Advance Publication by J-STAGE

日本機械学会論文集

Transactions of the JSME (in Japanese)

DOI:10.1299/transjsme.21-00165

Received date : 20 May, 2021

Accepted date : 19 October, 2021

J-STAGE Advance Publication date : 29 October, 2021

時間領域差分法による非フーリエ熱伝導方程式と連成された 動熱弾性問題の数値解析

荒井 正行^{*1}, 弥生 一志^{*2}, 山崎 伊織^{*3}

Numerical analysis of dynamic thermoelastic problem combined with non-Fourier heat transfer equation by finite-difference time-domain method

Masayuki ARAI^{*1}, Kazushi YAYOI^{*2} and Iori YAMAZAKI^{*3}

^{*1,*2} Graduate School of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science

6-3-1 Nijuku, Katsushika-ku, Tokyo 125-8585, Japan

^{*3} Komatsu Ltd., 2-3-6 Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107-8414, Japan

Abstract

Heat transfer in media is generally characterized by the empirical heat conduction law which was proposed by Fourier. However, the application of this empirical law to the problem of fast transient heat transfer such as a pulsed laser heat is not available, which is an important engineering problem. A heat conduction equation that considers about the time delay in the heat flux has been proposed to overcome such problem. In addition, Load and Shulman attempted to extend the heat conduction equation coupled with thermoelastic deformation. In this study, a nonlinear partial differential equation for the coupled problem of heat waves and thermoelastic waves with time delay was derived. Furthermore, temperature and thermal stress analysis was performed on the one-dimensional bar problem based on the finite-difference time-domain method. As results obtained in this study, thermal wave split into two peaks and propagated along the bar by considering the coupled thermoelasticity effect in the heat conduction equation. The elastic wave caused by the thermoelasticity effect also propagated. However, it was found that the peak stress in elastic wave was relaxed as the coupling effect being stronger.

Keywords : Fourier heat transfer, Non-Fourier heat transfer, Thermoelastic problem, Finite-difference time-domain method

1. 緒 言

熱輸送現象は物体中において高温領域から低温領域に向かって熱が移動するプロセスをいう。このとき、単位面積、単位時間当たりの熱移動量、所謂熱流束は

$$q_i(x_j, t) = -k \partial_i T(x_j, t) \quad (1)$$

のように表され、これは“フーリエの法則”と呼ばれる。ここで、 $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ 、 q_i は熱流束ベクトル、 $T = T(x_j, t)$ は温度、 t は時間、 k は熱伝導率、下添字 $i, j = 1, 2, 3$ である。つぎにエネルギー保存則により

$$\dot{E}(x_j, t) = -\partial_m q_m(x_j, t) + Q(x_j, t) \quad (2)$$

ここで、 $(\dot{}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ である。また、下添え字において同じ記号が繰り返されるときにアインシュタインの総和規約に従うものとする。また、 Q は内部発熱量、 E は内部エネルギーであり、これは

$$\dot{E}(x_j, t) = \rho c \dot{T}(x_j, t) \quad (3)$$

のようにも表される。ここで、 ρ は密度、 c は比熱である。よって、式(1)~(3)により以下の偏微分方程式が得られる。

$$\kappa \partial_m \partial_m T(x_j, t) = \dot{T}(x_j, t) \quad (4)$$

これは、よく知られている熱伝導方程式と呼ばれる温度分布を規定する場の支配方程式である。ここで、簡単のために内部発熱量 Q はゼロとおいた。また、 $\kappa \equiv k/(\rho c)$ は熱拡散率であり、式(4)の導出に際しては温度に依存しない材料定数と仮定した。この熱伝導方程式を適当な初期条件と境界条件のもとで解くことで物体中の温度分布が求められることになる。ここで、熱伝導方程式(4)の数学的性質に注目してみる。この偏微分方程式は、放物型偏微分方程式と同一形式であることがわかる。このことは、その数学的性質から、本方程式から得られる解が無限大の伝ば速度を含むことを意味する。

ところで近年、パルスレーザの適用やナノオーダーのセンサー開発に伴い、原子レベルでの熱輸送現象の解明に注目が集まっている。すなわち、これまでに報告されている研究成果によれば、巨視的に見た熱輸送モデルがミクロ系にはそのまま適用できない可能性が指摘されるようになった (Herwing et al., 2000, Akbaradeh et al., 2017)。そこで、上述したフーリエの法則の妥当性に疑問が持たれている。この疑問は、先に指摘した無限大の熱波の伝ば速度に起因しており、この問題を解決するため、熱流束に時間遅延を考慮した熱伝導方程式が提案された。以下ではその概略について説明する。

まず、式(1)の熱流束ベクトルに対して緩和時間 t_0 を以下のように導入する。

$$q_i(x_j, t + t_0) = -k \partial_i T(x_j, t) \quad (5)$$

つぎに、緩和時間 t_0 を1より十分小さいものとし、熱流束ベクトルをテーラー展開すると以下の式が得られる。

$$q_i(x_j, t) + t_0 \dot{q}_i(x_j, t) = -k \partial_i T(x_j, t) \quad (6)$$

これにより、式(2), (3), (6)から以下のような時間遅延項を含んだ熱伝導方程式が得られる。

$$\kappa \partial_m \partial_m T(x_j, t) = \dot{T}(x_j, t) + t_0 \ddot{T}(x_j, t) \quad (7)$$

この方程式は、本方程式をはじめて導出した Cattaneo と Vernotte の名前を冠して C-V 方程式 (Cattaneo, 1948, Vernotte, 1948) と呼ばれている。本方程式は、熱流束に対して時間遅延効果を取り入れることで、熱波の伝ば速度が有限値となるよう工夫されている点に特徴がある (Ali et al., 2005)。

