ラティスサンドイッチパネルの熱座屈に関する研究
(第1報, 2種類の座屈モードの存在と評価)瀬畑 勇樹^{*1}, 牛島 邦晴^{*2}Study on thermal buckling temperature of a lattice sandwich panel
(1st Report, Existence and evaluation of two types of buckling modes)Yuki SEBATA^{*1} and Kuniharu USHIJIMA^{*2}^{*1} Graduate School of Tokyo University of Science, 6-3-1 Nijuku, Katsushika-ku, Tokyo 125-8585, Japan^{*2} Tokyo University of Science, 6-3-1 Nijyuku, Katsushika-ku, Tokyo 125-8585, Japan

Received: 2 September 2021; Revised: 28 November 2021; Accepted: 20 December 2021

Abstract

In this study, the critical buckling temperature of a lattice sandwich panel was investigated by using FEM. In particular, the effects of geometric properties, for example a core height h , a core length L , and the number of cells N_c on the buckling temperature, were discussed. It is confirmed that the lattice sandwich panel also has the global and local buckling modes that are common in a latticed members, and a correction factor which includes the effect of the number of cells N_c is presented for estimating the global buckling temperature of the panel. Multiplying the analytical equation of the buckling temperature which was derived from the conventional homogenization method by the correction factor, the buckling temperature can be estimated with a good accuracy. On the other hand, the local buckling temperature can be estimated by considering the buckling behaviour of a small plate surrounded by the cells and supported by four corners.

Keywords : Lattice, Sandwich panels, Thermal buckling, Critical buckling temperature, Global and Local buckling, FEM

1. 緒 言

近年、民間主導の宇宙開発の加速や従来の旅客機を超えた高速移動への期待の高まりから、超音速機や大気圏に再突入する宇宙船の開発が再興している。これらの機体の外皮構造は燃焼室近傍の熱や空力加熱により非常に高温になり、熱座屈変形を生じる場合がある。熱座屈とは、構造部材に熱負荷が生じた際、熱膨張変形を阻害するために熱応力が圧縮応力として作用し、それにより部材の一部あるいは全体が座屈する現象を指す。熱座屈による変形は機械としての機能の損失につながるだけでなく、構造部材の破壊や損傷につながる等、重大な事故に繋がる原因ともなり得るため、熱座屈現象を回避した機械・構造物の設計が重要といえる。すなわち、熱負荷を受ける機械構造物の熱座屈が発生する臨界温度を正しく見積もり、その挙動を解明することはますます重要になると考えられる。

平板の熱座屈に対しては古くから多くの研究が報告されている (Gossard et al., 1952)。例えば、松本らは緩やかな曲率を有する長方形および平行四辺形パネルについて、ガレーキン法を適用した数値解析を用いて実測温度分布を基に熱変形挙動を明らかにし、長方形と平行四辺形とでパネルの熱座屈臨界温度を比較した (松本, 関谷, 1973)。また、石田らは部分的な熱負荷を受ける長方形平板の熱変形解析のための熱伝導方程式を導出し、得られた熱応力

No.21-00273 [DOI:10.1299/transjsme.21-00273], J-STAGE Advance Publication date : 7 January, 2022

