応答曲面を利用した信頼性に基づく大域的最適化

伊藤 誠^{*1}, 北山 哲士^{*2}

Reliability-based global optimization using response surface

Makoto ITO^{*1} and Satoshi KITAYAMA^{*2}^{*1}Institute of Science and Engineering, Kanazawa University
Kakumamachi, Kanazawa-shi, Ishikawa 920-1192, Japan^{*2}Advanced Manufacturing Technology Institute, Kanazawa University
Kakumamachi, Kanazawa-shi, Ishikawa 920-1192, Japan

Received: 18 December 2020; Revised: 13 April 2021; Accepted: 10 May 2021

Abstract

Reliability-based design optimization (RBDO) is one of design optimization techniques considering uncertainty and has gained attention in the engineering design. To reduce the number of function evaluations in the RBDO, many studies using response surface have been conducted. It has been recognized that sampling strategy plays an important role for highly accurate reliability analysis as well as the reduction of function evaluations. In this paper, reliability-based global optimization with a novel sampling strategy is proposed. The proposed sampling strategy consists of two parts. In the first sampling strategy, several sampling points are added around unexplored region in order to achieve the uniform distribution of the sampling points. Second sampling strategy adds a new sampling point at one of Most Probable Target Points (MPTPs) for improving the local accuracy, in which the new sampling point is selected by the distribution of sampling points. In addition, a deterministic formulation of the RBDO is conducted to search global optimal solution efficiently. Through numerical examples, the validity of the proposed method is examined.

Keywords : Reliability-based design optimization, Engineering optimization, Optimum design, Response surface, Radial basis function network

1. 緒 言

信頼性に基づく最適設計 (Reliability-Based Design Optimization: RBDO) とは、不確定性 (ばらつき) の影響を考慮する最適設計法である (Choi et al., 2007). この最適設計法の特徴は、確率変数を用いて不確定性をモデル化し、破損確率 (制約を違反する確率) を定量的に評価する点にあり、破損によって構造システム全体への影響が大きいと考えられる構造物の設計、例えば自動車側面の耐衝撃設計 (Youn et al., 2004) やタービンブレードの耐疲労設計 (Hu et al., 2016) に適用されている. 図 1 に示すように、信頼性に基づく最適設計は、最適解の探索と同時に繰り返し計算による破損確率の評価をする二重ループであるため、不確定性を考慮しない確定的な最適設計法と比べて関数評価回数が多くなるとされる. 特に、衝突解析のようなシミュレーションに長い計算時間を要する設計問題を対象とする場合、少ないシミュレーション回数で最適解を得ることが重要となるため、関数を近似する応答曲面を利用した最適設計法が用いられている.

応答曲面を利用した信頼性に基づく最適設計に関する研究では、応答曲面の最適解や追加されたサンプル点の情報から段階的に応答曲面の精度を高めて最適解を得る、逐次近似最適化の考え方を利用するものが多い。逐次近似最適化ではサンプル点の追加方法が重要となるが、それは大きく二つに分類される。

Fig. 1 General flow of RBDO.

一つ目は、得られた最適解の周辺領域を対象に応答曲面を作成し、その領域内にサンプル点を追加する方法である。例えば、Youn and Choi は、標準正規空間上に Analysis window と呼ばれる領域を設定し、その領域内にサンプル点を追加している (Youn and Choi, 2004)。Ju and Lee は、Analysis window 内に Kriging を用いて応答曲面を作成し、平均二乗誤差が最大となる点を追加する方法を提案している (Ju and Lee, 2008)。他にも、目標の信頼性指標を半径とする超球面上に追加する方法 (Zhuang and Pan, 2012) や、Kriging を用いて MPP (Most Probable Point) と呼ばれる点を探索し、その点を追加する方法 (Li et al., 2016) などがある。これらは、局所的な応答曲面の近似精度を向上させて、破損確率を高い精度で評価することを狙う点に特徴がある。

二つ目は、限界状態（破損領域と安全領域の境界）上の点をサンプル点として追加する方法であり、MCMC (Markov Chain Monte Carlo simulation) を利用した方法 (Dubourg et al., 2011) や、Kriging による指標関数を用いて限界状態上の点を追加する方法 (Lee and Jung, 2008)、目的関数値を考慮した指標関数で最適解に近い限界状態上にサンプル点を集中させる方法 (Chen et al., 2014, Chen et al., 2015) などがある。これらは、限界状態上にサンプル点を集中させて近似精度を向上させることで、破損確率を高い精度で評価することを狙う点に特徴がある。

応答曲面を利用して最適解を得る場合、なるべく少ないサンプル数で大域的最適解が得られることが望ましいと考えられる。特に、大域的最適解を得るためには、サンプル点の疎密をなるべく減らして大域的な様相を把握することが重要と思われる (Jones et al., 1998)。しかし、上述した先行研究では、局所的な領域や限界状態上にサンプル点が集中することが想定されるため、大域的最適解が得られるかは明らかでない。また、非線形性の高い関数の大域的最適解を得るためには、多点同時探索を用いることが望ましいと考えられる。しかし、関数評価回数が多い信頼性に基づく最適設計では、効率的に大域的最適解を探索できるとは言い難い。