ところで、急激な加熱により物体は局所的に膨張する。この膨張は周囲に拘束されて、熱応力を発生させるから、物体に生じた熱波は熱弾性波も同時に発生することになる。このため、時間遅延を考慮した熱伝導方程式の数学的研究とともに、時間遅延を考慮した熱輸送モデルと熱弾性波の連成問題についても研究が行われている (Load et al., 1967, Achenbach, 1968)。ここでは、非フーリエ熱伝導方程式と連成された動熱弾性問題に関するこれまでの研究の一例を紹介する。Tzou(1990)は、無限弾性体中を高速で伝ばするき裂先端での発熱現象に起因して生じた熱衝撃問題を非フーリエ熱伝導方程式により解いた。これにより、熱波の伝ば挙動ならびに動熱弾性方程式により求められた熱弾性波の伝ば挙動について論じている。ただし、解法の容易さのために、非フーリエ熱伝導方程式において温度・応力の連成効果までは考慮されていない。Suh ら(1998)は、非フーリエ熱伝導方程式と動熱弾性方程式を連成させて得られる熱波と熱弾性波の伝ば過程に及ぼす緩和時間の影響を論じている。このために、1次元偏微分方程式に対するスペク

トル解析が行われた。ただし、そこで対象とされた偏微分方程式においては、非フーリエ熱伝導方程式に含まれる温度・応力連成効果の高次項を無視して線形化された偏微分方程式系が対象とされた。以降、基本的にはこの線形化された偏微分方程式系に基づいて様々な問題が解かれている。例えば、Magdy ら(2010)は半無限体表面の有限領域に対して瞬間的に加熱された時の熱波と熱弾性波を論じた。Bagri ら(2008)は、円柱座標系下での円板問題を Laplace 変換法により解くことを試みた。Jabbari ら (2011) らは同様な問題を変位関数法により解くことを試みている。さらに、Zenkour(2015)は熱衝撃下での平板問題を解いている。Kiani ら(2016)は、球座標系における偏微分方程式を用いて中空球体中を伝ばする熱波と応力波の干渉解析を行っている。解法には、変位の内挿関数を用いて偏微分方程式を離散化することで数値的に本問題を解いた。最後に、パルスレーザにより局所加熱された物体中での熱波と熱弾性波の伝ば挙動の解析例として、Kumar ら(1990)ならびに Chen ら(2004)は、境界条件に対してパルスレーザ特有の照射条件を考慮することで問題を解いたが、先に紹介した研究と同様な偏微分方程式を適用している。以上の先行研究からわかるように、緩和時間を導入した熱波と熱弾性波の連成問題による完全な連成方程式の定式化(Arai et al., 2000)及びその連成方程式から得られる温度・応力場についてはほとんど研究が行われていないのが現状である。

そこで本研究では、時間領域差分法により同方程式を離散化し、これにより数値解析できるようプログラムを作成することを試みる。本論文では一次元棒中を伝わる波動問題を例に取り上げて、本研究で作成したプログラムにより熱波と熱弾性波の伝ばと相互干渉効果について明らかにすることを目的とする。時間領域差分法は、マックスウェル方程式のような電場と磁場が相互に関連しあうような複雑な支配方程式において、時間に伴う状態変化を計算するために開発された方法であり、近年では本手法が動弾性問題へ適用されるようになってきている (Yamawaki, 2010)。この観点から本研究は、時間領域差分法を熱伝導方程式と連成させた熱動弾性方程式に利用しようとしたはじめての試みでもある。なお、本論文で対象としている非フーリエ熱伝導方程式の有用性は、考察対象とされる領域がマイクロサイズと小さく、かつフェムト秒といった時間オーダーレベルの問題においてより顕著となる。

2. 基礎式

2・1 動熱弾性方程式

微小変形を仮定すると、ひずみテンソル ε_{ij} は変位ベクトル u_i とつぎのように関係づけられる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (8)$$

また、微小要素に対する力のつり合いの式より弾性体中のある点に対する運動方程式は

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_m \sigma_{mi} \quad (9)$$

つぎに一般化されたフックの法則は

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon \delta_{ij} - \gamma(T - T_0)\delta_{ij} \quad (10)$$

で表される。ここで、 λ と μ はラーメの定数、 T は温度、 T_0 は応力ゼロでの基準温度、 $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$ は体積膨張率である。また、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 γ は

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$$

であり、 α は熱膨張係数である。なお

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \mu = G$$

であり、 E は縦弾性係数、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。また、簡単のためにここに用いられたすべての材料定数は温度に依存しないものと仮定する。

式(8)ならびに式(10)を式(9)に代入することで以下の動熱弾性方程式が得られる。

$$\rho \ddot{u}_i = \mu \partial_m \partial_m u_i + (\lambda + \mu) \partial_i \epsilon - \gamma \partial_i T \quad (11)$$

2・2 非フーリエ熱伝導方程式

弾性体のエネルギー方程式は

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho T \dot{s} = \rho \dot{e} \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 ρ は密度、 e は内部エネルギー密度、 s はエントロピー密度であり、簡単のためにここに用いられたすべての材料定数は温度に依存しないものと仮定する。また

$$\rho T \dot{s} = -\partial_i q_i \quad (13)$$

である。本研究では、熱流束ベクトル q_i は式(6)のように表せるものとし、これを「非フーリエの法則」と呼ぶこととする。なお、式(6)において $t_0 = 0$ とおくことで

$$q_i = -k \partial_i T(x_j, t) \quad (14)$$

となり、これまでの古典的なフーリエの法則に一致する。

つぎにヘルムホルツの自由エネルギー関数

$$\phi(\epsilon_{ij}, T) = e(\epsilon_{ij}, T) - T s(\epsilon_{ij}, T) \quad (15)$$

の全微分は

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \phi}{\partial T} \dot{T} \quad (16)$$

一方、式(15)の両辺を時間微分すると

$$\dot{\phi} = \dot{e} - \dot{T} s - T \dot{s} \quad (17)$$

これに式(12)を代入し

$$\rho \dot{\phi} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho s \dot{T} \quad (18)$$

さらに式(16)と式(18)と比較することで以下の式を得る。

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (19)$$

$$s = -\frac{\partial \phi}{\partial T} \quad (20)$$

式(20)を式(13)に代入し、式(16)を考慮すると

$$\partial_i q_i = \rho T \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \dot{\varepsilon}_{ij} \right\} \quad (21)$$

