Advance Publication by J-STAGE

日本機械学会論文集

Transactions of the JSME (in Japanese)

DOI:10.1299/transjsme.21-00199

Received date : 23 June, 2021

Accepted date : 26 September, 2021

J-STAGE Advance Publication date : 6 October, 2021

落下中空ゴム球の衝撃力特性

岩本 宏之^{*1}, 西郷 宗玄^{*2}, 井上 勝夫^{*3}, 弓削 康平^{*1}, 加藤 浩^{*4}

Impact of dropped hollow rubber sphere on plate

Hiroyuki IWAMOTO^{*1}, Muneharu SAIGO^{*2}, Katsuo INOUE^{*3}, Kohei YUGE^{*1}
and Hiroshi KATO^{*4}

^{*1} Seikei University

3-3-1 Kitamachi, Kichijoji, Musashino-shi, Tokyo 180-8633, Japan

^{*2,*4} General System Engineering Co., Ltd.

8-4 Komukai-cho, Saiwai-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 212-0003, Japan

^{*3} Nihon University

1-8-14 Kanda Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8303, Japan

Abstract

This paper deals with the impact of dropped hollow rubber spheres against a planar surface. Hollow silicon rubber spheres are used as the impact source of the measurement of the floor impact sound insulation of buildings, but the impact characteristics have not been investigated. In order to clear the impact characteristics and show a strategy of a development of another type of source, we have conducted some experiments, FEM simulation on LS-DYNA and a one-dimensional mass-and-spring model analysis. The experiment of the impact of 4 types of rubber spheres, two hollow spheres with an outer radius of 90 mm and two solid spheres with a radius of 60 mm and 40 mm, against a surface plate were conducted. As the FEM solutions corresponded qualitatively with the experimental results, the impact analysis was done based on the FEM results. The FEM solution shows the shock stress propagation in a hollow sphere has two steps; the ‘first period’ is the stress propagation in a solid thickness part similar in a solid sphere and the following period is that to the hollow part of sphere. The frequency response of the impact force shows ‘notch’ frequencies correspond to the natural frequencies of the hollow sphere of free-free boundary condition. This is the key point to analyze the impact characteristics of dropped hollow spheres. We investigated the relations between durations, natural frequencies of free-free boundary condition and notch frequencies of impact in relation to the thickness ratio of hollow sphere. We have presented a simple model to estimate the duration and the peak impact of dropped hollow sphere for an actual design.

Keywords : Impact, Hollow sphere, Rubber sphere, Hertz theory, Natural frequency, Notch frequency

1. 緒 言

球の衝突問題はHertzの衝突理論（準静的理論）（Timoshenko and Goodier, 1970）を基礎とした多くの研究が展開されてきている。衝撃力－変位の特性を正確に表現するための実験的、理論的な研究が長年継続され、衝撃力、持続時間、跳ね返り係数に関する文献が多くある。具体的な機械要素の衝撃力に関する研究はあまり多くはなく（西村, 高橋, 1962）, 衝突現象解明の力学的なアプローチが多い（Hunter, 1957, Hunt and Crossley, 1975, Boettcher et al., 2017）. Hertz理論の非線形性に加えてひずみ速度の影響を扱った研究（Minamoto and Kawamura, 2009, 2011）, 弾塑性材を対象とした2球衝突問題（Zhang and Vu-Quoc, 2002, Big-Alabo, 2018）なども展開されている。これらは主として金属球を対象としているのに対し, Tataruはゴム球を含む非金属球を対象とした一連の

No.21-00199 [DOI: 10.1299/transjsme.21-00199]

^{*1} 正員, 成蹊大学理工学部 (〒180-8633 東京都武蔵野市吉祥寺北町 3-3-1)

^{*2} 正員, ジー・エス・イー (株) (〒212-0003 神奈川県川崎市幸区小向町 8-4)

^{*3} 日本大学理工学部 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

^{*4} ジー・エス・イー (株)

E-mail of corresponding author: hiroyuki-iwamoto@st.seike.ac.jp

研究を継続的に行った（多々良，森脇，1981，Tatara，1983，1991）．また，衝撃試験で広く用いられるゴムストライカーの衝撃力の精密な表現を試みた研究（Wen et al.，2018），ジェル球の衝突大変形を扱った研究もある（Tanaka，2005）．