ここで、信頼性に基づく最適設計において、大域的最適解を得るために解決すべき課題をまとめると以下のようになる。

課題 1: 局所的な近似精度の向上を図りつつ、大域的な様相を把握できるような新たなサンプル点の配置方法。

課題 2: 多点同時探索による大域的最適解の探索を効率的に行うためにアルゴリズムを改良すること。

そこで本研究では、応答曲面を用いた信頼性に基づく大域的最適化手法を提案する。課題 1 に対して、局所的な近似精度向上を狙いつつ、サンプル点が一様に分布するようなサンプル点追加アルゴリズムを提案する。課題 2 に対して、信頼性に基づく最適設計問題を確定的な最適設計問題に変換し、破損確率の繰り返し評価を行わない単一ループ法とする。なお、応答曲面には、RBF (Radial Basis Function) ネットワークを用いる。以下、第 2 章において信頼性に基づく最適設計を簡単に説明し、第 3 章において本研究で利用する RBF ネットワークを利用した応答曲面作成方法について述べる。第 4 章において提案する手法について説明し、数値計算例を通じてその有効性を検討する。

2. 信頼性に基づく最適設計

信頼性に基づく最適設計問題では、不確定性を確率変数としてモデル化し、その期待値を設計変数とする。つまり、制約を違反する確率が規定値以下となる条件のもとで、目的関数を最小化する期待値を探索する問題として次のように定式化される。

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) \quad (1a)$$

$$\text{subject to: } P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_j^{\text{Tar}}) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1b)$$

$$d_i^L \leq d_i \leq d_i^U \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1c)$$

ただし、 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T$ は設計変数ベクトルで、その下限値、上限値をそれぞれ d_i^L, d_i^U ($i = 1, \dots, n$)とする。また、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ は確率変数ベクトルを表す。 $f(\cdot), g_j(\cdot)$ はそれぞれ目的関数と j 番目の限界状態関数である。限界状態関数とは、破損条件を以下のように定義する関数である。

$$g_j(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & (\text{safe}) \\ = 0 & (\text{limit state}) \\ < 0 & (\text{failure}) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2)$$

限界状態関数を用いた制約式(1b)を信頼性制約とよぶ。信頼性制約は、破損確率（限界状態関数が負になる確率）を設計者が設定した目標の信頼性指標 β_j^{Tar} と正規累積分布関数 $\Phi(\cdot)$ を用いた所望の確率以下とするものである。ここで、確率変数の結合確率密度関数を $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ とすると、破損確率は次のように求められる。

$$P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] = \int_{\mathbf{x} \in g_j(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3)$$

式(3)は、解析的に解くことが困難であるとされているため（Choi et al., 2007）、確率変数が従う統計分布からサンプリングを行う MCS（Monte Carlo Simulation）や、限界状態関数を MPP まわりで線形近似する FORM（First Order Reliability Method）を用いて破損確率を評価する。

ここでは、FORM を用いて破損確率を評価する方法について説明する。まず、以下の式のように確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ を適当な関数 T_r を用いて標準正規確率変数ベクトル $\mathbf{u}$ に変換する。

$$\mathbf{u} = T_r(\mathbf{x}) \quad (4)$$

このとき、設計変数ベクトルは確率変数ベクトルの期待値であることから、以下の式が成り立つ。

$$T_r(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

なお、 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$ である。また、標準正規空間に変換された限界状態関数を $g_j^U(\mathbf{u})$ ($j = 1, \dots, m$)とする。

ここで、 j 番目の限界状態関数 $g_j^U(\mathbf{u})$ を MPP まわりで線形近似することを考える。MPP とは、限界状態 $g_j^U(\mathbf{u}) = 0$ 上の点の中で最も原点に近い点のことであり、以下のように定義される。

$$\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)} = \arg \min_{g_j^U(\mathbf{u})=0} \|\mathbf{u}\| \quad (6)$$

MPP まわりで限界状態関数を線形近似すると、 $g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) = 0$ より、

$$g_j^U(\mathbf{u}) \approx g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) + \nabla^T g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) = \nabla^T g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)})(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) \quad (7)$$

となり、限界状態関数が標準正規確率変数の線形関数で表せる。よって、限界状態関数の値は正規分布に従い、その平均 μ_j と分散 σ_j^2 は次のように求められる。

$$\mu_j = -\nabla^T g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) \cdot \mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)} \quad (8)$$

$$\sigma_j^2 = \nabla^T g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) \cdot \nabla g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}) = \|\nabla g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)})\|^2 \quad (9)$$

式(8)と式(9)を用いて限界状態関数の値を標準正規化して破損確率を表現すると、次のようになる。

$$P[g_j^U(\mathbf{u}) \leq 0] = P\left[\frac{g_j^U(\mathbf{u}) - \mu_j}{\sigma_j} \leq -\frac{\mu_j}{\sigma_j}\right] = \Phi\left(-\frac{\mu_j}{\sigma_j}\right) \quad (10)$$