式(6)と式(21)を組み合わせて

$$k \partial_i \partial_i T = -\rho T \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (\dot{\varepsilon}_{ij} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{ij}) \right\} + \dots (high\ order\ term) \quad (22)$$

ここで、比熱

$$c_E = -T \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \quad (23)$$

と式(19)より、式(22)の偏微分方程式は

$$k \partial_i \partial_i T = \rho c_E (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) - T \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} (\dot{\varepsilon}_{ij} + t_0 \ddot{\varepsilon}_{ij}) \quad (24)$$

となる。ここで、式(22)において高次項を無視した。

最後に式(10)を式(24)に代入して

$$k \partial_i \partial_i T = \rho c_E (\dot{T} + t_0 \ddot{T}) + \gamma T (\dot{\varepsilon} + t_0 \ddot{\varepsilon}) \quad (25)$$

を得る。この式(25)が熱弾性変形効果を考慮した熱伝導方程式である。本研究では、本方程式を「非フーリエ熱伝導方程式」と呼ぶこととする。ここで、式(25)において $t_0 = 0$ とおくと

$$k \partial_i \partial_i T = \rho c_E \dot{T} + \gamma T \dot{\varepsilon} \quad (26)$$

となる。さらに熱弾性変形効果を考慮しない場合には

$$k \partial_i \partial_i T = \rho c_E \dot{T} \quad (27)$$

となり、古典的な熱伝導方程式に一致する。

2・3 一次元問題の基礎式と無次元化

三次元問題における基礎式を一次元問題に適用できるよう変形する。はじめにフックの法則は

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \right) \varepsilon_{11} - \frac{1}{\mu + \lambda} \gamma (T - T_0) \quad (28)$$

ならびに動熱弾性方程式は

$$\frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_1 = \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \right) \partial_1 \varepsilon_{11} - \frac{1}{\mu + \lambda} \gamma \partial_1 T \quad (29)$$

つぎに非フーリエ熱伝導方程式は

$$k\partial_1\partial_1T = \left(\rho c_E + \frac{\mu\gamma^2T}{(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)}\right)(\dot{T} + t_0\ddot{T}) + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\gamma T(\dot{\varepsilon}_{11} + t_0\ddot{\varepsilon}_{11}) \quad (30)$$

ここで、式(30)の右辺第一項

$$\rho c_E + \frac{\mu\gamma^2T}{(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)}$$

に注目する．一般の金属材料を想定すると ρc_E のオーダーは 10^7 Pa/K となる．一方，他項のオーダーは

$$\frac{\mu\gamma^2T}{(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)} = \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu}\right)E\alpha^2T \sim 10^4 \text{ Pa/K}$$

ここで、温度 $T = 10^3$ K とおいた．これにより

$$\rho c_E \gg \frac{\mu\gamma^2T}{(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)} \quad (31)$$

であるから、式(30)は

$$k\partial_1\partial_1T = \rho c_E(\dot{T} + t_0\ddot{T}) + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\gamma T(\dot{\varepsilon}_{11} + t_0\ddot{\varepsilon}_{11}) \quad (32)$$

のように近似できる．ここで、 $\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1$ である．以上に示した式が一次元問題のための基礎式である．

つぎに、これらの基礎式を無次元化する．無次元化作業に先立ち、基礎式をつぎのようにおきかえておく．はじめにフックの法則は

$$\frac{\sigma}{\alpha E T_0} = \frac{\varepsilon}{\alpha T_0} - \frac{T - T_0}{T_0} \quad (33)$$

のように変形する．つぎに動熱弾方程式は

$$\frac{a^2}{\alpha\kappa^2}\ddot{u} = \frac{1}{\alpha}\partial_1\partial_1u - \partial_1T \quad (34)$$

のように変形する．

非フーリエ熱伝導方程式は

$$\partial_1\partial_1T - \frac{1}{\kappa}\dot{T} - \frac{a^2}{\kappa^2}\left(\frac{C_{ST}}{C_T}\right)^2\ddot{T} = \frac{\alpha E}{\rho c_E}T\left\{\frac{1}{\kappa}\dot{\varepsilon} + \frac{a^2}{\kappa^2}\left(\frac{C_{ST}}{C_T}\right)^2\ddot{\varepsilon}\right\} \quad (35)$$

となる．ここで、 $\sigma_{11} \rightarrow \sigma$ ， $u_1 \rightarrow u$ ， $\varepsilon_{11} \rightarrow \varepsilon$ のように置き換えたことに注意する．また、以下のように各物理量に対しで改めて記号を導入しておく．

・熱拡散率[m²/s] :

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_E}$$

このパラメータは、周知のように、温度分布の時間変化速度の大小を表す。

・弾性体中を伝ばする縦波の伝ば速度[m/s] :

$$C_{ST} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \right)} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

このパラメータは、弾性体中を伝ばする熱弾性波の速度を表す。

・熱波の伝ば速度[m/s] :

$$C_T = \sqrt{\frac{\kappa}{t_0}}$$

このパラメータは、弾性体中を伝ばする熱波の速度を表す。

・熱拡散率と縦波の伝ば速度に関するパラメータ[m] :

$$a = \frac{\kappa}{C_{ST}}$$

このパラメータの物理的意味を明確にするために、先の熱波の伝ば速度を代入してみると

$$a = \frac{C_T}{C_{ST}} (C_T t_0)$$

のようになる。よって、パラメータ a はある時間 t_0 の間に熱波が伝ばした距離に対する熱弾性波が移動した距離の比率を意味していることがわかる。

つぎに、本研究では以下の無次元化パラメータを導入して、偏微分方程式を無次元化する。

$$\xi \triangleq \frac{x}{a}, \tau \triangleq \frac{\kappa}{a^2} t, \tau_0 \triangleq \left(\frac{C_{ST}}{C_T} \right)^2, \theta \triangleq \frac{T - T_0}{T_0}, \Sigma \triangleq \frac{\sigma}{\alpha E T_0}, U \triangleq \frac{u}{\alpha \alpha T_0}, \beta \triangleq \frac{\alpha^2 T_0 C_{ST}^2}{c_E}$$