従来の球衝突研究が中実球を対象としたものであるのに対し，人の歩行時の床面衝撃力特性を模擬することを目的として，建築物の床衝撃音測定のための衝撃源として中空ゴム球の落下衝撃特性が研究されてきた（Inoue et al.，2000，井上，2001，2003）．一連の研究をもとに，JIS A 1418-2に標準重量衝撃源衝撃力特性(2)として衝撃力持続時間 20 ± 2 msと衝撃力エネルギー Spektrum が規定された．同JISには質量 2.5 ± 0.2 kg，直径180 mm，肉厚30 mm，反発係数 0.7 ± 0.1 の中空ゴム球を高さ1 mからの落下させるときの衝撃力が例示されている．しかし，上記JISに関連する研究では衝撃力特性の修正や異なる特性の実現方法など一般的な衝撃力特性の知見を得るに至っていない．床衝撃源は中空球であるため，従来の中実球研究結果を適用できないと考えられる．また，著者らの知る限り中空球衝突問題を振動論的に扱った研究は見られない．

そこで，本研究ではこれまでの球衝突研究のアプローチを参考にしながら落下中空球の特性解析を行った．落下球による衝撃力の定量的な評価はLS-DYNAなどの衝撃解析有限要素法（FEM）ソフトウェアが有用であるが，衝突特性の解明にはFEM計算結果の分析に加えて振動モデルの同定による解析も役に立つ．

以下，第2章では落下球の衝撃力計測実験を示し，第3章ではLS-DYNAを用いたFEMシミュレーションを示している．FEMシミュレーションがほぼ実験結果を表現することから，第4章で中空球の衝撃力特性をLS-DYNA計算結果を用いて解析した．第5章では，Hertz接触に基づく非線形ばねで支持する1次元振動系モデルでFEM解を模擬できることを示し，簡易モデルによる衝撃力計算法を検討した．第6章はまとめである．

2. 実 験

2・1 計測方法

実験装置と計測方法は以下のとおりである．箱型定盤（900×600×100 mm，肉厚 15 mm）上に 2 枚の鋼板（240× 200×12 mm）で挟み込んだ力センサ 3 個（Dytran 社製 1051V4；最大測定力: 2kN を 2 個，同 1053V2；最大測定力: 200N を 1 個）を固定し，球に加速度センサ（B&K 社製 4393）を装着して，シリコンゴム中空球（外半径 90 mm，内半径 55 mm，質量 2.5 kg；以下 S9055 球と記す），加硫ゴム中空球（直径 90 mm，内半径 55 mm，質量 2.8 kg；以下 R9055 球と記す），シリコンゴム中実球（半径 60 mm，質量 0.95 kg；以下 S6000 球と記す）およびシリコンゴム中実球（半径 40 mm，質量 0.27 kg；S4000 球と記す）の 4 種類の球について，落下距離を変えて（最大 1 m）自由落下させた時の力センサと加速度センサ出力をサンプリング周期 20 μ s で 1 秒間計測記録した．加速度センサの球への取り付けには両面テープを用いた．落下時に若干の回転が生じるため衝撃時の加速度センサの方向は一定にはなっていない．1 個の力センサ出力が小さいため，衝撃力持続時間は正確であるが，衝撃力は最大 1 kN までしか計測できなかった．図 1 に計測概要図を示す．以下，本報では簡単化のために，球構造を表すとき，材質はシリコンゴムを S，加硫ゴムを R で表し，寸法は外半径（xx mm）内半径（yy mm）の順で xxyy で表し（S(R)xxyy），外半径 xx が同一で内半径 yy が異なる球を一括して表するときに材質と外半径のみで表している（S(R)xx）．

2・2 計測結果

図 2 に S9055 球の 0.3 m 落下時の衝撃力と球加速度応答の計測例を示す．同図(a)は時刻歴応答，同図(b)，(b')は衝撃力のフーリエ変換，同図(c)は加速度について接触時間（ $0 < t < 0.0165$ s）と非接触時間（ $0.0165 < t < 1$ s）に分離した時刻歴応答のフーリエ変換である．加速度の非接触時フーリエ変換から球の固有振動数が推定できる．S9055 球の固有振動数は 98, 156, 218, 280 Hz である．固有振動数は定盤上に球を置いてインパルスハンマ加振による応答からも計測してほぼ一致することを確認した．固有振動数の境界条件による差異（自由境界と 1 点固定境界）は本研究の精度では誤差範囲として扱う．同図(b)に現れるノッチ周波数は 89.2, 144, 210, 280 Hz であり固有振動数に近い値である．

