Advance Publication by J-STAGE

日本機械学会論文集

Transactions of the JSME (in Japanese)

DOI:10.1299/transjsme.21-00047

Received date : 28 January, 2021

Accepted date : 28 June, 2021

J-STAGE Advance Publication date : 6 July, 2021

帯域幅を考慮した非ガウス性不規則入力を受ける線形系の過渡応答特性

福島 英人^{*1}, 土田 崇弘^{*2}

Transient response characteristics of linear systems subjected to non-Gaussian random excitation with a wide range of bandwidth

Hideto FUKUSHIMA^{*1} and Takahiro TSUCHIDA^{*2}

^{*1,*2} Department of Systems and Control Engineering, Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

Abstract

In the previous study, one of the authors investigated stationary response characteristics of linear systems subjected to non-Gaussian random excitation. It was revealed that the probability distribution of the stationary response varies significantly depending upon the bandwidth of the excitation power spectrum. In real engineering problems, on the other hand, the transient response before reaching the stationary state is also crucial. Therefore, in this paper, we explore transient response characteristics to non-Gaussian random excitation by Monte Carlo simulation. The non-Gaussian excitation is prescribed by both a probability density function and a power spectrum with bandwidth parameter. In order to find the response characteristics that appears commonly for various non-Gaussian excitation, we consider four kinds of non-Gaussian distributions for the probability distributions of the excitations. Their shapes are much different from a Gaussian distribution and also distinct from each other. For such non-Gaussian random excitations, we look into the relationship between the transient response characteristics and the excitation bandwidth. Specifically, first, the transient response distribution is examined. Then, we observe the variance, skewness and kurtosis of the transient response to discuss the time variation of the response distribution in more detail.

Keywords : Non-Gaussian random excitation, Linear system, Transient response distribution, Transient response statistics, Variance, Skewness, Kurtosis

1. 緒 言

現実の機械・構造物は風圧や地震動に代表される不規則な入力を受けるため、そのような不規則入力に対する応答特性を明らかにすることは、系の信頼性・安全性や快適性の観点から、重要な意味を持つ。不規則入力を受ける系に関する研究ではこれまで多くの場合、その入力がガウス分布にしたがうというガウス性の仮定がなされてきた。これは、ガウス過程の確率的な性質が2次までの統計量だけで完全に記述できるという解析上の利点や、ガウス分布に近い確率密度関数にしたがう不規則入力が多いという事実起因する。しかし、現実の問題では、顕著な非ガウス性を示す不規則入力も存在し、例えば、風圧 (Stathopoulos, 1980)、波荷重 (Grigoriu, 1984) や路面凹凸による変位励振 (Grigoriu, 1995) などが挙げられる。このような入力に対して従来のように入力のガウス性を仮定して解析を行っても、実際の挙動とは大きく異なる解析結果が導かれることが予想される。そのため現在、非ガウス性入力を受ける系を対象に、入力のガウス性を仮定することなく応答解析を行い、その応答の特徴を正確

No.21-00047 [DOI: 10.1299/transjsme.21-00047]

^{*1} 学生員, 東京工業大学 工学院 システム制御系 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

^{*2} 正員, 東京工業大学 工学院 システム制御系

E-mail of corresponding author: ttsuchida@sc.e.titech.ac.jp

に把握することが不規則振動分野の重要な課題となっている。

著者の一人は、前報(土田, 木村, 2013)で、非ガウス性不規則入力を受ける1自由度線形系および1自由度非線形ばね系の定常応答分布を調べ、その応答分布の形状が入力のパワースペクトルの帯域幅に強く依存することを明らかにした。特に線形系の変位応答分布は、入力パワースペクトルの帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅に比べて狭い場合には、入力の非ガウス分布に近い形状となり、逆に入力帯域幅の方が広い場合には、ガウス分布に近い形状となることを示した。

一方、種々の工学問題ではしばしば、定常応答だけでなく、定常状態に至る前の過渡応答を把握することも重要となる。ガウス性励振系の過渡応答を扱った多くの従来研究および白色性に近い広帯域型パワースペクトルを有する非ガウス性励振を受ける系の過渡応答を調査した Wu and Cai(2004)の研究などから、過渡状態では定常状態には見られない動的挙動が現れることが予想される。しかし、非ガウス性励振下の過渡状態における応答特性は未だ十分には分かっていない。その過渡応答特性を詳細に調べ、明らかにできれば、上記の定常応答特性に関する知見と合わせて、過渡状態から定常状態に至るまでの一連の動的特性を知ることができ、風圧を受ける建築物、波浪を受ける船舶・海洋構造物、凹凸路面を走る車など、様々な分野に見られる非ガウス性励振下にある機械や構造物の一層の高信頼性・高快適化の実現につながることが期待される。