ここで、これら無次元化パラメータのもつ物理的意味を考えてみる。はじめに無次元化長さ ξ は、ある時間 t_0 の間に熱弾性波が移動した距離に対する比を、無次元化時間 τ は、熱弾性波が移動したある代表距離に達するまでの時間に対する比 ($\tau = \frac{C_{ST}}{a} t$) をそれぞれ意味している。つぎに、無次元化遅延時間（以降、単に遅延時間と呼ぶ） τ_0 は、熱波の伝ば速度に対する熱弾性波の伝ば速度の比であり、 $C_T \rightarrow \infty$ のとき、緩和時間がゼロに相当することになる。ま

た，無次元化温度 θ ，無次元化応力 Σ ，無次元化変位 U は，代表温度 T_0 に対する温度差の比，熱応力の比，熱伸びの比である．最後に無次元化パラメータ β は

$$\beta = \left[\frac{(E\alpha T_0)^2}{E} \right] / (\rho c_E T_0)$$

のように変形できるから，同無次元化パラメータは，単位体積当たりに蓄えられた熱弾性ひずみエネルギーと熱量の比率であることがわかる．

これにより基礎式は以下のように無次元化される．はじめにフックの法則は

$$\Sigma = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \theta \quad (36)$$

つぎに動熱弾性方程式は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (37)$$

また，非フーリエ熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \beta(\theta + 1) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (38)$$

なお，温度変動が小さい場合($\theta \ll 1$)には，式(38)はつぎのように非線形偏微分方程式を線形化できる．

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \beta \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (39)$$

これは，これまでに対象とされた偏微分方程式に一致する．さらに連成効果が少ない($\beta \sim 0$)とすると，式(39)はつぎのように近似できる．

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (40)$$

3. 時間領域差分法による離散化方程式

ここでは一次元問題の基礎式に対する離散化方程式を導出する．緒言でも述べたように本研究では，時間領域差分法に従って離散化方程式を導く．本研究では，離散化方程式の導出に際して以下の粒子速度 V を導入する．

$$V = \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad (41)$$

この粒子速度により基礎式は以下ようになる．まず，式(36)の両辺を τ で偏微分すると

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (42)$$

のようになる。同様にして、式(37)は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (43)$$

となる。ここで再び式(9)に注目する。一次元問題において、この式は次のようになる。

$$\rho \ddot{u}_1 = \partial_1 \sigma_{11} \quad (44)$$

式(44)を無次元化するとともに、粒子速度を導入すると以下のようになる。

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} \quad (45)$$

式(45)を τ について偏微分し、これに式(42)を代入することで式(43)が得られるから、時間領域差分法の基礎式として、本研究では、運動方程式として式(45)を採用することとした。

つぎに式(38)に粒子速度を適用すると次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \beta(\theta + 1) \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (46)$$

以上に示した一次元の無次元化方程式を離散化するために、ある有限区間 $[0, l]$ を $N = l/\Delta\xi$ 個の区間に分割する。図 1 に一次元棒の格子点モデルを示す。図において、格子点 (n, m) を時間柱内の点 $(n\Delta\xi, m\Delta\tau)$ ($0 \leq n \leq N, m = 0, 1, 2, \dots$)として定義する。これにより、格子点における粒子速度 $V = V(\xi, \tau)$ 、温度 $\theta = \theta(\xi, \tau)$ 、応力 $\Sigma = \Sigma(\xi, \tau)$ は

$$\begin{aligned} V &= V(\xi, \tau) = V(n\Delta\xi, m\Delta\tau) \equiv V_n^m \\ \theta &= \theta(\xi, \tau) = \theta(n\Delta\xi, m\Delta\tau) \equiv \theta_n^m \\ \Sigma &= \Sigma(\xi, \tau) = \Sigma(n\Delta\xi, m\Delta\tau) \equiv \Sigma_n^m \end{aligned}$$

のように表される。ただし、 V の計算には奇数番目の格子点を用い、 θ 、 Σ の計算には偶数番目の格子点を用いるものとする。この点が時間領域差分法の特徴である。

Fig. 1 Grid points model of one-dimensional bar.

図 1 の格子点モデルにおいて一階偏微分は

$$\frac{\partial f(s + \Delta s/2)}{\partial s} = \frac{f(s + 2\Delta s) - f(s)}{2\Delta s}$$

さらに二階偏微分は

$$\frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} = \frac{f(s + 2\Delta s) - 2f(s) + f(s - 2\Delta s)}{4(\Delta s)^2}$$

のように表される. この規則に従って式(42)は

$$\frac{\Sigma_{n+2}^{m+2} - \Sigma_{n+2}^m}{2\Delta\tau} = \frac{V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1}}{2\Delta\xi} - \frac{\theta_{n+2}^{m+2} - \theta_{n+2}^m}{2\Delta\tau}$$

のようになる. さらにこの式を整理することで, 以下のフックの法則に対する離散化方程式を得る.

$$\Sigma_{n+2}^{m+2} = \Sigma_{n+2}^m + \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} (V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1}) - (\theta_{n+2}^{m+2} - \theta_{n+2}^m) \quad (47)$$

つぎに, 式(45)は

$$\frac{V_{n+3}^{m+3} - V_{n+3}^{m+1}}{2\Delta\tau} = \frac{\Sigma_{n+4}^{m+2} - \Sigma_{n+2}^{m+2}}{2\Delta\xi}$$

この式を整理することで, 以下の動弾性方程式に関する離散化方程式を得る.

$$V_{n+3}^{m+3} = V_{n+3}^{m+1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} (\Sigma_{n+4}^{m+2} - \Sigma_{n+2}^{m+2}) \quad (48)$$