Fig. 1 Test apparatus

Fig. 2 Impact response of S9055 sphere by a drop distance of 0.3 m; Fig. 2(a) shows the time history of the impact and the acceleration at the top of sphere; Fig. 2(b) and (b') show the Fourier transform of the impact; Fig. 2(c) shows the Fourier transform of the sphere acceleration in the contact and non-contact period independently. It can be seen the discrepancy is very small between notch frequencies of the impact and the peaks of the frequency response in the non-contact period which shows the natural frequencies.

実験球の縦弾性係数は、球の縦弾性係数を変えて FEM 固有振動数解析を行い、計測された固有振動数とほぼ一致するときの値を用いた。FEM 固有振動数計算は COMSOL Multiphysics を用いて、ポアソン比を 0.49 とし、密度は測定した重量と公称体積から求め、外表面 3 点の弱いばね支持条件で求めた。球の固有振動には伸び縮み (Spheroidal) 振動とねじれ振動があるが、ねじれ振動は衝撃力方向には作用しないので無視した。4 次までの伸び縮み固有振動モード形を図 3 に示す。奇数固有モードは接触点と反接触点が逆位相で変位し、偶数モードは同位相で変位する。中実球の伸び縮み振動の固有振動数特性方程式は自由境界条件で導かれている (佐藤, 1978)。表 1 に実験で用いた球の固有振動数の実験値, FEM 計算値および理論値 (中実球のみ) を示す。実験値と FEM 計算値はほぼ一致している。理論値は若干高めであるが 4% 程度の誤差である。表 2 には球の材料定数を示す。

Fig. 3 Natural mode shapes of the hollow sphere fixed weakly at a surface point. The fixed point and the opposite surface point with respect to the vertical line have displacements of the opposite direction to each other in the odd modes, and have displacements of the same direction to each other in the even modes.

Table 1 Natural frequencies of spheres used in experiment; Exp: experimentally-measured value; FEM: Computed value by COMSOL; Theory: Theoretically calculated value. The 4th mode of R9055 and the 3rd and 4th modes of S4000 were not clearly observed in experiment.

Sphere type	S9055		R9055		S6000			S4000			(Hz)
Mode	Exp	FEM	Exp	FEM	Exp	FEM	Theory	Exp	FEM	Theory	
First mode	98	97	70	70	160	158	159	260	260	263	
Second mode	156	153	110	110	234	237	242	382	390	400	
Third mode	218	218	160	156	320	305	316	-	503	522	
Fourth mode	280	286	-	205	380	369	385	-	609	636	

Table 2 Material constants of spheres used in experiment.

Material constant	S90 sphere	R90 sphere	S60 sphere	S40 sphere
Young's modulus (Pa)	3.0×10^6	1.7×10^6	1.6×10^6	1.86×10^6
Density (kg/m^3)	1.06×10^3	1.19×10^3	1.06×10^3	1.06×10^3
Poisson ratio	0.49	0.49	0.49	0.49

S9055 球と R9055 球の落下高さを変えた衝撃持続時間と衝撃最大値の計測結果を図 4 に、S6000 球と S4000 球のそれらを図 5 に示す。

Hertz の衝突理論（Hertz 接触理論に基づく非線形ばねで支持された 1 自由度振動系応答）によれば（Timoshenko and Goodeir, 1970, 日本機械学会, 2001），半径 R_1 ，縦弾性係数 E_1 ，ポアソン比 ν_1 の球と半径 R_2 ，縦弾性係数 E_2 ，ポアソン比 ν_2 の球が衝突する時の圧縮力 F と圧縮変位 x の関係は

$$F = n_z x^{1.5}; \quad n_z = \frac{4}{3\pi(k_1 + k_2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \quad k_j = \frac{1 - \nu_j^2}{\pi E_j} \quad (j=1, 2) \quad (1)$$