以上を踏まえて本研究では、非ガウス性不規則入力を受ける1自由度線形系の過渡応答特性をモンテカルロ・シミュレーションによって調べる。本研究で考える非ガウス性入力は、確率分布とパワースペクトルの2つによって規定される。確率分布については、様々な非ガウス性入力に対する応答に共通して現れる一般的な性質を明らかにするため、形状が大きく異なる4種類の非ガウス分布を用いる。一方、パワースペクトルについては、入力帯域幅の違いが定常応答特性に大きく影響するという前報での知見をもとに、その帯域幅が過渡応答特性に及ぼす影響に着目して調査を行う。このような非ガウス性入力を受ける線形系の過渡応答分布・統計量を入力帯域幅を大きく変化させながら計算し、その計算結果をもとに、入力帯域幅の変化に対応した対象系の過渡応答特性の変化を明らかにする。入力の確率分布と帯域幅を広く変化させて調査を行う点が本研究の特徴であり、種々の非ガウス分布と帯域幅をもつ入力の場合で過渡応答特性にどのような共通点あるいは相違点があるのかを観察・整理する。

2. 解析モデル

2.1 系の運動方程式

次式の運動方程式によって記述される1自由度線形系を考える。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U(t) \quad (1)$$

ここで、 $X = X(t)$ は系の変位応答、 $U(t)$ は非ガウス性不規則入力であり、 ζ は系の減衰比を表す。また、 t は系の不減衰固有角振動数 ω_n によって無次元化された時間、すなわち、 $[s]$ の次元を持つ実時間 t^* に対して、 $t = \omega_n t^*$ と表される無次元時間を表す。時間微分記号(ドット記号)はこの無次元時間 t での微分を表している。

2.2 非ガウス性不規則入力

本研究で対象とする非ガウス性不規則入力 $U(t)$ は、確率密度関数とパワースペクトルの2つによって規定される。本節では、その確率密度関数とパワースペクトル、そして、それら両方にしたがう入力標本関数の生成方法について述べる。

2.2.1 入力のパワースペクトル

入力 $U(t)$ のパワースペクトル $S_U(\omega)$ として、本研究では次式で表されるものを考える。

$$S_U(\omega) = \frac{\alpha E[U^2]}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (2)$$

ここで、パワースペクトルの引数 ω は角周波数であり、パラメーター α は帯域幅を表す。なお、2.1 節において無次元化時間を導入したことにより、 ω, α もまた無次元数になっていることに注意する。また、 $E[U^2]$ は入力の二乗平均値であり、この値は次の 2.2.2 節で述べる確率密度関数から決定される。Fig. 1 に、 $\alpha = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 1$

Fig. 1 Power spectrum of random excitation for five types of bandwidth parameter α . The DC ($\omega = 0$) component is dominant when α is small, on the other hand, the power spectrum is wide-band for large α .

かつ $E[U^2] = 1$ のときのパワースペクトル $S_U(\omega)$ を示す。 $S_U(\omega)$ は、 α が小さいときは $\omega = 0$ の成分が卓越したスペクトル形状となり、 α が大きくなるにつれてホワイトノイズに近づく。

強制外力を受ける系においては、共振が重要な振動現象として挙げられるため、入力パワースペクトルのパラメーターとして、帯域幅に加えて、卓越振動数も考慮することが有意義であると考えられる。しかし著者の知る限り、非ガウス性励振を受ける系の過渡応答を扱った先行研究は数例しかなく (Grigoriu, 1995; Wu and Cai, 2004), 対象系においては、入力帯域幅のみが変化したときの過渡応答の変化でさえ十分に考察されていない。そこで本研究では、入力帯域幅 α が過渡応答特性に及ぼす影響を明瞭に観察するため、式 (2) で表される α のみをパラメーターにもつパワースペクトルを扱うこととする。なお、 $\omega = 0$ にピークがあるときには α を帯域幅とは呼ばないことが多いが、本研究では便宜上、 α を帯域幅と記述する。

2.2.2 確率密度関数

入力の非ガウス性が系の応答にどのような影響を及ぼすのかを明確にするため、また様々な非ガウス性入力の場合に共通して現れる普遍的な過渡応答特性を見いだすため、入力の確率密度関数 $p_U(u)$ として、ガウス分布とは形状が顕著に異なり、さらに互いの特徴にも差異のある、以下の4種の非ガウス分布を用いる。

- 対称分布
 - バイモーダル分布

$$p_U(u) = C \exp(Au^2 + Bu^4) \quad (-\infty < u < \infty, A > 0, B < 0, C: \text{正規化定数}) \quad (3)$$

- ラプラス分布

$$p_U(u) = \frac{\beta}{2} \exp(-\beta|u|) \quad (-\infty < u < \infty, \beta > 0) \quad (4)$$

- 非対称分布

- ガンマ分布

$$p_U(u) = \frac{u^{a-1} \exp\left(-\frac{u}{b}\right)}{b^a \Gamma(a)} \quad (0 \leq u < \infty, a > 0, b > 0) \quad (5)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。

- 対数正規分布

$$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}u} \exp\left[-\frac{(\log u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (0 < u < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0) \quad (6)$$

ここで, $A, B, \beta, a, b, \mu, \sigma^2$ は分布形状を決定するパラメーターである.

入力標本生成で用いる Cai and Lin の手法では, 確率過程の平均は 0 と仮定している. 対称分布であるバイモーダル分布とラプラス分布の平均は 0 であるが, 非対称分布であるガンマ分布の平均は ab , 対数正規分布の平均は $\exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ であるため, これら 2 分布については, 平均が 0 となるようにシフトさせる. このとき, 両分布は次式のように表される.