式(46)は

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{n+4}^{m+2} - 2\theta_{n+2}^{m+2} + \theta_n^{m+2}}{4(\Delta\xi)^2} - \frac{\theta_{n+2}^{m+4} - \theta_{n+2}^{m+2}}{2\Delta\tau} - \tau_0 \frac{\theta_{n+2}^{m+4} - 2\theta_{n+2}^{m+2} + \theta_{n+2}^m}{4(\Delta\tau)^2} \\ = \beta(\theta_{n+2}^{m+2} + 1) \left\{ \frac{V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1}}{2\Delta\xi} + \tau_0 \frac{(V_{n+3}^{m+3} - V_{n+1}^{m+3}) - (V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1})}{4\Delta\tau\Delta\xi} \right\} \end{aligned}$$

この式を整理することで, 以下の非フーリエ熱伝導方程式に関する離散化方程式を得る.

$$\begin{aligned} (\tau_0 + 2\Delta\tau)\theta_{n+2}^{m+4} = \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}\right)^2 (\theta_{n+4}^{m+2} - 2\theta_{n+2}^{m+2} + \theta_n^{m+2}) + 2(\tau_0 + \Delta\tau)\theta_{n+2}^{m+2} - \tau_0\theta_{n+2}^m \\ - \beta(\theta_{n+2}^{m+2} + 1) \left(\frac{\Delta\tau}{\Delta\xi}\right) \{ 2\Delta\tau(V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1}) + \tau_0[(V_{n+3}^{m+3} - V_{n+1}^{m+3}) - (V_{n+3}^{m+1} - V_{n+1}^{m+1})] \} \end{aligned} \quad (49)$$

これらの離散化方程式に対して初期条件ならびに境界条件を考慮することで数値解が得られることになる.

4. 一次元棒中を伝ばする熱波・熱弾性波の数値解析

4・1 解析モデルと境界条件

本研究では、以下の三種類の問題を対象に一次元棒中を伝ばする熱波・熱弾性波について調べることにした。

- ・問題 1：古典的問題:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad (50)$$

- ・問題 2：熱弾性連成効果を考慮しない場合:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = 0 \end{cases} \quad (51)$$

- ・問題 3：熱弾性連成効果を考慮した場合:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \beta(\theta + 1) \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \right\} \end{cases} \quad (52)$$

図 2 に解析モデルを示す。本モデルは、長さ $l = 30.0$ [-] の一次元棒である。この棒の問題における初期条件として温度 $\theta(\xi, 0) = 0$ 、粒子速度 $V(\xi, 0) = 0$ 、応力 $\Sigma(\xi, 0) = 0$ とした。また、境界条件は以下に示す 3 つの条件のいずれかを一次元棒モデルの左端に適用することとした。

Fig. 2 One-dimensional bar model.

- ・境界条件(A)：

温度境界条件として左端にステップ関数 $H(\tau)$ を与える。また、応力境界条件は左端で応力を 0 とする。

$$\begin{cases} \theta(0, \tau) = H(\tau) \\ \Sigma(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

これを離散化するとつぎのようになる.

$$\begin{cases} \theta_0^m = H(\tau) \\ \Sigma_0^m = 0 \end{cases} \quad (54)$$

・境界条件(B) :

温度境界条件は左端で温度を 0 とする. 一方, 応力境界条件は左端でステップ関数 $-H(\tau)$ を与える. ただし, $-H(\tau)$ は圧縮応力であることに注意する.

$$\begin{cases} \theta(0, \tau) = 0 \\ \Sigma(0, \tau) = -H(\tau) \end{cases} \quad (55)$$

これを離散化するとつぎのようになる.

$$\begin{cases} \theta_0^m = 0 \\ \Sigma_0^m = -H(\tau) \end{cases} \quad (56)$$

・境界条件(C) :

温度境界条件は左端でステップ関数 $H(\tau)$ を与える. さらに, 無次元化時間 η だけずらせて応力境界条件としてステップ関数 $-H(\tau - \eta)$ を与える.

$$\begin{cases} \theta(0, \tau) = H(\tau) \\ \Sigma(0, \tau) = -H(\tau - \eta) \end{cases} \quad (57)$$

これを離散化するとつぎのようになる.

$$\begin{cases} \theta_0^m = H(\tau) \\ \Sigma_0^m = -H(\tau - \eta) \end{cases} \quad (58)$$

一方, 一次元棒の右端の境界条件はつぎのように与えた. 温度境界条件は断熱条件とした. このため, 熱流束は 0 となり

$$q = -k \frac{d}{d\xi} \theta(\xi, \tau) = 0 \quad (59)$$

これを時間領域差分法に基づいて離散化すると

$$-k \frac{\theta_{n+2}^m - \theta_n^m}{2\Delta\xi} = 0 \quad (60)$$

となり, これにより

$$\theta_{n+2}^m = \theta_n^m \quad (61)$$

の関係式を得る.

つぎに変位境界条件は、一次元棒の右端が剛体壁に固定されているため、粒子速度は 0 となるから

$$V_n^m = 0 \quad (62)$$

である.

4・2 解析結果および考察

問題 1：古典的問題

はじめに境界条件(A)の解析結果を示す. ただし, 急な温度入力により計算結果が不安定になることを考慮して, 時間 $\tau = 1.0$ [-]にて $\theta = 1.0$ [-]になるまで温度を線形に増加させた後, この温度を一定保持することで計算の安定化を図った. また, 離散化条件として, 空間ステップ数を $N = 600$, 時間ステップ数を $M = 10000$ とし, $\tau = 10.0$ まで解析を行った. なお, 以降のすべての問題に対しても上述した離散化条件と同一のもとで解析を行った. 図 3 に温度分布の時間変化を示す. ここで, 横軸は一次元棒モデルにおける左端からの無次元化距離 ξ , 縦軸は無次元化温度 θ を示しており, 図中のシンボルは厳密解, 実線は数値結果を示す. ただし, 厳密解は文献(Sternberg et al, 1959)の式を参考にエクセルで求めた. 図から, 本解析プログラムにより得られた結果は厳密解に完全に一致していることが確認できる. また, 無次元化温度は無次元化距離とともに急激に低下すること, 無次元化時間とともにこの分布が緩やかになり, 温度が一次元棒の右側へゆるやかに拡散していく様子が再現できている. つぎに図 4 に応力分布の時間変化を示す. ここで, 横軸は一次元棒モデルにおける左端からの無次元化距離 ξ , 縦軸は無次元化応力 Σ を示しており, 図中のシンボルは厳密解, 実線は数値結果を示す. ただし, 前節の温度分布と同様に厳密解は文献(Sternberg et al, 1959)の式を参考にエクセルで求めた. 図においても, 本解析プログラムにより得られた結果は厳密解に一致していることが確認できる. ただし, 応力が圧縮側からゼロになる点で, 本解析結果と厳密解にやや違いが認められる. 空間ステップ数をさらに増加させてもこの相違が認められたため, これは本離散解析手法における数値誤差と考えられた. 応力分布に注目すると, 圧縮応力が棒左端で発生し, これが無次元化時間とともに棒の右側へ伝ばしていくことがわかる. これは棒の左端が急激に加熱されることで, 一次元棒中が部分的に膨張する. 一方, それと隣接した領域では温度上昇していないため, 膨張が局所的となって高い圧縮応力が発生した. これが縦波となって棒の右側へと伝ばした.