となり，2 球の質量を m_1, m_2 ，衝突速度を V_i とすると，最大圧縮変位 $x_{\max}$ と衝撃持続時間 τ は

$$x_{\max} = \left(\frac{5}{4} \frac{V_i^2}{n_1 n_z} \right)^{0.4}; \quad n_1 = (m_1 + m_2)/(m_1 m_2) \quad (2)$$

$$\tau = \frac{4x_{\max}}{5V_i} B(0.4, 0.5); \quad B: \text{ベータ関数} \quad (3)$$

で表される。本研究では，球を 1，平板を 2 とすると $R_2 \rightarrow \infty$ ， $E_1 \ll E_2$ ， $m_1 \ll m_2$ と近似できるので，最大圧縮力 $F_{\max}$ と持続時間 τ は次式となる

$$F_{\max} = \left\{ \frac{4E_1\sqrt{R_1}}{3(1-\nu_1^2)} \right\}^{0.4} \left(\frac{5}{4}m_1 \right)^{0.6} V_i^{1.2} \quad (4)$$

$$\tau = 2.943 \left\{ \frac{15m_1(1-\nu_1^2)}{16E_1\sqrt{R_1}} \right\}^{0.4} V_i^{-0.2} \quad (5)$$

Fig. 4 Experimental results of impact of S9055 and R9055 sphere by drop distance of 0.1 to 1 m; Fig. 4(a) shows the impact duration and Fig. 4(b) the peak impact; Hertz* curve shows the theoretical impact duration and peak impact calculated by applying the Hertz theory to a virtual solid sphere of which radius is same as the outer radius of hollow sphere and mass is same as the follow sphere. The theoretical curves based on Hertz theory do not correspond to the experimental results at all.

Fig. 5 Experimental results of impact of S6000 and S4000 sphere by drop distance of 0.1 to 1 m; Fig. 5(a) shows the impact duration and Fig. 5(b) the peak impact; Hertz curve is the theoretical impact duration and peak impact by the Hertz theory. The experimental results correspond to the theoretical curves based on the Hertz theory.

図4には半径が中空球の外半径と同じで質量を中空球に一致させた中実球に対して形式的に式(4), (5)を適用した結果を記している. 中空球の場合に形式的に適用した Hertz 理論は初速度 (落下距離) に対する定性的な傾向は表現できるが定量的には差が大きいことがわかる. 質量を基準にした中実球モデルには無理がある. 一方, 図5の中実球の場合は Hertz 理論式(4), (5)が定量的に衝撃特性をほぼ表現できることが確認できる.

3. 有限要素法衝撃解析

落下球の衝突特性を解析するため FEM 衝撃解析ソフトウェア LS-DYNA を用いてシミュレーションを行った. 球材料には線形粘弾性材 VISCOELASTIC を用い, 表2に示す弾性係数と粘性係数をパラメータとして3種類の球の解析を行った. 接触モデルには AUTOMATIC_SURFACE_TO_SURFACE を用い, 静摩擦係数 F_s と動摩擦係

Fig. 6 Comparison between the experimental result (EXP) and the DYNA simulation (FEM) of the impact and the acceleration of a surface point of S9055 sphere by the drop distance of 0.3 m (Fig. 6(a), (a')), those of R9055 sphere by the drop distance of 0.5 m (Fig. 6(b), (b')) and those of S6000 sphere by the drop distance of 0.4 m (Fig. 6(c), (c')); Figs. (a), (b) and (c) show the impact, and (a'), (b') and (c') the acceleration. From these figures we can see that DYNA simulations correspond well to the experimental result except for the acceleration of S6000 sphere case.

数 F_d もパラメータとした。衝突板は実験で用いた定盤の天板寸法の周辺固定鋼板とした ($900 \times 600 \times 15$ mm)。

FEM 計算の妥当性を確認するため実験結果との比較を行った。図 6 に S9055 球の 0.3 m 落下時の衝撃力と球表面加速度 (同図(a), (a')), R9055 球の 0.5 m 落下時の衝撃力と加速度 (同図(b), (b')) および S6000 球の 0.4 m 落下時の衝撃力と加速度 (同図(c), (c')) を示す。衝撃力は LS-DYNA の *rcforc* オプションにより求めている。実験では落下時に若干の回転が生じて加速度計の衝突時の正確な位置が不明なため、FEM 加速度波形は、応答が実験値に近くなる節点を選び、節点変位座標から外表面法線方向成分に換算した。同図より DYNA 計算で実験結果を模擬できることが確認できる。中空球 S9055 と R9055 の場合は衝撃力波形のみならず加速度波形もよく一致している。中空球 S6000 では衝撃力波形は実験値に近いが加速度波形に差異が見える。