- ガンマ分布

$$p_U(u) = \frac{(u+ab)^{a-1} \exp\left(-\frac{u}{b} - a\right)}{b^a \Gamma(a)} \quad (-ab \leq u < \infty) \quad (7)$$

- 対数正規分布

$$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \{u + \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\}} \exp\left[-\frac{[\log\{u + \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\} - \mu]^2}{2\sigma^2}\right] \quad \left(-\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) < u < \infty\right) \quad (8)$$

本研究では, 上に示した 4 分布のパラメーターの値を以下のように設定する.

$$A = 0.8935, B = -0.3991, C = 0.2269, \beta = \sqrt{2}, a = 1, b = 1, \mu = \log\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right), \sigma^2 = \log 1.2 \quad (9)$$

このとき, 入力分布の二乗平均値 $E[U^2]$ はいずれも 1 となり, 帯域幅パラメーター α を揃えると, パワースペクトルが一致する. Figs. 2-5 に, 上記のパラメーターの場合における式 (3)(4)(7)(8) の分布をそれぞれ示す.

Fig. 2 Bimodal distribution.

($A = 0.8935, B = -0.3991, C = 0.2269$)

Fig. 3 Laplace distribution.

($\beta = \sqrt{2}$)

Fig. 4 Shifted Gamma distribution.

($a = 1, b = 1$)

Fig. 5 Shifted lognormal distribution.

($\mu = \log\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right), \sigma^2 = \log 1.2$)

2.2.3 入力標本関数の生成方法

前節で示したパワースペクトル $S_U(\omega)$ と確率密度関数 $p_U(u)$ の両方に従う入力 $U(t)$ の標本関数を生成するために、Cai and Lin (1996) によって提案された手法を用いる。本節では、この手法について簡潔に述べる。

式 (2) で与えられるパワースペクトルを有する平均 0 の定常確率過程 $U(t)$ は、次の伊藤型確率微分方程式の解過程として表すことができる。

$$dU(t) = -\alpha U(t)dt + D(U(t))dB(t) \quad (10)$$

ここで、 α は式 (2) 中の帯域幅パラメータと同じであり、 $B(t)$ は標準ブラウン運動である。また、 $-\alpha u$ と $D(u)$ はそれぞれドリフト係数と拡散係数と呼ばれる係数である (u はドリフト係数と拡散係数を関数とみなしたときの引数を表しており、確率過程を表す $U(t)$ と区別して表記していることに注意)。拡散係数 $D(u)$ は以下のように与えられる。

$$D^2(u) = -\frac{2\alpha}{p_U(u)} \int_{-\infty}^u r p_U(r) dr \quad (11)$$

この式は、式 (10) に従う定常過程 $U(t)$ の確率密度関数 $p_U(u)$ が満たす偏微分方程式である Fokker-Planck 方程式を考えることによって、導くことができる。

上記の結果を利用することで、与えたパワースペクトルと確率密度関数の両方に従う標本関数を生成することができる。その計算の流れを以下に示す。

1. 生成する入力の確率密度関数 $p_U(u)$ とパワースペクトルの帯域幅 α を与える。
2. $p_U(u)$, α を式 (11) に代入して、拡散係数 $D(u)$ を求める。
3. α , $D(u)$ を確率微分方程式 (10) に代入し、オイラー・丸山法 (成田, 2010) を用いて、その確率微分方程式を数值的に解くことで、標本関数を生成する。この際、乱数を用いて各標本ごとに異なるブラウン運動 $B(t)$ を生成し、それを用いて式 (10) を解くことで、1 本 1 本異なる入力標本が得られる。また、数値計算時の時間刻み幅 Δt として、入力の帯域幅が $\alpha = 0.01, 0.05$ の場合では $\Delta t = 0.05$ を、 $\alpha = 1$ の場合では $\Delta t = 0.01$ を採用することで、所望の確率密度関数とパワースペクトルに正確に従う入力標本を生成できることを確認した。そのため、本研究では、時間刻み幅としてこれらの値を用いて標本生成を行った。

最後に、本研究で対象とする 4 種類の入力分布 $p_U(u)$ に対応する拡散係数 $D(u)$ を以下に示す。

- バイモーダル分布

$$D^2(u) = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-B}} \exp \left\{ -B \left(u^2 + \frac{A}{2B} \right)^2 \right\} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{-B} \left(u^2 + \frac{A}{2B} \right) \right\} \quad (12)$$

- ラプラス分布

$$D^2(u) = \frac{2\alpha}{\beta^2} (1 + \beta|u|) \quad (13)$$

- ガンマ分布

$$D^2(u) = 2\alpha(u + ab)b \quad (u \geq -ab) \quad (14)$$

- 対数正規分布

$$D^2(u) = \sqrt{2\pi \log s} m \sqrt{s} (u + m\sqrt{s}) \alpha \exp \left[\frac{\left\{ \log \left(\frac{u}{m} + \sqrt{s} \right) \right\}^2}{2 \log s} \right] [\operatorname{erfc}\{-\beta(u)\} - \operatorname{erfc}\{-\gamma(u)\}] \quad (u > -m\sqrt{s}) \quad (15)$$