^{*1} 学生員, 東京理科大学大学院 工学研究科 (〒125-8585 東京都葛飾区新宿 6-3-1)^{*2} 正員, 東京理科大学 工学部

E-mail of corresponding author: kuniharu@rs.tus.ac.jp

分布を入力した座屈固有値解析を行い、板表面から部分的に一樣な熱の授受がある場合の熱座屈問題を解き、座屈時刻の予測を行っている(石田, 藤田, 2013)。

一方、熱座屈現象を防ぐための設計として、複数の材料による積層構造やサンドイッチ構造の利用が挙げられる。サンドイッチ構造とは、ハニカムやフォームといった軟質のコアを硬質の面板で挟みこんだ構造で、軽量でかつ高剛性・高強度な材料特性を実現できる。そのため、上述の超音速機などの外皮構造への応用も期待されている。サンドイッチパネルは航空機の機体や鉄道車両の車体、熱交換器などとしてすでに実用化されており、その熱座屈特性についても、上記の理由から多くの研究が存在する。例えば、康井らはクロスプライ積層平板の熱座屈特性を数値解析を用いて明らかにした(康井他, 1995)。また、Nasution らは Al ハニカム構造をコアとし、CFRP 面板で挟み込んだ CFRP-Al サンドイッチパネルの熱座屈特性について、均質化一局所化解析を用いて幾何学的形状や材料構成の影響を検討した(Nasution et al., 2015)。さらに、Chen らは pyramid 構造をコアに持つサンドイッチパネルについて、パネル全体として座屈する場合の座屈臨界温度の理論式を導出し、コア形状やパネル寸法による座屈臨界温度への影響を理論的に検討したほか、得られた理論式を用いて形状最適化の手法を示した(Chen et al., 2013)。これら数値解析においては計算コストを抑えるため、ユニットセルの形状を直接用いず、コア全体のヤング率やせん断係数といった等価物性を用いた均質化解析が行われている。実験に基づく検討については、Rakow と Wass が Al フォーム材をコアとしたサンドイッチパネルの熱座屈挙動に対し、鋳鉄製のフレームを用いパネルとフレームの熱膨張係数の差を利用して周辺固定支持の境界条件を再現した実験を行い、理論的に算出された座屈臨界温度と比較・検討した(Rakow and Wass, 2004)。

一方、近年の AM (Additive Manufacturing) 技術の著しい進展により、金属 3D プリンタを用いて複雑な構造を容易に造形できるようになったことから、数百 μm オーダーの直径を有する梁を複数組み合わせたラティス構造が注目されている。これはラティス構造が従来のコア形状と異なり、コア形状そのものやコアの設計変数を決定する際の自由度が高く、構造部材として請け負う負荷だけでなく振動吸収、熱流動特性などの設計時の懸念事項に対して最適な形状および寸法を決定できるメリットがあるためである。しかしラティスをコアに持つサンドイッチパネルの熱座屈挙動について論じたものは報告が少ない。例えば Chen らは先述のように計算コスト軽減の観点からトラスコアを均質な連続体とみなした等価物性を用いてパネル全体の座屈挙動を検討している(Chen et al., 2013)が、座屈は本来微細な内部構造の幾何形状にも影響を受けると考えられる。そのため、微細な構造を直接モデル化して座屈臨界温度を求め、均質化解析による先行研究結果と比較し、予測精度の検証と改善を行う必要がある。

そこで、本研究では、均一な熱負荷を受ける pyramid 構造をコアに持つサンドイッチパネルについて、有限要素法に基づく数値シミュレーション解析を用い、コアを均質化しないモデルの場合の幾何形状による座屈モードの違いや、各モードにおける座屈臨界温度の予測式を検討する。なお、本報告では Chen らが検討したトラス構造と同じ幾何特性を持つ問題について解析・検討を行う。この条件は軟質なコアと硬質な面板において広く用いられる仮定である(Allen, 1969)。ただし、軟質でないコアと面板とを接合する場合、その境界条件には改善の必要がある。この点についてはコア形状の違いが及ぼす熱座屈特性の影響と合わせ、次報で詳しく述べる。

2. 解析モデルおよび解析方法

本研究では、ラティスサンドイッチパネルの熱座屈問題について、汎用有限要素法 (FEM) 解析ソフトウェア MSC.Marc 2020 の座屈固有値解析の機能を用いて解析を行った。図 1 にラティスサンドイッチパネルの解析モデルの概要を示す。