使用した粘弾性材料 VISCOELASTIC は体積弾性係数が一定、せん断弾性係数のみが粘性を持つモデルで、短時間 (瞬時) せん断係数 G_0 、長時間せん断係数 G_I と緩和時間定数 (Decay 定数) β をパラメータとして定義する構成である。体積弾性係数の計算には表 2 の値を用いた。粘性特性は、縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν として $G_0 = E/(2(1+\nu))$ とし、 G_I と β を変えて、衝撃力波形と球表面加速度が実験値に近くなる材料係数値を求めた。図 6 に示すように、衝撃力波形と加速度波形が実験値に完全に一致する係数値は求められていないが、本研究の目的である、中空球の衝撃力特性を準定量的に明らかにするには十分であると考えられる。図 6 の各モデルの粘性係数 (単位は mm, kN, ms) と摩擦係数は、S9055 球は $G_0=1 \times 10^{-3}$, $G_I=1 \times 10^{-4}$, $\beta=0.03$, $F_s=1 \times 10^{-3}$, $F_d=1 \times 10^{-3}$, R9055 球は $G_0=5.8 \times 10^{-4}$, $G_I=0$, $\beta=0.07$, $F_s=0.3$, $F_d=0.3$, S6000 球は $G_0=5.3 \times 10^{-4}$, $G_I=0$, $\beta=0.001$, $F_s=0.2$, $F_d=0.1$ である。これらの値は実験特性に近い応答を示す係数値をなかばアドホックに求めたもので、系統的に係数値を探索したものではない。S6000 球の跳ね返り後の加速度波形の誤差が大きい。本報では中空球に焦点を絞り、詳

Fig. 7 Impacts of S9055, R9055 and S6000 spheres by DYNA computation by drop distance of 0.1 to 1 m.; Fig. 7(a): Impact duration; Fig. 7(b): Peak value of impact. The computed duration well corresponds to the experimental result and the peak impact also corresponds to the experimental result except for the case of small drop distance.

細な検討は今後の課題としたい。

DYNA 計算の跳ね返り後の球自由振動の加速度から固有振動数の確認を行った。図 6 に示した各場合の 4 次までの固有振動数は以下のとおりである。() の値は表 1 の値である。S9055 球は、95, 150, 214, 286 Hz (97, 153, 218, 286 Hz), R9055 球は、70, 108, 153, 205 Hz (70, 110, 156, 205 Hz), S6000 球は、157, 240, 300, 368 Hz (158, 237, 305, 369 Hz) である。実験球の固有振動数がほぼ実現されている。

図 7 に、図 4 と図 5 に示した実験と同じ条件の DYNA 計算結果を示す。持続時間の計算値と実験値は十分に一致しており、衝撃力最大値も落下距離で差異は見られるが両者はほぼ一致していることが確認できる。

つぎに接触条件のパラメータの影響を調べた。図 8 に Decay 定数 β , 静摩擦係数 F_s , 動摩擦係数 F_d をパラメータにした S9055 球の計算例を示す (GI=0, 1m 落下)。同図(a)は $\beta=0.001$ の場合の F_s と F_d の影響を示し、同図(b)は $\beta=0.1$ の場合である。両図より、Decay 定数 β は衝撃力最大値に大きな影響を与えるが持続時間への影響は比較的少ないことが確認できる。また、AUTOMATIC_SURFACE_TO_SURFACE 接触モデルの鉛直落下球計算では F_s, F_d の衝撃力応答への影響が少ないことも確認できる。

図 6 と図 7 で、粘性特性の影響が少ない持続時間の DYNA 計算値と実験値がほぼ一致しており、表 2 の縦弾性係数値は、ポアソン比の仮定誤差を含むが、実験球値を近似していることが確認できる。DYNA 計算によって異なる構造の中空球の特性も準定量的に得られるものと考えられる。

中空球の衝撃力特性を明らかにするため肉厚を変えた場合を計算した。図 9 に S9000 球と S6000 球を中空化した球の肉厚比 (肉厚/外半径) に対する 1 m 落下特性を示す。中空球の材料パラメータは中実球と同じで、中空化 (薄肉化) が大きいほど落下距離が同じなので初期速度エネルギーは小さい。同図(a)を見ると中実球 S9000 に比べて S9020 ではほぼ差がなく、S9040 でも持続時間が拡大しているが衝撃力はハーバーサイン状を呈してい

Fig. 8 Influence of the decay constant β , static friction coefficient F_s , and dynamic friction coefficient F_d on the impact response of S9055 sphere by a drop distance of 1 m by DYNA computation. The decay constant has significant influence on the impact peak but a little on the duration. The friction coefficients, both static and dynamic ones, have practically no influence on the impact peak and duration.