ここで、式 (15) 内に現れる m, s はそれぞれ $m = \exp(\mu)$, $s = \exp(\sigma^2)$ であり、 $\operatorname{erfc}(\cdot)$ は次式で定義される相補誤差関数を表す。

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (16)$$

また、 $\beta(u)$ と $\gamma(u)$ はそれぞれ、以下で与えられる。

$$\beta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\log s}} \log \left(\frac{u + m\sqrt{s}}{ms} \right), \quad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{2\log s}} \log \left(\frac{u + m\sqrt{s}}{m} \right) \quad (17)$$

3. 非ガウス性不規則入力を受ける線形系の過渡応答分布

式 (1) で表される非ガウス性不規則入力を受ける 1 自由度線形系を対象として、静止している系 (初期条件 $X(0) = 0$, $\dot{X}(0) = 0$) に $t = 0$ で入力加わったときの過渡応答分布を、モンテカルロシミュレーションにより求めた。2・2・3 節で述べた方法で生成した 2,000,000 本の入力標本 $U(t)$ を用いて 2,000,000 回の応答計算を行い、それによって得られた応答標本をもとに応答分布を計算した。なお、2,000,000 本という標本数については、これ以上増やしても結果が変わらないことと、これ以上減らしてしまうと標本数が不十分で結果が変化してしまうことから、適切な本数であると判断した。応答計算には、4 次のルンゲ・クッタ法を使用した。なお、応答計算を行う際の時間刻み幅として、入力標本を生成する際の時間刻み幅と同じ値を用いた。系の減衰比と入力の帯域幅を以下の値に設定した。

- 減衰比 $\zeta = 0.05$
- 入力帯域幅 $\alpha = 0.01, 0.05, 1$

2.1 節で系の不減衰固有角振動数を用いて時間を無次元化したため、系の減衰比 ζ は系の周波数応答関数の帯域幅に対応する。また、2.2.1 節で述べた通り、入力帯域幅 α もまた無次元パラメータである。よって、 ζ と α はいずれも帯域幅を表す無次元数であり、 $\zeta = \alpha$ は系の周波数応答関数の帯域幅と入力の帯域幅が等しいことを表す。前報 (土田, 木村, 2013) では、本研究と同じ系の定常応答分布を調べ、その定常応答分布の特徴が、入力帯域幅 α と系の周波数応答関数の帯域幅を表す減衰比 ζ の大小関係にしたがって、大きく変化することを明らかにした。この知見をもとに、本研究では、入力帯域幅 α を、系の減衰比 ζ に比べて、小さい場合 ($\alpha = 0.01$)、等しい場合 ($\alpha = 0.05$)、大きい場合 ($\alpha = 1$) と大きく変化させて過渡応答分布の調査を行った。

各入力分布および各入力帯域幅の場合での、 $t = 1, 3, 6, 9, 12$ と定常状態における変位応答分布 $p_X(x)$ の計算結果を Figs. 6-9 に示す。なお、 $t = 100$ 以降で分布の形状に変化が見られなかったことから、本研究では $t = 100$ を定常状態とみなした。これらの結果より、入力分布が異なっても、過渡応答分布はいくつかの共通した性質を示すことが分かった。その性質を、入力帯域幅ごとに分けて、以下にまとめる。

入力帯域幅が系の減衰比に比べて小さいとき ($\alpha = 0.01$)

- 分布の幅が広がり狭まったり振動しつつ、かつ入力分布の非ガウス性 (双峰性や非対称性など) の特徴が維持されながら、定常応答分布に収束する。
- 定常応答分布は入力分布に近い形状をとる。この理由は以下の通りである (土田, 木村, 2013)。入力のパワースペクトルは、Fig. 1 のように、 $\omega = 0$ の成分が卓越したものとなるため、入力波形は時間変動が緩やかとなる。よって、その入力を受ける系の定常応答における速度・加速度の大きさは、変位応答の大きさに比べて十分小さくなるため、系の支配方程式が近似的に $X \simeq U(t)$ と書ける。さらに、入力 $U(t)$ は入力分布 $p_U(u)$ に従うため、結果的に、定常変位応答の分布は入力分布に近い形状をとる。

入力帯域幅が系の減衰比と同等のとき ($\alpha = 0.05$)

- 上記の $\alpha = 0.01$ の場合と同様の変化を示すが、 $\alpha = 0.01$ の場合に比べて、入力分布に起因して現れる非ガウス性の度合いがわずかに薄れる (=わずかにガウス分布に近づく)。

Fig. 6 Transient response distribution for bimodal-distributed excitation with $\alpha = 0.01$, 0.05 and 1 . The time changing patterns of the response distribution vary significantly depending on the excitation bandwidth α .

Fig. 7 Transient response distribution for Laplace-distributed excitation with $\alpha = 0.01, 0.05$ and 1 . The time changing patterns of the response distribution vary significantly depending on the excitation bandwidth α .

Fig. 8 Transient response distribution for gamma-distributed excitation with $\alpha = 0.01, 0.05$ and 1 . The time changing patterns of the response distribution vary significantly depending on the excitation bandwidth α .