μ_j/σ_j は原点から MPP までの距離を表すことから、破損確率はこの距離 β_j を用いて評価できる。これを信頼性指標とよぶ。このことから、 j 番目の限界状態関数に対応する信頼性制約は次のように書き換えることができる。

$$P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] = \Phi(-\beta_j) \leq \Phi(-\beta_j^{\text{Tar}}) \quad (11a)$$

$$\text{where: } \beta_j = \|\mathbf{u}_{\text{MPP}}^{(j)}\| \quad (11b)$$

なお、MPP が複数考えられる場合でも、原点からの距離 β_j は同じ値であることから最適化結果に影響はない。

3. RBF ネットワークを用いた応答曲面作成法

RBF ネットワークとは、三層型のフィードフォワード型のニューラルネットワークである。入力ベクトルを $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ とすると、RBF ネットワークの応答値 $\hat{Y}$ は次のように表される。

$$\hat{Y} = \sum_{k=1}^{n_p} w_k h_k(\mathbf{X}) \quad (12)$$

ただし、 $w_k, h_k(\cdot)$ はそれぞれ k 番目の重み係数と基底関数を表す。本研究では、式(13)に示すガウス基底関数を用いる。また、基底関数の中心を訓練データ X_k ($k = 1, \dots, n_p$) と一致させ、基底関数の数が訓練データ数 n_p と等しいものとする。

$$h_k(\mathbf{X}) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)^T(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)}{r_k^2}\right) \quad (13)$$

ここで、基底関数の半径値 r_k は、著者の一人が提案した以下の式を用いて決定する (Kitayama et al., 2011)。

$$r_k = \frac{d_{k,\max}}{\sqrt{n} \sqrt{n_p - 1}} \quad (14)$$

なお、式(15)中の $d_{k,\max}$ は、 k 番目の訓練データからの最大距離を表す。RBF ネットワークの学習は、重み係数の逆行列演算に帰着され、訓練データ X_k に対応する教師データを Y_k ($k = 1, \dots, n_p$) とすると以下ようになる。

$$\mathbf{w} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \quad (15a)$$

$$\text{where: } \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n_p})^T, \quad (15b)$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_p})^T, \quad (15c)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}, \quad (15d)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{X}_1) & \cdots & h_{n_p}(\mathbf{X}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(\mathbf{X}_{n_p}) & \cdots & h_{n_p}(\mathbf{X}_{n_p}) \end{bmatrix} \quad (15e)$$

ただし、 $\mathbf{I}$ は $n_p \times n_p$ の単位行列、 λ は微小な正の定数であり、本研究では $\lambda = 1.0 \times 10^{-2}$ とした。

4. 提案する信頼性に基づく大域的最適化手法

4・1 確定的な最適化問題への変換

j 番目の信頼性制約が満たされる場合を考える. このときの標準正規空間における MPP と目標の信頼性指標の関係を図 2(a)に示す. 式(11)の関係より, 原点から MPP までの距離 β_j と目標の信頼性指標 β_j^{Tar} の関係は $\beta_j \geq \beta_j^{\text{Tar}}$ である. そこで, 図 2(a)に示す MPTP (Most Probable Target Point) について考える. これは, 原点を中心として半径を β_j^{Tar} とする超球面上で限界状態関数の値が最小となる点であり, 以下のように定義される.

$$\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)} = \arg \min_{\|\mathbf{u}\|=\beta_j^{\text{Tar}}} g_j^U(\mathbf{u}) \quad (16)$$

MPTP は安全領域に含まれるため, 信頼性制約は MPTP を用いた制約 $g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)}) \geq 0$ に置き換えられる.

Fig. 2 MPP, MPTP, and approximated MPTP in the standard normal space.

次に, MPTP の導出方法について考える. 図 2(b)に示すように, MPTP の位置ベクトルが MPTP における限界状態関数の最急降下方向となる性質を利用すると, 以下の関係が成り立つ.

$$\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)} = -\beta_j^{\text{Tar}} \frac{\nabla g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)})}{\|\nabla g_j^U(\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)})\|} \quad (17)$$

両辺に $\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)}$ があることから, 繰り返し計算を利用して MPTP を評価する必要がある. そこで, 式(17)中の勾配ベクトルを原点における勾配ベクトルに置き換えることで以下の式が得られる.

$$\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(j)} \approx -\beta_j^{\text{Tar}} \frac{\nabla g_j^U(\mathbf{0})}{\|\nabla g_j^U(\mathbf{0})\|} \quad (18)$$

また, 原点における勾配は, 設計空間における限界状態関数の勾配を用いて,

$$\frac{\partial g_j^U(\mathbf{0})}{\partial u_i} = \frac{\partial g_j(\mathbf{d})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} \quad (19)$$

と表される. 式(19)右辺の第1項は設計変数ベクトル $\mathbf{d}$ における限界状態関数の勾配, 第2項は式(4)の関係から得られる勾配である. 以上から, MPTP は設計変数ベクトルの情報のみから近似できる. よって, 式(1)で示した信頼性に基づく最適設計問題は, 以下の確定的な最適設計問題に変換できる.

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) \quad (20a)$$

$$\text{subject to: } g_j^U(\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPTP}}^{(j)}) = g_j(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)}) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (20b)$$

$$d_i^L \leq d_i \leq d_i^U \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20c)$$

ただし, $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPTP}}^{(j)} = T_r(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)})$ は式(18)と式(19)を用いて得られる MPTP の近似値である. なお, MPTP が複数考えられる場合でも, 限界状態関数の値は同じであることから最適化結果に影響はない.