検討するパネルは、長さ $a \times b$ 、厚さ t の 2 枚の長方形面板によって挟まれる形で pyramid コアを $N_{cx} \times N_{cy}$ 個周期的に配列した構造である。ユニットセルに注目すると、pyramid コアは、図 1(b) に示すように 1 辺の長さが s [mm] の正方形断面を持つ梁 4 本により構成されている。コアの均質化がサンドイッチパネルの座屈臨界温度にもたらす影響を調べるために、本解析では先行研究(Chen et al., 2013)と同様の寸法、物性値を持つ pyramid コアサンドイッチパネルとした。各幾何パラメータを表 1 に示す。

面板およびコア材は鉄鋼材料を想定し、常温における材料物性値はそれぞれ、ヤング率 $E = 210 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、熱膨張係数 $\alpha = 12.0 \times 10^{-6} / \text{K}$ とした。本報告においてサンドイッチパネルに使用される材料として想定している鉄鋼材料は、本来であれば材料物性値の温度依存性を考慮せねばならない。しかし、本 FEM 解析で

Fig. 1 Analysis model of a pyramid sandwich panel.

Table 1 Basic geometrical parameters of a pyramid sandwich panel.

Geometrical parameters	
Panel's length of x direction a [mm]	1060
Panel's length of y direction b [mm]	1060
Thickness of the face sheet t [mm]	2.5
Core height h [mm]	variable
Core size L [mm]	42.4
Side length of the square cross section beam s [mm]	4

は温度依存性を無視して固有値解析を行い、得られた座屈臨界温度 ΔT_{cr} に熱膨張係数 α を乗ずることで無次元化した $\alpha \Delta T_{cr}$ の形で表現することで、形状パラメータのみに依存する値として座屈温度を得られるものとした。座屈温度 $\alpha \Delta T_{cr}$ から実際の座屈温度 ΔT_{cr} を導出する方法は第2報にて述べる。

なお、座屈温度へのマイクロ構造の影響調査のために、コア部のメッシュタイプには後述の先行研究の均質化理論における仮定2を満足する2節点トラス要素を用いた。また、面板は4節点シェル要素を用い、ユニットセルにつき 10×10 分割としてモデル化を行った。面板の分割数は座屈臨界温度が一定値に収束する最小のものとした。

3. 解析結果

以下ではまず、Chen らの均質化理論による座屈臨界温度の理論解 (Chen et al., 2013) の概要を説明し、FEM による解との比較を行いながらその精度を検証する。

3.1 Chen らによる熱座屈理論

Chen らはトラス構造をコアに持つサンドイッチパネルの座屈臨界温度の理論式を導出するに当たり、以下の仮定が成立するものとして座屈温度を算出した (Chen et al., 2013)。

1. 面板は薄いコア材より非常に剛性が高いので、面板内の横せん断変形は無視できる。
2. コア材と面板はピン接合であり、コア材による全体の曲げ剛性への寄与がない。
3. コア部材と面板は微小変形かつ線形弾性の状態とする。
4. 中立面に直交する線は変形下でも直線であり続けるが、横せん断変形により回転する。
5. サンドイッチパネルはこの仮定を行うのに十分な長さ・幅方向のユニットセルを持つ。

以下ではコアを均質化し、等価な物性を持つ連続体であると仮定して座屈臨界温度の理論解を導出する。

全周単純支持され、均一に加熱されることにより温度が ΔT 上昇するサンドイッチパネルの熱座屈の支配方程式

は、次のように与えられる (Chen et al., 2013).

$$\left(1 + \frac{N_x}{C}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 + \frac{N_y}{C}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(2 + \frac{N_x + N_y}{C}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2N_{xy}}{C} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}\right) - \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (1)$$

ここで、 C はコアの等価せん断剛性であり、コアの等価せん断弾性係数 G とすると、 $C = Gh$ と表される。pyramid 型コアの場合、等価せん断弾性係数 G_{pyramid} は次のように表される。

$$G_{\text{pyramid}} = \frac{Es^2 \sin^3 \theta}{h^2} \quad (2)$$

ここで、式 (1) 中の D はサンドイッチパネルの等価曲げ剛性であり、

$$D = 2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+t} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz = \frac{EtH^2}{2(1-\nu^2)} + \frac{Et^3}{6(1-\nu^2)} \quad (3)$$