Fig. 9 Impact of hollow spheres by a drop distance of 1 m; Fig. 9(a) shows S90 sphere and Fig. 9(b) S60 sphere. The responses of S9000 and S9020 are similar to each other. The responses of S9000, S9020 and S9040 are haversine-like curves, which may be caused by the Hertz contact effect dominantly. The responses of S9060 and S9070 are quite different from those of the S9000 and S9020, that is, the vibration of hollow part of sphere may be more dominant than the Hertz contact effect. The same tendency is also shown in the case of S60 spheres. The responses in the starting period of every sphere are overlapped in spite of the thickness of sphere.

る。しかし、S9060 球では衝撃持続時間の初期と終期で衝撃力の特性が変わり、S9070 球ではその傾向が顕著なっている。肉厚比が 0.5 付近で特性が変わる。同図(b)の S60 球の場合も同じ傾向が確認できて、外半径に関わらない特性である。図は省略するが R90 球の場合も定性的には同じである。ここで特徴的なことは、衝撃立ち上がり特性が中実球を含めて肉厚比に関わらず同一であることである。すなわち、中実球の立ち上がり特性が中空球でも発生し、その後肉厚に依存して中空部の特性が表れている。

図 9 の衝撃力特性は球外径と肉厚比に対して定性的に共通しているので、持続時間と衝撃力最大値を肉厚比に対して S90 球 ($GI=0, \beta=1 \times 10^{-4}$) , R90 球 ($GI=0, \beta=1 \times 10^{-4}$) , S60 球 ($GI=0, \beta=1 \times 10^{-2}$) について整理した。その結果を図 10 に示す。同図(a)は S90 球と R90 球について落下距離 1 m と 0.5 m の場合を、S60 球は 1m と

Fig. 10 Durations and impact peaks of DYNA computations on S90, R90, and S60 hollow spheres with respect to the ratio of thickness to outer radius; Fig. 10(a) shows the duration in non-normalized scale, and (a') and (b) are the duration and impact peak in normalized scale by those of solid sphere, respectively. The normalized characteristic curves are virtually identical irrespective of the kind of spheres.

Fig. 11 Impacts of S9055 sphere by drop distance of 0.1 to 1 m and the stress distribution; (a): Impact time history; (b): stress distribution at the time shown by ○ in Fig. 10(a). The pattern of stress distribution changes at the inflection point of the impact curve in the starting period. The inflection time of every impact curve is same, nearly 1.7 ms, which means the inflection point is caused by the wave propagation in the upper part than thickness of hollow sphere.

0.2m の場合の持続時間を示している。同図(a)から落下距離が小さく（初速度が小さく）なることによる持続時間の拡大量が読み取れる。各球とも肉厚比が小さいほど落下距離の減少に対する持続時間の拡大量が少なくなっている。同図(a')と(b)はそれぞれ持続時間と衝撃力最大値を中実球の値で基準化したものである。同図(a')から、持続時間を中実球の値で無次元化すると、肉厚比と持続時間の関係は球外半径と縦弾性係数に関わらずほぼ一定の関数特性をもつことが分かる。また、同図(b)から衝撃力最大値も中実球値で無次元化すると球外半径と縦弾性係数に関わらずほぼ一定の関数特性（肉厚比<0.7 で直線）にあることもわかる。すなわち、落下中空球の持続時間と衝撃力最大値は中実球特性を基準に表示すれば肉厚比に対してほぼ一定の関係式で表される。

衝撃力の応答を応力から理解するために中空球の応力伝播状態を確認した。図 11 に S9055 球の衝撃力（同図(a)）と球の変形および Von Mises 応力（同図(b)）を示す。応力分布図は同図(a)に○印で示した時点の分布である。衝撃力立ち上がり曲線の最初の変曲点後に応力が中空部に拡散し始めることが確認できる。また、立下りも特性が変わる時点で応力が肉厚部に集中することが確認できる。すなわち、図 9 に見られる肉厚比に関わらない立ち上がり期に共通な衝撃力特性は中空球肉厚部の応力分布に対応していることが確認できる。同図(a)には S9055 球の落下距離を変えた場合の衝撃力も示している。衝撃力波形変曲点までの初期立ち上がり時間が落下距離（初速度）に関わらず一定であることが確認できる（ $t_1=1.7$ ms）。このことは中空球初期立ち上がり時間が中空球肉厚部での応力伝播速度に起因する現象であることを示している。

