しない高周波側モードでは開ループ伝達関数の位相が -180° より若干進むことになる。また、インピーダンスの近似解析において式 (27) と式 (30) の場合分けを行う不等式条件が第二の鍵となる。不等式 $\frac{\omega_k^2}{\zeta_k} \gg 2\zeta_k\omega_k^2$ が成り立つとみなせる時に、反共振点付近において開ループ伝達関数にゲイン交差と位相交差が同時に生じて、ナイキスト線図における回転数が変化し、不安定化すると考えられる。この不等式が成り立たない時には、反共振点付近において開ループ伝達関数の位相交差が生じず、ナイキスト線図における回転数は変化せず、安定性が保たれると考えられる。

3.4 閉ループシステムのボード線図

表 1 から定まる P_1 , P_2 , P_{mul} , 表 2 から定まる Y_1 , 表 4 から定まる Y_2 を考える。閉ループシステムのボード線図を図示し、低周波側スピルオーバー現象が閉ループシステムのボード線図にどのように反映されるか確認する。

図 15 に $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$, $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$, $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ のボード線図を重ね書きする。それぞれ緑線、青線、赤線に相当する。 $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$ は非制御時のボード線図であり、機械系に含まれる振動モードをあらわす。 $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ では 1 次振動モードが制振され、2 次振動モードは無視されている。 $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ でも 1 次振動モードが制振され、2 次振動モードにも若干の制振効果が確認できる。

図 16 に $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$, $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$, $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ のボード線図の重ね書きをする。それぞれ緑線、青線、赤点線に相当する。 $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$ では 1 次振動モードが無視され、2 次振動モードは制振されている。 $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ では、一見すると、1 次振動モードも 2 次振動モードも良好に制振されているように思われる。しかし、実際には $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ は不安定であり、見かけ上の制振効果は意味をなさない。表 5 に示すように、 $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ の不安定極は $34.594 \pm 202.28j$ であり、時間領域では $e^{34.594t} \sin(202.28t)$ と $e^{34.594t} \cos(202.28t)$ の線形和により発散する時間応答が表現される。

4. 結 言

本論文では圧電 NC シヤント制振において発生する低周波側スピルオーバー現象を紹介し、不安定化現象の発生理由を調べた。低周波側スピルオーバー現象が設計時と実装時のミスマッチに起因すると考え、実験装置実機の諸元を用いて設計時と実装時の開ループ伝達関数のボード線図を比較することにより、低周波側スピルオーバー現象の発生時にはゲイン交差と位相交差が同時に発生することを示した。圧電 NC シヤント制振における制御対象はインピーダンスであり、力から位置への伝達特性における共振点が電流から電圧への伝達特性における反共振

Fig. 15 Bode diagrams of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$ (green line), $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$ (blue line), and $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ (red line), which show a slight improvement in the vibration suppression of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_1)$ with respect to $\mathcal{F}(P_1, Y_1)$.

Fig. 16 Bode diagrams of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y^s)$ (green line), $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$ (blue line), and $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ (red dotted line), which show a fictional improvement in the vibration suppression of $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ with respect to $\mathcal{F}(P_2, Y_2)$. $\mathcal{F}(P_{\text{mul}}, Y_2)$ is unstable as shown in Fig. 12.

点に相当する。スピルオーバー現象では共振点において不安定化するが、低周波側スピルオーバー現象では反共振点において不安定化するという対比が興味深い。また、ナイキスト線図を比較することにより、低周波側スピルオーバー現象の発生時にはナイキスト線図の回転数が変化するため不安定化することを示した。以上の図的安定解析法に加えて近似解析を行い、設計時に想定されていなかった低次振動モードにより低次固有角周波数付近でゲイン交差と位相交差が同時に起こりうる条件を確認した。これにより低周波側スピルオーバー現象は特定の実験装置に限る特殊な現象ではなく、圧電 NC シャント制振において一般的に発生しうることを明らかとした。

圧電 NC シャント制振は不安定コントローラを用いて振動制御をおこなっていると解釈される。本研究で紹介した低周波側スピルオーバー現象が、圧電 NC シャント制振以外の不安定コントローラを用いた振動制御においても発生しうるものか、今後の研究課題の一つとしたい。