【例題】以下に示す信頼性に基づく最適設計問題を考える.

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) = 10 - d_1 + d_2 \quad (21a)$$

$$\text{subject to: } P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_j^{\text{Tar}}) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (21b)$$

$$0 \leq d_i \leq 10 \quad (i = 1, 2) \quad (21c)$$

$$\text{where: } g_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2 x_2}{20} - 1, \quad (21d)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + x_2 - 5)^2}{30} + \frac{(x_1 - x_2 - 12)^2}{120} - 1, \quad (21e)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \frac{80}{x_1^2 + 8x_2 + 5} - 1, \quad (21f)$$

ただし, 目標の信頼性指標を全て3とし, 確率変数は互いに独立な正規分布に従い, その標準偏差を0.3とする. このとき, 標準正規確率変数への変換は,

$$u_i = \frac{x_i - d_i}{\sigma_i} = \frac{x_i - d_i}{0.3} \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

となるので, 勾配は以下のように求められる.

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_i} = 0.3 \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

ここで, $g_1(\mathbf{x})$ について考える. 式(19)を用いて標準正規空間における勾配ベクトルを求めると,

$$\nabla g_1^U(\mathbf{0}) = \left(\frac{3d_1 d_2}{100}, \frac{3d_1^2}{200} \right)^T \quad (24)$$

となるので, 式(18)から MPTP の近似値は次のように求められる.

$$\mathbf{u}_{\text{MPTP}}^{(1)} = \left(\frac{-6d_1 d_2}{\sqrt{4d_1^2 d_2^2 + d_1^4}}, \frac{-3d_1^2}{\sqrt{4d_1^2 d_2^2 + d_1^4}} \right)^T \quad (25)$$

ここで, 式(21)の関係を用いて, MPTP の近似値を設計変数空間に変換すると,

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(1)} = \mathbf{d} + 0.3 \hat{\mathbf{u}}_{\text{MPTP}}^{(1)} \quad (26)$$

となるので、確定的な最適設計問題の制約 $g_1(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(1)})$ は設計変数を用いて評価ができる．このようにして得られた限界状態関数に対する実行可能領域 $g_j(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)}) \geq 0$ ($j = 1, 2, 3$) と、確定的な最適設計問題を解いて得られた最適解を図 3 に示す．この図から、実行可能領域は限界状態 $g_j(\mathbf{x}) = 0$ ($j = 1, 2, 3$) で囲まれる領域よりも安全側にあることがわかる．さらに、得られた最適解 $(5.85, 3.42)^T$ における信頼性指標を MCS (サンプル数 10^7) で評価すると、 $\beta_1 = \inf$, $\beta_2 = 3.02$, $\beta_3 = 2.99$ となり、信頼性制約をおおよそ満足している．よって、式(20)で示した確定的な最適設計問題を解くことで、信頼性に基づく最適設計問題の最適解が得られることがわかる．

Fig. 3 Deterministic RBDO: limit state functions, feasible region, and optimal solution.

4・2 サンプル点の追加方法

4・2・1 密度関数を利用した追加

大域的な様相を把握するためには、サンプル点が疎な領域を見つけ、そこにサンプル点を追加することでサンプル点をなるべく一様に配置することが有効と考えられる．本研究では、著者の一人が提案した密度関数を利用する方法を採用する (Kitayama et al., 2011)．以下に、その概要を説明する．

訓練データ $\mathbf{X}_k$ に対応する教師データを Y_k ($1, \dots, n_p$) とする．このサンプル点を RBF ネットワークによって学習することで作成される応答曲面 $D(\mathbf{X})$ を密度関数とよび、以下のように表される．

$$D(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{n_p} w_k^D h_k(\mathbf{X}) \quad (27a)$$

$$\text{where: } \mathbf{w}^D = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}^D, \quad (27b)$$

$$\mathbf{w}^D = (w_1^D, \dots, w_{n_p}^D)^T, \quad (27c)$$

$$\mathbf{Y}^D = (1, \dots, 1)^T \quad (27d)$$

密度関数は、教師データが全て 1 であることから、サンプル点間の距離のみでその応答値が決まる．つまり、密度関数の値が小さいほど既存のサンプル点から離れていると考えられる．そのため、密度関数を最小化する点をサンプル点として追加することで、サンプル点の疎な領域への追加が期待できる．

4・2・2 MPTP への追加

本研究では、式(20)で示した確定的な最適設計問題を考えるため、MPTP における限界状態関数の値 $g_j(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)})$ を高い精度で近似することが重要である．そのため、MPTP をサンプル点として追加することは妥当と考えられる．さらに、最適解における MPTP を追加すれば、最適解周辺における応答曲面の局所的な近似精度の向上が期待できる．しかし、限界状態関数の数だけ MPTP は存在するため、限界状態関数の数が増加するにつれて追加するサンプル点数も増加し、効率的とは言えない．そこで、最適解でのアクティブな限界状態関数の中で MPTP における応答曲面の近似精度を比較し、最も近似精度が低い MPTP を追加サンプル点とする．