Fig. 9 Transient response distribution for lognormal-distributed excitation with $\alpha = 0.01, 0.05$ and 1 . The time changing patterns of the response distribution vary significantly depending on the excitation bandwidth α .

入力帯域幅が系の減衰比に比べて大きいとき ($\alpha = 1$)

- 分布の幅はほぼ単調に広がり、入力分布の非ガウス性の特徴もほぼ単調に薄れながら、定常応答分布に収束する。
- 定常応答分布は、入力分布によらず、ガウス分布に近い形状をとる。ここで、1 自由度線形系が強度 S_0 のガウス性ホワイトノイズを受けるとき、その定常変位応答分布は、以下のように、ガウス分布となることが知られている (Caughey, 1963).

$$p_X(x) = C \exp\left(-\frac{\zeta}{\pi S_0} x^2\right) \quad (18)$$

ここで、 C は正規化定数である。前報 (土田, 木村, 2013) において、 α の値が大きく、入力のパワースペクトルがホワイトノイズのスペクトル形状に近いとき、入力分布によらず、定常変位応答分布が式 (18) に近い形状を示すことを確認している。Figs. 6-9 の結果は、この知見と対応するものである。

また上記とは別に、入力帯域幅 α の値によらず、入力が系に作用したばかりのとき ($t = 1$) は、入力分布に近い形状となることも確認された。

4. 非ガウス性不規則入力を受ける線形系の過渡応答統計量

応答分布を特徴付ける統計量として、分散・歪度・尖度がある。本章では、これら 3 つの応答統計量に着目し、統計量の時間変化の様子から、過渡応答分布の時間変化の様子をより詳細に観察する。入力帯域幅 α と系の減衰比 ζ は 3 章に示したものと同一値とした。また、使用した標本数については、はじめ 3 章と同じ 2,000,000 本に設定して応答統計量を計算したところ、本来なら十分時間が経った後、定常値 (一定値) に収束するはずが、標本数の不足によって一定値にならず、わずかに振動し続ける誤った解が得られた。そこで本章では、定常状態で一定値に収束する標本数として、3 章で用いた標本数の 10 倍である 20,000,000 本を用いて統計量の算出を行った。以下に、本研究で対象としている 4 種類の入力分布の統計量を示す (尖度については、ガウス分布の尖度を 3 とする定義を採用している)。

- バイモーダル分布 平均 0 分散 1 歪度 0 尖度 1.75
- ラプラス分布 平均 0 分散 1 歪度 0 尖度 6
- ガンマ分布 平均 0 分散 1 歪度 2 尖度 9
- 対数正規分布 平均 0 分散 1 歪度 1.41 尖度 6.85

過渡応答統計量の計算結果を Fig.10 に示す。なお、入力分布が対称な場合、変位応答分布も対称となり歪度は常に 0 となるため、入力分布が対称な場合については、応答歪度の結果は掲載していない。Fig. 10 から、過渡応答統計量の時間変化について、以下のことが分かった。

分散

- 入力帯域幅 α が等しければ、入力分布が異なっても、分散の時間変化は同一になる。これは、系が線形系であるので、その応答分散が、入力分布に関わらず、系の衝撃応答関数と入力のパワースペクトルのみから決まるためである。実際に、対象系の応答分散 $\sigma_X^2(t)$ の厳密解は、入力帯域幅 α と系の減衰比 ζ のみで次のように表されることが知られている (Barnoski and Maurer, 1969; Hu et al., 2019).

$$\sigma_X^2(t) = G_1 + G_3 + 2G_5 + G_9 \quad (19)$$

ここで、

$$G_5 = G_{51} + G_{52} - G_{53} - G_{54} \quad (20)$$

であり,

$$G_1 = e^{-2\zeta t} \frac{\{\omega_d^2 - \zeta(\alpha + \zeta)\} \cos(2\omega_d t) + \omega_d(\alpha + 2\zeta) \sin(2\omega_d t)}{2\omega_d^2(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (21)$$

$$G_3 = e^{-2\zeta t} \frac{\alpha + \zeta}{2\omega_d^2 \zeta (\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (22)$$

$$G_{51} = -e^{-(\zeta+\alpha)t} \frac{(\alpha^2 + \omega_d^2 - \zeta^2) \cos(\omega_d t) + 2\omega_d \zeta \sin(\omega_d t)}{2\omega_d^2 (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1)(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (23)$$

$$G_{52} = \alpha e^{-2\zeta t} \frac{\zeta (\alpha^2 + 3\omega_d^2 - \zeta^2) \cos(2\omega_d t) - \omega_d (\alpha^2 + \omega_d^2 - 3\zeta^2) \sin(2\omega_d t)}{2\omega_d^2 (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1)(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (24)$$

$$G_{53} = e^{-(\zeta+\alpha)t} \frac{(-\alpha^2 + 1) \cos(\omega_d t) + 2\alpha \omega_d \sin(\omega_d t)}{2\omega_d^2 (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1)(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (25)$$

$$G_{54} = \alpha e^{-2\zeta t} \frac{\alpha^2 + \omega_d^2 - \zeta^2}{2\omega_d^2 \zeta (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1)(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (26)$$

$$G_9 = \frac{\alpha (\alpha^2 + \omega_d^2 - 3\zeta^2) + 2\zeta}{2\zeta (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1)(\alpha^2 + 2\alpha\zeta + 1)} \quad (27)$$

また, $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}$ は, 系の無次元減衰固有角振動数である.