謝 辞

本研究の一部は公益信託加藤辰次郎記念建設機械研究開発振興基金を用いられて行われた。ここに記して、感謝の意を表します。

文 献

- Behrens, S., Moheimani, S. O. R. and Fleming, A. J., Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 266, No. 5 (2002), pp. 929-942.
- Berardengo, M., Thomas, O., Giraud-Audine, C. and Manzoni, S., Improved resistive shunt by means of negative capacitance: new circuit, performances and multi-mode control, *Smart Materials and Structures*, Vol. 25 (2016), 075033.
- Hagood, N. W. and von Flotow, A., Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, No. 2 (1991), pp. 243-268.
- Honda, T., Jikuya, I. and Takagi, K., A parameter tuning method of negative capacitor circuit for piezoelectric shunt damping, *Proc. SPIE 10595, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems XII* (2018), 1059533.
- 堀恭明, 軸屋一郎, 松田樹生, 高木賢太郎, 負性キャパシタを用いた多モード圧電制振の最適化のための初期値選定方法に関する考察, 第 31 回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム, 22A2-5 (2019).

- Jikuya, I., Hori, Y., Matsuda, T. and Takagi, K., Spillover phenomenon on the lower frequency side in the multimode piezoelectric NC-shunt damping, IEEE 28th International Symposium on Industrial Electronics (2019), pp. 658-663.
- Matsuda, T., Jikuya, I., Hori, Y. and Takagi, K., Parameter estimation of the system composed of a piezoelectric element and multiple vibration modes, The 12th Asian Control Conference (2019), pp. 1307-1312.
- 松田樹生, 軸屋一郎, 堀恭明, 高木賢太郎, NC回路を用いた多モード圧電シャント制振におけるスピルオーバー現象の解析, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2019 (2019), 405.
- Moheimani, S. O. R. and Fleming, A. J., Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping, Springer-Verlag (2006).
- Preumont, A., Vibration Control of Active Structures, Springer-Verlag (2011).
- 高木賢太郎, 奥村健斗, 井上剛志, 軸屋一郎, 寄生抵抗を考慮した圧電シャント制振のための負性キャパシタ回路の設計法, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 830 (2015), DOI:10.1299/transjsme.15-00056.

References

- Behrens, S., Moheimani, S. O. R. and Fleming, A. J., Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller, Journal of Sound and Vibration, Vol. 266, No. 5 (2002), pp. 929-942.
- Berardengo, M., Thomas, O., Giraud-Audine, C. and Manzoni, S., Improved resistive shunt by means of negative capacitance: new circuit, performances and multi-mode control, Smart Materials and Structures, Vol. 25 (2016), 075033.
- Hagood, N. W. and von Flotow, A., Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks, Journal of Sound and Vibration, Vol. 146, No. 2 (1991), pp. 243-268.
- Honda, T., Jikuya, I. and Takagi, K., A parameter tuning method of negative capacitor circuit for piezoelectric shunt damping, Proc. SPIE 10595, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems XII (2018), 1059533.
- Hori, Y., Jikuya, I., Matsuda, T. and Takagi, K., A study on selecting initial value for optimizing multi-mode piezoelectric shunt damping by negative capacitance, The 31st Symposium on Electromagnetics And Dynamics, 22A2-5 (2019) (in Japanese).
- Jikuya, I., Hori, Y., Matsuda, T. and Takagi, K., Spillover phenomenon on the lower frequency side in the multimode piezoelectric NC-shunt damping, IEEE 28th International Symposium on Industrial Electronics (2019), pp. 658-663.
- Matsuda, T., Jikuya, I., Hori, Y. and Takagi, K., Analysis of spillover phenomenon in the multimode piezoelectric shunt damping using NC circuit, JSME Dynamics and Design Conference 2019 (2019), 405 (in Japanese).
- Matsuda, T., Jikuya, I., Hori, Y. and Takagi, K., Parameter estimation of the system composed of a piezoelectric element and multiple vibration modes, The 12th Asian Control Conference (2019), pp. 1307-1312.
- Moheimani S. O. R. and Fleming, A. J., Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping, Springer-Verlag (2006).
- Preumont, A., Vibration Control of Active Structures, Springer-Verlag (2011).
- Takagi, K., Okumura, K., Inoue, T. and Jikuya, I., Design method of negative capacitor circuit for piezoelectric shunt damping in the presence of parasitic resistances, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol. 81, No. 830 (2015), DOI:10.1299/transjsme.15-00056.