しかし、応答曲面の近似精度は、実際にサンプル点として追加し、教師データを得ない限り評価できない。そこで、サンプル点の配置から応答曲面の近似精度を予測することにする。つまり、既存のサンプル点付近に MPTP が位置する場合は、MPTP における近似精度が高く、離れた位置にある場合は近似精度が低いと考える。そして、既存のサンプル点と MPTP の位置関係を密度関数の値 $D(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)})$ で評価することにする。密度関数はサンプル点間の距離を反映しているため、密度関数が最小となる MPTP は既存のサンプル点から最も離れた近似精度の低い点と考えることができる。また、応答曲面の近似精度は関数の性質にも依存するため、密度関数の値が高い場合でも近似精度が低いことが考えられる。しかし、逐次的にサンプル点を追加していくことで近似精度は次第に向上していくと考えられることから、得られる最適解への影響は少ない。以上から、アクティブな限界状態関数でかつ、 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}$ における密度関数の値が最小となる点をサンプル点として追加する。

【例題】再び式(21)で示した信頼性に基づく最適設計問題を用いて応答曲面の近似精度を密度関数の値を比較することで判断する方法の妥当性について検証する。ここでは、サンプル点を配置して応答曲面を作成し、確定的な最適設計問題に置き換えて最適解を得た状態を考える。その様子を図 4(a)に示す。なお、応答曲面で近似した目的関数と限界状態関数をそれぞれ $\hat{f}(\cdot), \hat{g}_j(\cdot)$ と表記する。

(a) Distribution of sampling points and optimal solution

(b) Contour of density function

Fig. 4 Comparing approximation accuracy at each MPTP with density function.

得られた最適解において、アクティブな限界状態関数は $\hat{g}_2(\mathbf{x}), \hat{g}_3(\mathbf{x})$ である。どの MPTP を追加サンプル点とするかを判断するため、配置したサンプル点と最適解の位置を訓練データとして密度関数を構築する。構築した密度関数の等高線を図 4(b)に示す。この図より、 $\hat{g}_2(\mathbf{x})$ に対応する MPTP の密度関数の値の方が小さいことがわかるので、 $\hat{g}_2(\mathbf{x})$ の近似精度も低いと予想できる。そこで、アクティブな限界状態関数 $\hat{g}_2(\mathbf{x}), \hat{g}_3(\mathbf{x})$ に対応する MPTP における近似精度を相対誤差で評価すると、それぞれ 100%と 2.6%となり、先ほどの予想は正しいとわかった。以上から、応答曲面の近似精度を密度関数の値を比較することで判断する方法は妥当であると考えられる。

4・3 提案手法の計算手順

図 5 に、提案手法のフローチャートを示す。また、以下に計算手順を示す。

1. 初期サンプル点を配置する。最大サンプル数 n_{max} を決める。
2. 配置されたサンプル点から RBF ネットワークを用いて目的関数と限界状態関数の応答曲面を構築する。
3. 以下の確定的な最適設計問題を解き、最適解をサンプル点に加える。

$$\text{Minimize: } \hat{f}(\mathbf{d}) \quad (28a)$$

$$\text{subject to: } \hat{g}_j(\hat{\mathbf{x}}_{\text{MPTP}}^{(j)}) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (28b)$$

$$d_i^L \leq d_i \leq d_i^U \quad (i = 1, \dots, n) \quad (28c)$$

4. サンプル数が最大サンプル数を超えていれば終了. そうでなければ, 5. に進む.
5. 密度関数を利用してサンプル点を追加する.
 - 5.1 密度関数を式(27)から構築する.
 - 5.2 密度関数によるサンプル数の追加数が $n/2$ を超えれば終了. そうでなければ, 5.3 に進む.
 - 5.3 密度関数を最小化する点を探索し, サンプル点として追加する.
6. 密度関数の値が最小となる MPTP を追加サンプル点とする.
 - 6.1 アクティブな限界状態関数に対して, それぞれの MPTP を式(18)と式(19)から求める
 - 6.2 MPTP における密度関数の値を評価し, 最小値をとる MPTP をサンプル点として追加する.
7. 2. へ戻る.

Fig. 5 Flow of proposed method.

5. 数値計算例

本章では, 数値計算例を通して提案手法の有効性を検証する. 本研究では, 大域的最適解を探索するための多点同時探索手法として, DE (Differential Evolution) を利用した.

5・1 数値計算例 1: Modified-Haupt problem (複数の局所最適解を持つベンチマーク問題)

以下に示す 2 次元の信頼性に基づく最適設計問題を考える.

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) = (d_1 - 3.7)^2 + (d_2 - 4)^2 \quad (29a)$$

$$\text{subject to: } P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_j^{\text{Tar}}) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (29b)$$

$$0 \leq d_1 \leq 3.7 \quad (29c)$$

$$0 \leq d_2 \leq 4 \quad (29d)$$

$$\text{where: } g_1(\mathbf{x}) = -x_1 \sin(4x_1) - 1.1x_2 \sin(2x_2) \quad (29e)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2.5)^2 - 0.3 \quad (29f)$$

ただし, 目標の信頼性指標を全て 2 とし, 確率変数は互いに独立な正規分布に従い, 標準偏差は全て 0.1 である.