Fig. 3 Variation of temperature distribution with time for classical problem (B.C. (A)).

Fig. 4 Variation of stress distribution with time for classical problem (B.C. (A)).

つぎに境界条件(B)の解析結果を示す. ただし, 急な応力入力により計算が不安定になることを考慮して, 時間 $\tau = 1.0$ [-]にて $\Sigma = -1.0$ [-]になるまで応力を線形に増加させた後, この応力を一定保持することで計算の安定化を図った. 図 5 に応力分布の時間変化を示す. 本解析結果から, 無次元化距離に対する無次元化応力が圧縮側に階段状に分布し, これが一定の速度, すなわち弾性波となって右側へと伝ばしている様子が確認できる. 時間の経過に伴い, 応力波の波頭に小さな変動がみられるが, これは解析誤差によるものと思われる.

最後に境界条件(C)の解析結果を示す。図 6 に応力分布の時間変化を示す。それぞれの結果は、温度境界条件と応力境界条件の時間ずれ、すなわちずらし時間 η が異なる解析結果が示されている。なお、ずらし時間 $\eta = 0$ は先に示した結果、すなわち図 5 である。図からずらし時間がゼロで得られた階段状の応力分布に対して、ずらし時間を境界条件に考慮することで、応力分布が大きく変動するようになる。このように応力変動が発生した原因は、波の重ね合わせを考えることで容易に理解できる。すなわち、はじめに瞬間的に棒の左端が加熱されることで発生した圧縮応力が右側へ伝ばする。その後、圧縮応力が急激に棒の左端に作用して、この応力が棒中を伝ばする。対象とする偏微分方程式は線形系であるから波の重ね合せの原理が成り立ち、これにより、これらふたつの波が重なることで上述した応力場の変動が発生した。

Fig. 5 Variation of stress distribution with time for classical problem (B.C. (B)).

Fig. 6 Variation of stress distribution with time for classical problem (B.C. (C)).

問題 2：熱弾性連成効果を考慮しない場合

はじめに境界条件(A)の解析結果を示す。図 7 に温度分布の時間変化を示す。それぞれの図は、遅延時間 $\tau_0 = 0.5, 1.0, 5.0$ の結果を示している。図より、いずれの結果においても温度分布は棒の長さ方向に急峻な形状となっている。この特徴は、遅延時間 τ_0 が長くなるにつれてより顕著となる。これは熱弾性波に対して熱波の伝ば速度が遅いため、温度分布が急峻になったものと考えられる。以上により、温度分布に及ぼす遅延時間の効果が明瞭に認められた。

Fig. 7 Variation of temperature distribution with time for the problem without thermoelastic effect (B.C. (A)).

図 8 に応力分布の時間変化を示す。遅延時間 $\tau_0 = 1.0$ になるまで熱弾性波のピークが増加している。さらに遅延時間が長くなると熱弾性波のピークは小さくなる。これは先に認められたすそ野で温度分布が急峻になったことと対応しており、棒に生じる合力が一定となるよう狭い幅で生じた温度変化による熱応力分布が棒の長さ方向に広がった結果、熱弾性波のピーク値が小さくなったと考えられる。なお、いずれの解析結果においても熱弾性波がゼロとなる近傍で波形が振動している。これも数値解析において生じた数値誤差によるものと考えられる。原因については不明であるが、遅延時間 $\tau_0 = 1.0$ の結果において波形の振動がより顕著に表れている。

Fig. 8 Variation of stress distribution with time for the problem without thermoelastic effect (B.C. (A)).

つぎに境界条件(C)の解析結果を示す。図 9,10 に応力分布の時間変化を示す。ただし、ずらし時間 $\eta = 0.0, 1.0$ のそれぞれの条件のもとで遅延時間 $\tau_0 = 0.5, 1.0, 2.0$ のように変化させて解析を行った。はじめにずらし時間 $\eta = 0.0$ の結果(図 9)に注目すると、 $\tau_0 = 1.0$ の結果において数値誤差による応力変動が見られるが、緩和時間を考慮しない場合に比べて緩和時間を考慮した方が熱弾性波のピーク値は大きいことがわかる。これに対してずらし時間 η を考慮すると、熱弾性波は分離するとともに、同波のピーク値は $\eta = 0.0$ のそれに比べて小さくなる。これらの結果のなかで、 $\eta = 1.0$ かつ $\tau_0 = 2.0$ の結果において、分離して生じていた熱弾性波が時間の経過とともに相互に結合している。これははじめに棒の左端が急激に加熱されて生じた熱波による熱弾性波に対して、あとから発生した応力波が追いついたことによるものと考えられる。いずれにしても、温度境界条件と応力境界条件の間にずれ時間を設けることで、それぞれの境界条件に従って発生した熱弾性波と応力波とが複雑に相互に干渉しあうことがわかった。なお、本結果においても、遅延時間 $\tau_0 = 1.0$ の結果にて数値誤差による応力変動が顕著であったが、今後、本研究で対象としている偏微分方程式における解の安定化条件を数学的に検討することが望まれる。

Fig. 9 Variation of stress distribution with time for the problem without thermoelastic effect (B.C. (C), $\eta = 0.0$).