と記述される。ただし、 $H = h + t$ である。また、式 (1) 中の N_x , N_y および N_{xy} はそれぞれ x , y , xy 方向に沿った内力である。Mayers および Hyer の研究によると、均一温度場における内力は、

$$N_x = N_y = -\frac{N_T}{1-\nu}, N_{xy} = 0 \quad (4)$$

と書ける (Mayers and Hyers, 1991)。ここで、 N_T は熱応力の合力であり、次のように記述される。

$$N_T = \int_{-\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}+t} E\alpha\Delta T dz = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+t} E\alpha\Delta T dz + \int_{-\frac{h}{2}-t}^{-\frac{h}{2}} E\alpha\Delta T dz = 2E\alpha t\Delta T \quad (5)$$

周辺を単純支持された長方形板の変形状 $w(x,y)$ は次のように表される。

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

式 (4), (5) および (6) を式 (1) に代入すると、

$$\alpha\Delta T = \frac{1-\nu}{2Et} \left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{\pi^2 D} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad (7)$$

$\alpha\Delta T$ は $m = n = 1$ の時に最小値をとり、これを無次元化座屈臨界温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ と呼ぶ。すなわち、

$$\alpha\Delta T_{cr} = \frac{1-\nu}{2Et} \left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{\pi^2 D} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad (8)$$

となる。ここで、コアのせん断変形を無視できるほどせん断剛性 C の値が大きい場合、式 (8) 中の $1/C$ の項を無視できる。この時、サンドイッチパネルの無次元化座屈臨界温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ は次のように表される。

$$\alpha\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 D(1-\nu)}{2Et} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (9)$$

3.2 2種類の座屈モードの存在

図2に pyramid コアサンドイッチパネルの解析結果から得られたコア高さ h/a と座屈温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ の関係を示す。図2を見ると、著者らが行ったコアを均質化しないモデルによる解析結果は、 $h/a = 0.02$ 付近までは式(9)と定性的に一致する傾向を示すが、 $h/a = 0.02$ 以降の座屈温度はほぼ一定値で頭打ちとなった。このような座屈温度の傾向の変化はその前後で熱座屈の変形モードが変化したことが原因である。

図3に本研究で確認された3種類の変形モードの変形図を示す。図3(a)に示す全体座屈モードはパネル全体として凹みを生じるモードであり、連続体板の熱座屈と同じ変形形状である。これに対し、図3(b)に示す部分座屈モードはパネル全体としてではなく、面板が局所的に座屈を生じる変形モードである。さらに、図3(c)に示す混合モードは、パネル全体としての座屈に面板の局所的な座屈が混じった変形モードであり、全体座屈モードから部分座屈モードへ遷移する際に生じる。これらのモードはフレームで補強された板で良くみられる全体座屈 (global buckling), 部分座屈 (local buckling) および混合座屈 (compound buckling) に対応する (Bazant and Cedolin, 2010)。本論文では全体および部分座屈モードに注目し、次章にて詳細な検討を行う。

Fig. 2 Comparison of thermal buckling temperature obtained from theoretical equations (8) and (9), which are based on the homogenization process proposed by Chen et al.(2013) with FE results.

Fig. 3 Three types of buckling mode.

4. 考察および検討

4.1 全体座屈モードについての検討

図2を見ると、全体座屈モードでは式(9)と似た傾向が見られるが、定量的には一致していないことがわかる。これはChenらの理論では考慮されていないサンドイッチパネルに含まれるセル数 N_c による影響が存在するためと考えられる。そこで、パネル全体の長さ $a=b=1060$ mmを固定し、セルサイズ L ならびに x, y 方向のセル数を $N_c=20, 30, 40, 50$ と変化させた場合の解析を行った。図4にその結果を示す。図4を見ると、全体座屈モードではセル数 N_c が20から50へ大きくなるにつれて座屈温度が上昇していることがわかる。このようなセル数によ

Fig. 4 Effect of the number of cells N_c on the buckling temperature for the global buckling mode.