この問題の目的関数の等高線, 限界状態関数ならびに最適解を図 6 に示す. 問題の特徴として, 実行可能領域が分離しており, 局所最適解 2 つと大域的最適解が存在するため, 初期点を適切に設定しなければ大域的最適解を探索できないことが知られている. 表 1 に 3 つの最適解の値を示す.

Fig. 6 Numerical example 1: contour of objective function, limit state functions, and optimal solutions.

Table 1 Global and local optimal solutions.

	d_1	d_2	Objective
Global optimal solution	2.8421	3.2320	1.3259
Local optimal solution 1	1.4374	2.9925	6.1342
Local optimal solution 2	1.5393	1.9111	9.0323

この問題に対して、LHS (Latin Hypercube Sampling) による初期サンプル点数を 10、最大サンプル点数を 20 として最適解を探索した。なお、初期サンプル点数と最大サンプル点数は先行研究(Liu et al., 2017) (Liu et al., 2018) を参考に設定した。また、初期サンプル点配置への依存性を確認するため、10 種類の異なる配置に対してそれぞれ最適化を行い、その平均を先行研究での結果と比較した。その結果を表 2 に示す。ただし、信頼性指標は MCS (サンプル数 10^7) で評価した。表 2 より、先行研究と同程度のサンプル数で、大域的最適解が得られていることがわかる。さらに、標準偏差が小さいことから、初期サンプル点配置への依存も小さいと考えられる。

Table 2 Optimization results comparing with previous studies in numerical example 1.

	d_1	d_2	Objective	Sample	β_1	β_2
LR-RBDO (Liu et al., 2017)	2.8236	3.2687	1.3030	22	1.961	4.374
AS-RBDO (Liu et al., 2018)	2.8239	3.2692	1.3018	19	1.870	inf
This study (Standard deviation)	2.9284 (0.04)	3.1139 (0.07)	1.3867 (0.07)	22	1.947 (0.14)	inf (-)

図 7 に、最終的なサンプル点配置の様子を示す。図 7 の網目部分は確定的な最適設計問題に変換した際の実行可能領域を表している。追加サンプル点に注目すると、得られた大域的最適解の周辺、特に限界状態上に追加サンプル点が集中していることが拡大図からわかる。ここで、得られた大域的最適解のアクティブな限界状態関数 $g_1(\mathbf{x})$ に対応する MPTP の近似精度を相対誤差で評価したところ、3.3%となった。これは、MPTP に集中的に追加したサンプル点によって、近似精度が向上した結果と考えられる。さらに、定性的ではあるが、追加サンプル点の一部は大域的最適解と離れた場所にあり、設計空間全体にサンプル点を配置できている。これにより、実行可能領域が分離しているというこの問題の大域的な様相も捉えられていると考えられる。

Fig. 7 Distribution of samples, global optimum, and approximated feasible region.

5・2 数値計算例2: Welded-beam problem (工学的なベンチマーク問題)

図8に示す片持ちはりの溶接部の設計を考える。

Fig. 8 Welded-beam problem.

溶接コストを最小化しつつ、破損確率の制約を考慮して4つの寸法の期待値 $\mathbf{d}$ を決定する問題となっており、以下のように定式化される。

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) = c_1 d_1^2 d_2 + c_2 d_3 d_4 (z_2 + d_2) \quad (30a)$$

$$\text{subject to: } P[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta_j^{Tar}) \quad (j = 1, \dots, 5) \quad (30b)$$

$$d_i^L \leq d_i \leq d_i^U \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (30c)$$

$$\text{where: } g_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\tau(\mathbf{x})}{z_6}, \quad (30d)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\sigma(\mathbf{x})}{z_7}, \quad (30e)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x_1}{x_4}, \quad (30f)$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\delta(\mathbf{x})}{z_5}, \quad (30g)$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \frac{P_c(\mathbf{x})}{z_1} - 1 \quad (30h)$$

ただし、目標の信頼性指標を全て3とし、確率変数は互いに独立な正規分布に従うものとする。確率変数の標準偏差と設計変数の側面制約を表3に示す。また、式(30a)の目的関数において、 c_1, c_2 は溶接作業コストと材料コストのパラメータである。また、限界状態関数内の $\tau(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$, $\delta(\mathbf{x})$, $P_c(\mathbf{x})$ は、それぞれ最大せん断応力、最大垂直応力、先端変位、座屈荷重で、パラメータ $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_7)^T$ から評価できる。パラメータの値を表4に示す。

Table 3 Boundary constraints and standard deviation of each length in numerical example 2.

i	1	2	3	4
d_i^L [mm]	3.175	0	0	0
d_i^U [mm]	50.8	254	254	50.8
Standard deviation	0.1693	0.1693	0.0107	0.0107

Table 4 Parameters in numerical example 2.