上式からも, α が等しければ, 入力分布によらず, 応答分散の変化は同じになることが確認できる (本研究では, ζ の値を固定していることに注意).

- α が ζ に比べて小さい ($\alpha = 0.01$) または同等 ($\alpha = 0.05$) のときは, 周期的に振動しながら, 定常値に向かう. またこの際, 過渡状態で定常状態よりも大きな分散が生じる. これは, Figs. 6-9 の $\alpha = 0.01, 0.05$ の過渡応答分布の結果において, 分布の幅が定常分布よりも広がる時刻が存在することに対応する.
- α が ζ に比べて大きいとき ($\alpha = 1$) は, 小さな振動を伴いながら, ほぼ単調に増加して定常値に到達する. これは, Figs. 6-9 の $\alpha = 1$ の結果において, 分布の幅がほぼ単調に広がっていくことと対応する.

また, 式 (19)-(27) より, 時間変化の周期について以下のことが言える.

- α が ζ に比べて小さいとき ($\alpha = 0.01$), 分散の振動周期はおよそ 2π となる. これは次のように説明できる (小林他, 2018). $\alpha < \zeta$ のとき, $\alpha + \zeta < 2\zeta$ であるから, 式 (19)-(27) において, $e^{-2\zeta t}$ を含む項に比べて, $e^{-(\alpha+\zeta)t}$ を含む項の減衰が相対的に遅く支配的となる. そして, $e^{-(\alpha+\zeta)t}$ を含む項の振動成分の角振動数は ω_d であるから, 分散変化の支配的な角振動数は ω_d , 周期は $T = \frac{2\pi}{\omega_d} \simeq 2\pi$ となる.
- α が ζ に比べて大きいとき ($\alpha = 1$) は, $e^{-(\alpha+\zeta)t}$ を含む項に比べて, $e^{-2\zeta t}$ を含む項の減衰が遅く支配的になる. そして, $e^{-2\zeta t}$ を含む項の振動成分の角振動数は $2\omega_d$ であるので, 過渡時の分散変化に見られる小さな振動の支配的な角振動数は $2\omega_d$, 周期は $T = \frac{2\pi}{2\omega_d} \simeq \pi$ となる.
- α が ζ と同等のとき ($\alpha = 0.05$) は, $e^{-2\zeta t}$ と $e^{-(\alpha+\zeta)t}$ の減衰の速さが同程度となるにも関わらず, 分散の振動周期は, 上記の $\alpha < \zeta$ の場合と同じ, およそ 2π となる. これは, 式 (19)-(27) において, ω_d 成分と $2\omega_d$ 成分の各振動成分に分け, 互いの振幅の大きさを比較したとき, 前者の振幅のほうが後者の振幅に比べて非常に大きいため, すなわち, 分散変化における支配的な振動成分が ω_d 成分となっているためである.

歪度・尖度

- 入力帯域幅 α の値によらず, 加振直後 ($t \simeq 0$) は, 入力分布の歪度・尖度とほぼ一致した. これは, Figs. 6-9 の $t = 1$ の結果と対応する.
- α が系の減衰比 ζ に比べて小さいとき ($\alpha = 0.01$) は, 周期的に極値をとる変化をしながら定常値に向かった. このときの変化の周期は分散変化の周期と同じ 2π であり, 極値をとる時刻は分散変化が極小値をとる時刻と一致した. また 3 章で述べた, 定常応答分布が入力分布に近い形状となることと対応して, 応答歪度・尖度の定常値は入力分布の歪度・尖度に近くなった.

Fig. 10 Transient response statistics for each excitation with $\alpha = 0.01, 0.05$ and 1 . The change periods and extremum magnitude of the response statistics differ markedly according to the excitation bandwidth α . Such a change of the characteristics of the response statistics with respect to α is in common regardless of the excitation probability density.

Fig. 11 Transient response statistics for gamma-distributed excitation with $\alpha = 0, 0.001, 0.003$ and 0.005 . For $\alpha = 0.001, 0.003$ and 0.005 , the extremes in time change of the skewness and kurtosis appear every period 2π , whereas for $\alpha = 0$, the extremes disappear and the skewness and kurtosis always remain equal to those of the excitation distribution.