る違いはコアを均質化すると見られなくなるため、座屈温度の評価としては不十分である。そこで、本FEM結果をもとに座屈温度の適切な評価を行うための修正係数 β を導入し、Chenらによる理論式(8)あるいは(9)にセル数 N_c に応じた修正係数 β を乗ずることにより、FEM結果とよく一致するような理論式の修正を試みる。

まず、セル数 N_c に依存する修正係数であることを確認するために、セル数 $N_c=30$ を一定とし、パネル長さ a およびセル長さ L を $a=1060, 530, 265$ mmを満たすように変化させた場合の座屈温度とその修正係数の変化を、本FEM結果と式(8)を用いて検討する。図5にセル数 $N_c=30$ の場合のコア高さ h/a と座屈温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ の関係を示す。なお、図5(a)~(b)はそれぞれ、修正係数を導入しない場合の理論式と本FEM結果、および修正理論式と本FEM結果である。

図5に示すように、セル数 $N_c=30$ においてある一つの修正係数 $\beta=1.59$ を設定することで、いずれのパネル長さ $a=1060, 530, 265$ mmの場合においても修正理論式とFEM結果がよく一致した。以上の結果を踏まえ、セル数 N_c に応じた修正係数は、 $N_c=30$ においては $\beta=1.59$ とする。同様に、セル数 $N_c=20, 40, 50$ に対しても修正係数を求め、表2にまとめる。なお、各修正係数は全体座屈モードにおける相対誤差が5%以内に収まるように各セル数のグラフ内にて検討を行い、決定した。紙面の制約上、セル数 $N_c=20, 40, 50$ に対するグラフは省略する。

Table 2 Effects of the number of cells N_c on the correction factor β .

Number of cells N_c	Correction factor β
20	1.48
30	1.63
40	1.70
50	1.75

Fig. 5 Prediction of buckling temperature for the global buckling mode under the number of cells $N_c = 30$ by introducing the correction factor β , which is based on the effect of the number of cells N_c in a sandwich panel.

実際に表 2 の修正係数をセル数の逆数 $1/N_c$ を変数として線形近似すると、修正係数の式は

$$\beta(N_c) = 1.9268 - \frac{8.9317}{N_c} \quad (N_c \geq 20) \quad (10)$$

のように表される。ただし、セル数 N_c の範囲は今回検討を行った $N_c \geq 20$ を満足するものとする。

Fig. 6 Relationship between non-dimensionalized core height h/a and critical temperature difference $\alpha\Delta T_{cr}$ for lattice sandwich panel under different number of cells N_c and its prediction with correction factor β .

式 (10) を式 (8) や式 (9) に乗じた式 (11) を用いて各セル数 $N_c = 20, 30, 40, 50$ においてパネル長さ $a = 1060, 530, 265$ mm と変化させたときのコア高さ h/a と座屈温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ の関係を相対誤差の最大値 $\text{error} [\%]$ の値とともに図 6 に示す。図 6 の通り、修正係数 β の式 (10) を用いた理論式 (11) と FEM 結果の誤差は最大でも 5% 以内に収まったので、式 (10) はサンドイッチパネルの座屈温度の評価においてセル数 N_c に依存する修正係数として有効であると言える。

ここで、修正係数がセル長さ L に依存するものではなく、セル数 N_c によるものであることを確認するために、セル長さ L を固定し、セル数 N_c を 20, 40, 60 と変化させたモデルを用意し、FEM 解析により得られた値と修正係数の式 (10) を用いた理論式 (11) とを比較した。セル長さ $L = 13.25, 26.5, 53.0$ mm の 3 種類を用意して解析を行った結果を図 7 に示す。図 7 のいずれの場合においても修正理論と FEM 結果はグラフの範囲内では相対誤差 10% 以内を満足しており、よく一致している。したがって、修正係数 β はセル長さ L ではなく、セル数 N_c に強い依存性があるといえる。

Fig. 7 Relationship between non-dimensionalized core height h/a and critical temperature difference $\alpha\Delta T_{cr}$ for lattice sandwich panel under different cell size L and its prediction with correction factor β .