Fig. 10 Variation of stress distribution with time for the problem without thermoelastic effect (B.C. (C), $\eta = 1.0$).

問題 3：熱弾性連成効果を考慮した場合

はじめに境界条件(A)の解析結果を示す．図 11,12 に温度分布の時間変化を示す．図には連成パラメータ, $\beta = 0.0, 0.5$ のもと, 遅延時間 $\tau_0 = 0.5, 1.0, 2.0$ のように変化させて解析を行った．これらの結果から, 連成効果を考慮することで, 温度分布のすそ野にもうひとつの温度変化 (図中の矢印) が明瞭に認められるようになる．紙面の都合上結果を示すことは省略するが, この温度分布のピーク値は, 連成パラメータに伴って大きくなっているようであった．

Fig. 11 Variation of temperature distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (A), $\beta = 0.0$).

Fig. 12 Variation of temperature distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (A), $\beta = 0.5$).

図 13,14 に応力分布の時間変化を示す。非連成のもとで得られているこれまでの結果と同様に、遅延時間 $\tau_0 = 1.0$ で熱弾性波のピーク値は最も大きい。また、結果については紙面の都合上省略するが、連成パラメータ β の値が大きくなるにつれて、同波のピークの値が小さくなり、これまでのスパイク形状分布から、棒の長さ方向に沿って広がるようななだらかな形状となった。これらのことから、連成効果が強くなるにつれて、温度分布がふた山に分かれること、これにより熱弾性波のピーク値が低くなることがわかった。

Fig. 13 Variation of stress distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (A), $\beta = 0.0$).

Fig. 14 Variation of stress distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (A), $\beta = 0.5$).

最後に境界条件(C)の解析結果を示す。図 15 と図 16 に温度分布の時間変化を示す。前節の結果と同様に、連成パラメータ β の値が大きくなると温度分布の形状は崩れ、2つの波が生じている。そして、この変化も先の結果に比べて大きいようである。これは、応力入力により生じた圧縮変形によって、一次元棒内部で温度が上昇したことに起因していると考えられる。図 17 と図 18 に応力分布の時間変化を示す。これまでに得られている結果と同様、温度入力と応力入力を同時に行った場合、熱弾性波のピーク値は大きくなっている。さらに遅延時間 $\tau_0 = 1.0$ においても熱弾性波のピーク値が高くなっている。ただし、連成パラメータ β の値が大きくなるのに伴い、熱弾性波においてピーク値が消失し、緩やかに変化するようになる。このように連成パラメータが熱弾性波の分布に及ぼす影響については現状不明なため、今後、熱波と熱弾性波の相互干渉効果についてさらに検討を進めていく必要がある。

Fig. 15 Variation of temperature distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (C), $\beta = 0.1$).

Fig. 16 Variation of temperature distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (C), $\beta = 0.5$).

Fig. 17 Variation of stress distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (C), $\beta = 0.1$).

Fig. 18 Variation of stress distribution with time for the problem with thermoelastic effect (B.C. (C), $\beta = 0.5$).

5. 結 言

近年、パルスレーザの工学的応用やナノオーダーのセンサー開発に伴い、原子レベルでの熱輸送現象の解明に注目が集まっている。すなわち、巨視的に見た熱輸送モデルがマイクロ系にはそのまま適用できない可能性が指摘されるようになり、フーリエの法則の妥当性に疑問が持たれている。このような問題を解決するために、熱流束に時間遅延を考慮した熱伝導方程式が提案されている。

本研究では、緩和時間を導入した熱波と熱弾性波の連成問題に対する非線形偏微分方程式を導出した。さらに、導出した方程式を時間領域差分法に基づいて離散化するとともに、数値解析プログラムを作成した。本論文では、基礎理論とその連成効果を確認するために、一次元棒問題を対象に温度・熱応力解析を行い、熱波と熱弾性波の相互干渉効果について調べた。得られた結果を要約すると以下になる。

・瞬間加熱された一次元棒問題：

古典的問題に基づいて得られた温度分布においては、時間とともに温度分布が一次元棒右端に向かって緩やかに変化したのに対して、緩和時間を考慮することで、温度分布は棒の長さ方向に対して急峻な分布となった。さらに、熱弾性連成効果が加味されると、温度分布のすそ野にもうひとつの温度変化が認められた。この結果、連成効果を考慮することでふたつの熱波が棒中を伝ばしていくことがわかった。一方、熱弾性波においては、古典的問題では棒の左端で圧縮応力が発生し、右端に向かって伝播することを確認した。

・瞬間加熱・瞬間負荷された一次元棒問題：

古典的問題及び緩和時間を考慮した結果は先に示した結果と同様であった。ただし、熱弾性連成効果を考慮した結果では、温度分布がふた山に完全に分離し、それらが棒に沿って右端へと伝ばした。一方、熱弾性波については、古典的問題においては最初の瞬間加熱により生じた熱弾性波とその後の瞬間負荷による弾性波の重ね合わせた熱弾性波が棒中を伝ばすること、これに遅延時間ならびに熱弾性連成効果を考慮することで熱弾性波のピーク値が低下していく様子が認められた。

以上により、温度場においては熱伝導方程式に遅延効果と熱弾性連成効果を考慮することで、温度分布が分離し、それらが棒中を伝ばしていくこと、応力場においては温度と負荷に対応した弾性波と熱弾性波が発生し、これが棒中を伝ばしていくこと、ただし連成効果が強くなると相互作用により緩和されて応力のピーク値が低下すること、が明らかとなった。

謝 辞

本論文を完成させるために必要となった数値解析の追加実施に際して、東京理科大学工学部機械工学科 桑原洋介君（荒井研究室 卒研究生）に協力頂いた。ここに多大なる感謝を致します。

文 献

Achenbach, J. D., The influence of heat conduction on propagating stress jumps, Journal of the Mechanics and Physics, Vol.