Parameters	Value	Property
c_1 [\$/mm ³]	$6.74135 \cdot 10^{-5}$	Welding cost
c_2 [\$/mm ³]	$2.93585 \cdot 10^{-6}$	Material cost
z_1 [N]	$2.6688 \cdot 10^4$	Load (F)
z_2 [mm]	$3.556 \cdot 10^2$	Length of cantilever
z_3 [MPa]	$2.0685 \cdot 10^5$	Young's modulus
z_4 [Mpa]	$8.274 \cdot 10^4$	Shear modulus
z_5 [mm]	6.35	Tolerance of tip displacement
z_6 [Mpa]	$9.377 \cdot 10^1$	Tolerance of shearing stress
z_7 [Mpa]	$2.0685 \cdot 10^2$	Tolerance of normal stress

この問題に対して、LHS を用いて初期サンプル点を 30 点配置し、最大サンプル点数を 60 として最適解を探索した。なお、初期サンプル点数と最大サンプル点数は先行研究(Ju and Lee, 2008) (Meng et al., 2019)を参考に設定した。その結果を表 5 に示す。表 5 中の PMA (Performance Measure Approach) (Tu and Choi, 1999) は、関数形を既知として探索した結果である。なお、信頼性指標は MCS (サンプル数 10^7) で評価した。

Table 5 Optimization results comparing with previous studies in numerical example 2.

(a) Optimal solutions, objective function value and number of samples

	d_1	d_2	d_3	d_4	Objective	Sample
PMA	5.730	200.898	210.598	6.239	2.5913	—
Moment-based RBDO (Ju and Lee, 2008)	5.730	200.602	210.598	6.239	2.5895	341
AK-ACSLA (Meng et al., 2019)	5.731	200.665	210.615	6.237	2.5893	66
This study	5.855	197.747	210.610	6.441	2.6506	62

(b) Reliability index

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
PMA	2.999	3.007	3.002	inf	3.005
Moment-based RBDO (Ju and Lee, 2008)	2.981	2.912	2.983	inf	2.828
AK-ACSLA (Meng et al., 2019)	2.965	3.007	3.002	inf	3.005
This study	3.381	inf	3.278	inf	inf

表 5 から、提案手法は比較的少ないサンプル数で先行研究と同様に大域的最適解を得られているとわかる。また、関数形を既知として探索した PMA ともおおよそ一致する結果となっている。この結果から、提案手法の有効性の一端が示された。サンプル点数が比較的少ない理由として、大域的な様相を把握しながら最適解を探索するため、大域的最適解の周辺を早く見つけられる可能性があること、そして局所的な近似精度向上のために複数のサンプル点を追加しないことが考えられる。

5・3 数値計算例 3: 変位拡大機構の設計問題

図 9 に示すコンプライアントメカニズム化された変位拡大機構の設計問題を考える (Ito et al., 2018)。

Fig. 9 Displacement amplifier design problem (unit: [mm]).

この変位拡大機構は、形状可変鏡と呼ばれる軌道上で鏡面形状を制御するアンテナシステムに搭載することを目的に研究開発が進められている。ここでは、底部を完全固定して入力部 A に 0.1mm の強制変位を加えたときに、出力部 B に生じる出力変位を最大化することを目的とする。また、変位拡大機構の破損はアンテナシステム全体に深刻な影響を及ぼすことから、最大応力に対して破損確率の制約を課す。確率変数ベクトル $\mathbf{x}$ は、製作誤差を不確実性としてモデル化した寸法であり、設計変数 $\mathbf{d}$ はその期待値とする。以上から、最適設計問題は次のように定式化される。

$$\text{Minimize: } f(\mathbf{d}) = (\text{output displacement}) \quad (31a)$$

$$\text{subject to: } P[g(\mathbf{x}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^{Tar}) \quad (31b)$$

$$d_i^L \leq d_i \leq d_i^U \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (31c)$$

$$\text{where: } g(\mathbf{x}) = 300 \text{ MPa} - (\text{Maximum stress}) \quad (31d)$$

ただし、目標の信頼性指標を 3 とし、確率変数は互いに独立な正規分布に従うものとする。確率変数の標準偏差と設計変数の側面制約を表 6 に示す。また、材料物性はヤング率 167 GPa, ポアソン比 0.3 とした。

Table 6 Boundary constraints and standard deviation of each length in numerical example 3.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i^L [mm]	85.0	18.0	18.0	45.0	0.5	0.5	2.0	2.0
d_i^U [mm]	125.0	25.0	25.0	80.0	1.5	2.0	8.0	8.0
Standard deviation	0.200	0.312	0.0722	0.0395	0.0204	0.0258	0.0729	0.231

この問題に対して、LHS を用いて初期サンプル点を 30 点配置し、最大サンプル数を 65 として得られた最適解を表 7 に示す。なお、最大サンプル点数は構造解析にかかる時間を考慮して決定した。また、最適形状とその変形図ならびに von Mises 応力のコンターを図 10 に示す。図 10(b)に示すように、最適形状の出力変位は 0.82 mm となった。変形図から、入力部が押し上げられて機構が内側に倒れ、柔軟ヒンジ (flexural hinge) が回転することで、変位が出力部で拡大される様子がわかる。また、変形時にかかる最大応力は、255.3 MPa となった。このときの信頼性指標を MCS (サンプル数 10^3) で評価すると 3.06 となり、信頼性制約を満たすことも示された。図 10(c)に示すように、変形時は、比較的部材が薄く、柔軟性が高い部材に高い応力が発生している。一般的に、コンプライアントメカニズムでは、柔軟性の高い部分を設けることで変形量を大きくする一方で、その部分に応力が集中して破損することが問題となる。しかし、今回得られた最適形状は、応力による破損に対して安全余裕が十分確保されていること ($\Phi(-\beta) = 1.2\%$) から、アンテナシステムに搭載する変位拡大機構として望ましいといえる。

Table 7 Optimization result in numerical example 3.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i [mm]	96.75	20.46	18.58	51.28	0.79	1.06	5.70	7.43

Fig. 10 Optimal configuration, deformation, and von Mises stress.