なお、ここまでの修正係数の議論はパネル長さが $a = b$ を満たす正方形の場合について成り立つものであった。そこで、パネル長さが $a \neq b$ の長方形形状になることによる修正係数への影響を調査するために、セル長さ $L = 26.5 \text{ mm}$ が x, y 軸方向で等しいユニットセルを持ち、 x 軸方向セル数 $N_{cx} = 40$ を固定し、 y 軸方向セル数を $N_{cy} = 20, 40, 80$ と変化させた長方形パネルに対して解析を行った。その結果を図 8 に示す。図 8 において、修正係数としてはパネル長さが長い方のセル数を採用することにより、全体座屈モードでは修正理論式と FEM 結果がよく一致している。したがって、長方形パネルの場合にはパネル長さが長い方のセル数 N_c を式 (10) に代入した修正係数を用いることで高精度に全体座屈モードの座屈温度を予測できる。

Fig. 8 Effect of the difference in the number of cells in the x - and y -axis directions on the correction factor β .

以上をまとめると、Chen らによる均質化法に基づく座屈臨界温度 $\alpha\Delta T_{cr}$ は、全体座屈モードの値を定性的に予測することはできるが、セルの個数などの影響を考慮した修正係数が必要となる。微細構造の幾何形状を考慮した本数値解析結果により、全体座屈モードを生じる場合の座屈臨界温度は、以下の式で精度よく予測できる。

$$\alpha\Delta T_{cr} = \left(1.9268 - \frac{8.9317}{N_c} \right) \frac{1-\nu}{2Et} \left\{ \frac{1}{C} + \frac{1}{\pi^2 D} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad (N_c \geq 20) \quad (11)$$

$$\alpha\Delta T_{cr} = \left(1.9268 - \frac{8.9317}{N_c} \right) \frac{\pi^2 D(1-\nu)}{2Et} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (N_c \geq 20) \quad (12)$$

4.2 部分座屈モードについての検討

以下では、パネル全体が座屈する変形モードではなく、面板が局所的に座屈する部分座屈モードについて、コア部のメッシュタイプとしてトラス要素を用いた場合の局所的なモデル化を行い、部分座屈発生温度の理論式を導出し、FEM 解析で得られた値を用いて比較・検討を行う。なお、部分座屈発生温度 $\Delta T_{cr-local}$ とは、全体座屈モードから初めて部分座屈モードに移行した時の座屈臨界温度のことを指す。図 9 に部分座屈モードのモデルおよび変形の模式図を示す。トラス要素の節点はピン接合のように回転できるので、曲げ変形を生じず軸方向の変形のみが扱われる。したがって、部分座屈モードにおける局所的なモデルは図 9(a) に示すように「ユニットセル分の面板が 4 端点で単純支持される」モデルと考えられる。

部分座屈モードでは面板が座屈する問題を扱うので、図 9(a) のモデルを用い、薄板の熱座屈理論に即して部分座屈発生温度の理論式を導出する。面板の形状は $L \times L$ の正方形で、厚さが t である。初期応力が 0 の状態におけ

Fig. 9 Schematic of analytical model for estimating the buckling temperature for the local buckling mode.

る初期温度 T_0 から ΔT だけ均一に加熱するとき, 平衡方程式は次のように与えられる (Wang et al., 2017).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{D} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (13)$$

板の曲げ剛性 D は次のように表される (Timoshenko and Gere, 1961).