16, Issue 4 (1968), pp. 273-282.

- Akbarzadeh, A. H., Cui, Y. and Chen, Z. T., Thermal wave: from nonlocal continuum to molecular dynamics, *The Royal Society of Chemistry*, Vol. 7, Issue 22 (2017), pp. 13623-13636.
- Ali, Y. M. and Zhang, L. C., Relativistic heat conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, Issue 11 (2005), pp. 2397-2406.
- Arai, M. and Yamazaki, I., Numerical simulation of thermoelastic wave coupled with non-Fourier conduction equation, *American Institute of Physics: Conference Proceedings* (2020), 2309, 020019, DOI:<https://doi.org/10.1063/5.0034042>.
- Bagri, A. and Eslami, M. R., Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord-Shulman theory, *Composite Structures* Vol.83 (2008), pp. 168-179.
- Chen, J. K., Beraun, J. E. and Tham, C. L., Ultrafast thermoelasticity for short-pulse laser heating, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 42 (2004), pp. 793-807.
- Ezzat, M. A. and Youssef, H. M., Three-dimensional thermal shock problem of generalized thermoelastic half-space, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34 (2010), pp. 3608-3622.
- Herwing, H. and Beckert, K., Conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 122, Issue 2 (2000), pp. 363-365.
- Jabbari, M., Dehbani, H. and Eslami, M. R., An Exact Solution for Classic Coupled Thermoelasticity in Cylindrical Coordinates, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 133 (2011), pp. 051204-1-10.
- Kiani, Y. and Eslami, M. R., The GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of a hollow sphere, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 118 (2016), pp. 195-204.
- Kumar K. T. and Railkar, S. B., "Evaluation of Thermally Induced Non-Fourier Stress Wave Disturbances via Tailored Hybrid Transfinite Element Formulations, *Computers & Structures*, Vol. 34. No. 1 (1990), pp. 5-16.
- Load, H. W. and Shulman, Y., A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics*, Vol. 15, Issue 5 (1967), pp. 299-309.
- Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., On Inertia Effects in a Transient Thermoelastic Problem, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, No. 4 (1959), pp. 503-509.
- Suh, C. S. and Burger, C. P., Effects of Thermomechanical Coupling and Relaxation Times on Wave Spectrum in Dynamic Theory of Generalized Thermoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65 (1998), pp. 605-613.
- Tzou, D. Y., Thermal shock waves induced by a moving crack—a heat flux formulation, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 33, No. 5 (1990), pp. 877-885.
- 山脇寿, 2 段階弾性波動方程式を基本にした改良型差分法による超音波伝播シミュレーション, 非破壊検査, Vol. 59, No. 12 (2010), pp. 624-629.
- Zenkour, A. F., Three-dimensional thermal shock plate problem within the framework of different thermoelasticity theories, *Composite Structures*, Vol. 132 (2015), pp. 1029-1042.

References

- Achenbach, J. D., The influence of heat conduction on propagating stress jumps, *Journal of the Mechanics and Physics*, Vol. 16, Issue 4 (1968), pp. 273-282.
- Akbarzadeh, A. H., Cui, Y. and Chen, Z. T., Thermal wave: from nonlocal continuum to molecular dynamics, *The Royal Society of Chemistry*, Vol. 7, Issue 22 (2017), pp. 13623-13636.
- Ali, Y. M. and Zhang, L. C., Relativistic heat conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, Issue 11 (2005), pp. 2397-2406.
- Arai, M. and Yamazaki, I., Numerical simulation of thermoelastic wave coupled with non-Fourier conduction equation, *American Institute of Physics: Conference Proceedings* (2020), 2309, 020019, DOI:<https://doi.org/10.1063/5.0034042>.
- Bagri, A. and Eslami, M. R., Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord-Shulman theory, *Composite Structures* Vol.83 (2008), pp. 168-179.
- Chen, J. K., Beraun, J. E. and Tham, C. L., Ultrafast thermoelasticity for short-pulse laser heating, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 42 (2004), pp. 793-807.
- Ezzat, M. A. and Youssef, H. M., Three-dimensional thermal shock problem of generalized thermoelastic half-space, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34 (2010), pp. 3608-3622.
- Herwing, H. and Beckert, K., Conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure, *Journal of Heat Transfer*, Vol.

122, Issue2 (2000), pp. 363-365.

- Jabbari, M., Dehbani, H. and Eslami, M. R., An Exact Solution for Classic Coupled Thermoelasticity in Cylindrical Coordinates, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 133 (2011), pp.051204-1-10.
- Kiani, Y. and Eslami, M. R., The GDQ approach to thermally nonlinear generalized thermoelasticity of a hollow sphere, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 118 (2016), pp. 195-204.
- Kumar K. T. and Railkar, S. B., "Evaluation of Thermally Induced Non-Fourier Stress Wave Disturbances via Tailored Hybrid Transfinite Element Formulations, *Computers & Structures*, Vol. 34. No. 1 (1990), pp. 5-16.
- Load, H. W. and Shulman, Y., A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *Journal of the Mechanics and Physics*, Vol. 15, Issue 5 (1967), pp. 299-309.
- Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., On Inertia Effects in a Transient Thermoelastic Problem, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 26, No. 4 (1959), pp. 503-509.
- Suh, C. S. and Burger, C. P., Effects of Thermomechanical Coupling and Relaxation Times on Wave Spectrum in Dynamic Theory of Generalized Thermoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 65 (1998), pp.605-613.
- Tzou, D. Y., Thermal shock waves induced by a moving crack—a heat flux formulation, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol.33, No. 5 (1990), pp. 877-885.
- Yamawaki, H., Computer simulation for ultrasonic propagation using improved finite-difference method based on two-stage elastic wave equations, *Journal of JSNDI*, Vol. 59, No. 12 (2010), pp. 624-629 (in Japanese).
- Zenkour, A. F., Three-dimensional thermal shock plate problem within the framework of different thermoelasticity theories, *Composite Structures*, Vol. 132 (2015), pp. 1029-1042.