- α が ζ と同等のとき ($\alpha = 0.05$) は、上記の $\alpha = 0.01$ の場合と同様の变化を示した。違いとしては、 $\alpha = 0.05$ の場合のほうが、ガウス分布の統計量 (歪度 0, 尖度 3) にやや近づいた値に収束した。
- α が ζ に比べて大きいとき ($\alpha = 1$) は、わずかな振動的变化が見られるものの、速やかに増加または減少し、定常値として、ガウス分布の統計量に近い値に収束した。これについても、3 章で観察した $\alpha = 1$ の場合の応答分布の変化傾向と合致した。

入力帯域幅 α が小さい場合に見られる応答歪度・尖度が周期的に極値をとる時間変化特性について、この特性が α の値によってどのように変わるのかをより詳しく観察するために、 $\alpha = 0, 0.001, 0.003, 0.005$ で入力分布がガンマ分布の場合における過渡応答統計量を追加で計算した。その計算結果を Fig.11 に示す。なお、 $\alpha = 0$ は、ガンマ分布に従う乱数をステップ値とするステップ入力を受ける場合に相当する。Fig.11 および Fig.10 の入力分布: ガンマ分布、 $\alpha = 0.01$ における結果より、 α が小さいときの応答歪度・尖度の時間変化について、以下のことが確認できる。

- $\alpha = 0.001, 0.003, 0.005, 0.01$ では周期 2π ごとに極値が現れるのに対し、 $\alpha = 0$ では極値が消え、常に入力分布の歪度・尖度に等しい値をとり続けた。したがって、応答歪度・尖度が周期的に極値をとる変化は、 $\alpha > 0$ のときに生じる現象であることが分かった。
- $\alpha = 0$ のときに応答歪度・尖度が常に入力歪度・尖度と同じ値となる理由は、次のように説明できる。 $\alpha = 0$ の場合、不規則入力 $U(t)$ はステップ入力 $U(t) = U (t \geq 0)$ と表せる。ここで、 U は入力分布 $p_U(u)$ に従う確率変数である。このとき、その入力 $U(t)$ に対する応答 $X(t)$ は、系の単位ステップ応答を $x(t)$ とすると、 $X(t) = Ux(t)$ と書くことができる。したがって、応答歪度 $\gamma_{3X}(t)$ ・尖度 $\gamma_{4X}(t)$ は、次式のように計算できるため、常に入力歪度 γ_{3U} ・尖度 γ_{4U} と等しくなる。

$$\gamma_{3X}(t) = \frac{E[X^3(t)]}{\{E[X^2(t)]\}^{3/2}} = \frac{E[U^3]x^3(t)}{\{E[U^2]\}^{3/2}\{x^2(t)\}^{3/2}} = \frac{E[U^3]}{\{E[U^2]\}^{3/2}} = \gamma_{3U} \quad (28)$$

$$\gamma_{4X}(t) = \frac{E[X^4(t)]}{\{E[X^2(t)]\}^2} = \frac{E[U^4]x^4(t)}{\{E[U^2]\}^2\{x^2(t)\}^2} = \frac{E[U^4]}{\{E[U^2]\}^2} = \gamma_{4U} \quad (29)$$

- α が減少するにつれて、極値部分の変化量は小さくなった。これは、 α が小さくなるほど、入力パワースペクトルの直流成分 ($\omega = 0$ 成分) がより卓越してステップ入力に近づくことにより、上記の $\alpha = 0$ の状況に近づくためである。

以上のように、入力帯域幅 α と系の帯域幅を表す減衰比 ζ の大小関係に従って、応答統計量の変化周期や極値の大きさが大きく変化することが認められた。また、入力分布の違いに応じて極値の大きさが変化するものの、極値を取る時刻や α の変化に対する極値の大きさの変化傾向については共通していることが分かった。

5. 結 語

本研究では、確率分布とパワースペクトルの 2 つによって規定される非ガウス性不規則入力を受ける 1 自由度線形系の過渡応答特性について調べた。様々な非ガウス性入力の場合で共通して現れる普遍的な応答特性を見いだすため、入力分布として、ガウス分布とは顕著に異なり、さらに互いの特徴にも差異のある 4 種類の分布を用いた。また、入力のパワースペクトルについては、その帯域幅が過渡応答特性に及ぼす影響を明瞭に観察するため、帯域幅のみをパラメーターに有するものを対象とした。このような非ガウス性入力を受ける線形系の過渡応答分布・統計量を、入力帯域幅が系の減衰比に比べて小さい場合、等しい場合、大きい場合と 3 通りに大きく変化させながら、モンテカルロ・シミュレーションによって求めた。そして、入力帯域幅の大きさと過渡応答特性の関係に着目して調査を行い、次の結果を得た。

過渡応答分布

- 入力帯域幅の値によらず，入力が系に加わった直後は，入力分布に近い形状をとった．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて小さいときは，分布の幅が広がったり狭まったり振動しつつ，また入力分布の非ガウス性の特徴が維持されながら，入力分布に近い形状の定常分布に収束した．
- 入力帯域幅が系の減衰比と同等のときは，上記の入力帯域幅が小さい場合と似た変化を示した．ただし，上記の場合に比べて，入力分布に起因して現れる非ガウス性の度合いがわずかに小さくなった．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて大きいときは，分布の幅はほぼ単調に広がり，入力分布の非ガウス性の特徴もほぼ単調に薄れながら，ガウス分布に近い形状の定常分布に収束した．

過渡応答分散

- 時間変化の仕方は，入力分布に依存せず，入力帯域幅と系の減衰比のみから決まる．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて小さいまたは同等のときは，周期 2π で振動しながら，定常値に向かう．この際，過渡状態で定常状態よりも大きな分散が生じる．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて大きいときは，周期 π の小さな振動を伴いながら，ほぼ単調に増加して定常値に達する．