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (14)$$

また, 均一温度場における x , y , xy 方向に沿った内力 N_x , N_y および N_{xy} は式 (4) のように書ける. ここで, N_T は熱応力の合力であり, 次のように記述される.

$$N_T = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} E \alpha \Delta T dz = E \alpha t \Delta T \quad (15)$$

4 端点が単純支持された正方形板の変形形状 $w(x,y)$ は次のように表される.

$$w(x,y) = A \left\{ \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \right\} \quad (16)$$

式 (4), (15), (16) を式 (13) に代入すると,

$$\alpha \Delta T_{cr} = \frac{\pi^2 D (1-\nu)}{EtL^2} \quad (17)$$

式 (17) に式 (14) に代入すると, 部分座屈発生温度 $\Delta T_{cr-local}$ が次のように求められる.

$$\alpha \Delta T_{cr-local} = \frac{\pi^2 t^2}{12L^2(1+\nu)} \quad (18)$$

式 (18) により求まる各セル数 $N_c = a/L$ の場合の部分座屈発生温度の直線を図 4 に破線で加筆したものを図 10 に示す. 図 10 を見ると, 式 (18) の直線は部分座屈モードを示す FEM のプロットとよく一致していることがわかる. 表 3 に図 10 におけるセル数 N_c と式 (18) による部分座屈臨界温度の解析値に対する FEM 結果との比を示す. いずれのセル数においても FEM と理論値との誤差は 2% 以内に収まっており, 式 (18) が部分座屈発生温度を非常に精度よく予測できていることがわかる. また, 図 7(b)(c) および図 8 を見ると, セル長さ L および面板厚さ t が一定ならば, 部分座屈モードの座屈臨界温度 $\alpha \Delta T_{cr-local}$ に対する提案式 (18)(実線) と FEM 結果 (各印) は, セル数 N_c に関係なく一定であると言える. したがって, 式 (18) はセル長さ L および面板厚さ t 以外の寸法パラメータに依存せず, 面板のせん断変形が無視できるほど薄い仮定を満たす範囲では一般性があり, 部分座屈発生温度を精度よく予測できる式であると結論付けられる.

Fig. 10 Prediction of the buckling temperature $\alpha\Delta T_{cr-local}$ for the local mode.Table 3 Effect of the number of cells N_c on the prediction accuracy of the local buckling temperature $\alpha\Delta T_{cr-local}$.

Number of cells N_c	$\Delta T_{cr-local,FEM}/\Delta T_{cr-local,Eq.(18)}$
20	1.015
30	1.006
40	0.996
50	0.984

本研究で扱ったラティスサンドイッチパネルにおいては部分座屈モードの存在により、座屈温度が頭打ちになる特徴が明らかになった。これは一見するとパネル設計の上では不利な構造であると捉えられ得るが、式 (18) 中にはセル長さ L が含まれているため、 L を調整することで部分座屈発生温度を所望の性能まで引き上げることが可能、ともいえる。すなわち、求められる座屈温度を満たすよう、セル長さ L および面板厚さ t を重量など強度面以外の観点も考慮しながら決定し、その上で全体座屈モードに入らないようなコアの厚み h を式 (11) あるいは (12) を用いて求める、といったパネルの設計指針を与えることができる。

5. 結 言

本研究では、pyramid 構造をコアに持つラティスサンドイッチパネルの熱座屈特性について、変形形状に着目して検討を行い、以下の知見を得た。

1. ラティスサンドイッチパネルの熱座屈には全体座屈と部分座屈の 2 種類が存在し、全体座屈モードには熱座屈理論およびセル数 N_c に依存する修正係数による座屈臨界温度の適切な予測式が存在する。採用すべきセル数は長方形パネルの長辺方向に並ぶセル数である。
2. コア部にトラス要素を用いた場合のラティスサンドイッチパネルの部分座屈発生温度には、4 端点単純支持板のモデルから求まる適切な理論式が存在し、各種材料物性値、セル長さ L 、面板厚さ t を用いて予測できる。
3. 本論で提示した全体座屈および部分座屈の理論式を活用することで pyramid 型コアを持つラティスサンドイッチパネルの設計を定量的に行うことができる。