6. 結 言

本研究では、応答曲面を利用した信頼性に基づく大域的最適化手法を提案した。多点同時探索による大域的最適解の探索を効率的に行うため、信頼性に基づく最適設計問題を確定的な最適設計問題に変換し、破損確率の評価による二重ループを解消した。また、密度関数を利用してサンプル点の疎な領域に新たなサンプル点を追加する方法と応答曲面の近似精度が低い MPTP を密度関数から判別して追加サンプル点とする方法を提案し、大域的な様相の把握と局所的な近似精度の向上を目指した。ベンチマーク問題を通して提案手法の有効性を検証し、初期サンプル点の配置に依存せずに大域的最適解を得られることを示した。追加されたサンプル点によって、大域的な様相の把握と局所的な近似精度の向上が可能であることを確認した。工学的なベンチマーク問題と変位拡大機構の設計問題を通して、提案手法の工学問題への適用可能性を示した。また、本研究で扱った数値計算例の範囲内で、提案手法は少ないサンプル点数で大域的最適解を探索する上で有効であるとわかった。

謝 辞

本研究は、JSPS 科研費 JP20K14637 の助成を受けたものである。

References

- Chen, Z., Qiu, H., Gao, L., Li, X. and Li, P., A local adaptive sampling method for reliability-based design optimization using kriging model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 49, No. 3 (2014), pp. 401–416.
- Chen, Z., Peng, S., Li, X., Qiu, H., Xiong, H., Gao, L. and Li, P., An important boundary sampling method for reliability-based design optimization using kriging model, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 52, No. 1 (2015), pp. 55–70.
- Choi, S. K., Grandhi, R. V. and Canfield, R. A., *Reliability-based Structural Design*, Springer-Verlag London (2007).
- Dubourg, V., Sudret, B. and Bourinet, J. M., Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 44, No. 5 (2011), pp. 673–690.
- Hu, W., Choi, K. K. and Cho, H., Reliability-based design optimization of wind turbine blades for fatigue life under dynamic wind load uncertainty, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 54 (2016), pp. 953–970.
- Ito, M., Kim, N. H. and Kogiso, N., Conservative reliability index for epistemic uncertainty in reliability-based design optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 57 (2018), pp. 1919–1935.
- Jones, D., Schonlau, M. and Welch, W., Efficient global optimization of expensive black-box functions, *Journal of Global Optimization*, Vol. 13 (1998), pp. 455–492.
- Ju, B. H. and Lee, B. C., Reliability-based design optimization using a moment method and a kriging metamodel, *Engineering Optimization*, Vol. 40, No. 5 (2008), pp. 421–438.
- Kitayama, S., Arakawa, M. and Yamazaki, K. Sequential Approximate Optimization using Radial Basis Function network for engineering optimization. *Optimization and Engineering*, Vol. 12 (2011), pp. 535–557.
- Lee, T. H. and Jung, J. J., A sampling technique enhancing accuracy and efficiency of metamodel-based RBDO: Constraint boundary sampling, *Computers and Structures*, Vol. 86, No. 13–14 (2008), pp. 1463–1476.
- Li, X., Qiu, H., Chen, Z., Gao, L. and Shao, X., A local Kriging approximation method using MPP for reliability-based design optimization, *Computers and Structures*, Vol. 162, No. 1 (2016), pp. 102–115.
- Liu, X., Wu, Y., Wang, B., Ding, J. and Jie, H., An adaptive local range sampling method for reliability-based design optimization using support vector machine and Kriging model, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 55, No. 6 (2017), pp. 2285–2304.
- Liu, X., Wu, Y., Wang, B., Yin, Q. and Zhao, J., An efficient RBDO process using adaptive initial point updating method based on sigmoid function, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 58, No. 6 (2018), pp. 2583–2599.
- Meng, Z., Zhang, Z., Zhang, D. and Yang, D., An active learning method combining kriging and accelerated chaotic single loop approach (AK-ACSLA) for reliability-based de-sign optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 357 (2019), DOI: 10.1016/j.cma.2019.112570.
- Tu, J. and Choi, K. K., A New Study on Reliability Based Design Optimization, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 4 (1999), pp. 557–564.
- Youn, B. D., Choi, K. K. and Gu, L., Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26 (2004), pp. 272–283.
- Youn, B. D. and Choi, K. K., A new response surface methodology for reliability-based design optimization, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. 2–3 (2004), pp. 241–256.
- Zhuang, X. and Pan, R., A sequential sampling strategy to improve reliability-based design optimization with implicit constraint functions, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 134, No. 2 (2012), pp. 1–10.