過渡応答歪度・尖度

- 入力帯域幅の値によらず，加振直後は，入力分布の歪度・尖度とほぼ一致した．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて小さくかつ 0 でないときは，周期 2π ごとに極値をとる変化をしながら，入力分布の歪度・尖度に近い定常値に向かった．極値をとる時刻は分散変化が極小値をとる時刻と一致し，また，入力帯域幅が小さいほど，極値部分の変化量が小さくなった．
- 入力帯域幅が 0 の場合は，極値が存在せず，常に入力分布の歪度・尖度と等しい値をとり続ける．
- 入力帯域幅が系の減衰比と同等のときは，上記の入力帯域幅が減衰比に比べて小さい場合と同様の変化を示した．違いとしては，こちらの場合のほうが，ガウス分布の歪度、尖度にやや近づいた値の定常値となった．
- 入力帯域幅が系の減衰比に比べて大きいときは，わずかな振動的变化が見られるものの，速やかに増加または減少し，ガウス分布の歪度・尖度に近い定常値に収束した．

以上より，入力帯域幅と系の減衰比の大小関係の違いにより，応答分布に関しては，幅の時間変化の様子や入力分布に起因する非ガウス性の特徴の現れ方に差異が生じることを明らかにした．またそれに応じて応答統計量についても，変化周期や極値の大きさが変化することを示した．また，このような応答特性は入力分布に依らず共通していることも確認した．

今後は，本研究で観察された過渡状態における応答歪度・尖度の時間変化特性について，それらの特性が生じる理由の解明に取り組んでいく予定である．

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 JP18K13712 の助成を受けたものである．ここに記して謝意を表す．

文 献

Barnoski, R.L. and Maurer, J.R., Mean-square response of simple mechanical systems to nonstationary random excitation, Journal of Applied Mechanics, Vol.36 (1969), pp.221-227.

- Cai, G.Q. and Lin, Y.K., Generation of non-gaussian stationary stochastic processes, *Physical Review E*, Vol.54, No.1 (1996), pp.299-303.
- Caughey, K., Derivation and application of the fokker-planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation, *The Journal of Acoustical Society of America*, Vol.35, No.11 (1963), pp.1687-1692.
- Grigoriu, M., Extremes of wave forces, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.110, No.12 (1984), pp.1731-1742.
- Grigoriu, M., *Applied non-gaussian processes*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall (1995).
- Hu, S.L.J., Cao, Q.Y. and Li, H.J., Laplace domain method for evaluating mean-square response of simple oscillators to nonstationary excitation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.56 (2019), pp.1-13.
- 小林拓巳, 竹内健太, 土田崇弘, 木村康治, 帯域幅を考慮した非ガウス性不規則励振を受ける線形系の過渡応答特性. 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2018 講演論文集 (2018), 153.
- 成田清正, 例題で学べる確率モデル, 共立出版 (2010).
- Stathopoulos, T., PDF of wind pressures on low-rise buildings, *Journal of the Structural Division*, Vol.106 (1980), pp. 973-990.
- 土田崇弘, 木村康治, 帯域幅を考慮した非ガウス性不規則入力を受ける非対称非線形剛性系の応答分布, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.799 (2013), pp.582-592.
- Wu, C. and Cai, G.Q., Effects of excitation probability distribution on system responses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.39, No.9 (2004), pp.1463-1472.

References

- Barnoski, R.L. and Maurer, J.R., Mean-square response of simple mechanical systems to nonstationary random excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.36 (1969), pp.221-227.
- Cai, G.Q. and Lin, Y.K., Generation of non-gaussian stationary stochastic processes, *Physical Review E*, Vol.54, No.1 (1996), pp.299-303.
- Caughey, K., Derivation and application of the fokker-planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation, *The Journal of Acoustical Society of America*, Vol.35, No.11 (1963), pp.1687-1692.
- Grigoriu, M., Extremes of wave forces, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.110, No.12 (1984), pp.1731-1742.
- Grigoriu, M., *Applied non-gaussian processes*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall (1995).
- Hu, S.L.J., Cao, Q.Y. and Li, H.J., Laplace domain method for evaluating mean-square response of simple oscillators to nonstationary excitation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.56 (2019), pp.1-13.
- Kobayashi T., Takeuchi, K., Tsuchida, T. and Kimura, K., Transient Response of Linear Systems Subjected to Non-Gaussian Random Excitation with a Wide Range of Bandwidth, *Japan Society of Mechanical Engineers, Dynamics and Design Conference 2018* (2018), 153 (in Japanese).
- Narita, K., *A Friendly Guide to Probability Models with Examples and Solutions to Problems*, Kyoritsu Shuppan, (2010). (in Japanese)
- Stathopoulos, T., PDF of wind pressures on low-rise buildings, *Journal of the Structural Division*, Vol.106 (1980), pp. 973-990.
- Tsuchida, T. and Kimura, K., Response Distribution of an Asymmetric Nonlinear Stiffness System to Non-Gaussian Random Excitation for a Wide Range of Bandwidth, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.79, No.799 (2013), pp.582-592 (in Japanese).
- Wu, C. and Cai, G.Q., Effects of excitation probability distribution on system responses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.39, No.9 (2004), pp.1463-1472.