文 献

- Allen, H.G., Analysis and design of structural sandwich panels, Pergamon Press (1969).
- Bazant, Z.P. and Cedolin, L., Stability of Structures, Oxford University Press (2010).
- Chen, J.W., Liu, Y.Q., Liu, W. and Su X.Y., Thermal buckling analysis of truss-core sandwich plates, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Vol. 34, No. 10 (2013), pp. 1177-1186.
- Gossard, M.L., Seide, P. and Roberts W.M., Thermal buckling of plates, NACA Technical Note (1952), p.2771.
- 石田良平, 藤田佑樹, 平板の熱変形解析のための熱伝導方程式と熱座屈問題への応用, 日本機械学会第 22 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス講演論文集 (2013).
- 松本鉄一, 関谷壮, 加熱を受ける平行四辺形パネルの熱座屈, 日本機械学会論文集 (第 1 部), Vol. 41, No. 343 (1975), pp. 736-747.
- Mayers, C.A. and Hyer, M.W., Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates, Journal of Solids and Structures, Vol. 14, No. 10 (1991), pp. 519-540.
- Nasution, M.R.E., Watanabe, N. and Kondo, A., Numerical study on thermal buckling of CFRP-Al honeycomb sandwich composites based on homogenization-localization analysis, Composite Structures, Vol. 132 (2015), pp. 709-719.
- Rakow, J.F. and Wass, A.M., Thermal buckling of metal foam sandwich panels for actively cooled thermal protection systems, 45th AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (2004), Paper 2004-1710.
- Timoshenko, S.T. and Gere J.M., Theory of elastic stability, 2nd edn, McGraw-Hill (1961).
- Wang, Z.W., Han, Q.F., Nash, D.H. and Liu P.Q., Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell, Thin-Walled Structures, Vol. 119 (2017), pp. 438-446.
- 康井義明, 森山裕幸, 中村泰明, 神谷満好, クロスプライ積層平板の熱座屈特性, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 61, No. 590 (1995), pp. 60-67.

References

- Allen, H.G., Analysis and design of structural sandwich panels, Pergamon Press (1969).
- Bazant, Z.P. and Cedolin, L., Stability of Structures, Oxford University Press (2010).
- Chen, J.W., Liu, Y.Q., Liu, W. and Su X.Y., Thermal buckling analysis of truss-core sandwich plates, Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), Vol.34, No.10 (2013), pp.1177-1186.
- Gossard, M.L., Seide, P. and Roberts W.M., Thermal buckling of plates, NACA Technical Note (1952), p.2771.
- Ishida, R. and Fujita, Y., Derivation of heat conduction equation for thermal deformation of the plates, and its application to thermal buckling problem, Proceedings of the 22th Space Engineering Conference (2013) (in Japanese).
- Matsumoto, E. and Sekiya, T., Thermal buckling of a parallelogram panel subjected to heating, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 41, No. 343 (1975), pp. 736-747 (in Japanese).
- Mayers, C.A. and Hyer, M.W., Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates, Journal of Solids and Structures, Vol. 14, No. 10 (1991), pp. 519-540.
- Nasution, M.R.E., Watanabe, N. and Kondo, A., Numerical study on thermal buckling of CFRP-Al honeycomb sandwich composites based on homogenization-localization analysis, Composite Structures, Vol. 132 (2015), pp. 709-719.
- Rakow, J.F. and Wass, A.M., Thermal buckling of metal foam sandwich panels for actively cooled thermal protection systems, 45th AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (2004), Paper 2004-1710.
- Timoshenko, S.T. and Gere J.M., Theory of elastic stability, 2nd edn, McGraw-Hill (1961).
- Wang, Z.W., Han, Q.F., Nash, D.H. and Liu P.Q., Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell, Thin-Walled Structures, Vol. 119 (2017), pp. 438-446.
- Yasui, Y., Moriyama, H., Nakamura, Y. and Kamiya, M., Characteristics of thermal buckling for cross-ply laminates, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol. 61, No. 590 (1995), pp. 60-67 (in Japanese).