Fig. 12 Impact of S6040 sphere (a) and S6000 sphere (b) by drop distance of 0.1 to 1 m. Every impact curve of S6040 has the inflexion point at nearly 1.5 ms, which means the response from 0 to 1.5 ms is the stress propagation in the solid part smaller than the thickness of the follow sphere. After the inflection point the stress may propagate to the whole parts of hollow sphere. The duration characteristic of a solid sphere regarding to a drop distance is caused by Hertz nonlinear contact term in Eq. (1), so the duration extension due to shorter drop distance of hollow sphere depends on the volume of solid part. As the solid volume of a hollow sphere is very small compared to a solid sphere, the duration extension due to shorter drop distance in Fig. 12(a) is smaller than that in Fig. 12(b). The wave propagating time in a hollow part is longer than that in a solid part, so, the duration of a hollow sphere is longer than that of a solid sphere to the same drop distance.

図 12 に、薄肉球 S6040 と中実球 S6000 の落下距離による衝撃力持続時間の比較を示している。同図から、中実球 S6000 でみられる Hertz ばね特性に起因する初速度（落下距離）の低下に対する持続時間の拡大が、薄肉球 S6040 ではほとんどないことがわかる。薄肉球では Hertz ばね特性で表される中実球特性が発現する時間が少ないため落下高さに対する持続時間の変化が少ない。また、図 12 の同じ落下距離に対する持続時間特性で、薄肉球の場合が中実球より長いのは中空部での波動伝播が中実部より遅いためであることがわかる。

4. 落下球衝撃力の持続時間と周波数特性

4.1 落下球衝撃力の基本的性質

落下衝撃力は初期変位ゼロで落下距離による初速度を初期条件とする物体の自由振動の接触ばね力がゼロになる時刻までの特性である。Hertz 接触は非線形であるため多自由度振動系の解析解で特性を評価することは容易ではなく、衝撃力を持続時間と比較的低い範囲の周波数特性で評価することが实际的である。そのため中空球落下衝撃力を評価する上で基本となる単純な衝撃波形（矩形波と半サイン波）の周波数特性の確認を行う。矩形波はよく使われているが、半サイン波はあまり見かけないので持続時間と周波数特性の関係を導いておく。

式(6)で表される持続時間 $T/(2k)$ (s)の半サイン関数とゼロからなる周期 T (s)の関数が周期 T で繰り返されているとしてフーリエ級数展開すると、式(7)となり、振幅 $c_n=(a_n^2+b_n^2)^{0.5}$ は $n=ik$ ($i=3,5,7,\dots$) でゼロとなる。

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2k}{T}\pi \cdot t\right); & 0 \leq t \leq \frac{T}{2k} \\ 0; & \frac{T}{2k} \leq t \leq T \end{cases} \quad (k: \text{integer}) \quad (6)$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{2(k+n)\pi} + \frac{1}{2(k-n)\pi} - \frac{1}{2(k+n)\pi} \cos\left(1+\frac{n}{k}\right)\pi - \frac{1}{2(k-n)\pi} \cos\left(1-\frac{n}{k}\right)\pi$$

$$b_n = -\frac{1}{2(k+n)\pi} \sin\left(1+\frac{n}{k}\right)\pi + \frac{1}{2(k-n)\pi} \sin\left(1-\frac{n}{k}\right)\pi, \quad a_0 = \frac{1}{k\pi}$$

すなわち、衝撃持続時間 τ (s) の半サイン関数は周波数 $N_i=i/(2\tau)$ ($i=3,5,\dots$) Hz でゼロとなる周波数特性をもつ。以後、この振幅ゼロとなる周波数を i 番目のノッチ周波数 N_i と記す。また、 N_1 を基本ノッチ周波数と称す。ちなみに、持続時間 τ (s)の矩形波ではノッチ周波数 $N_i=i/\tau$ (i =整数)である。

つぎに、Hertz ばね特性（式(1)）をもつ非線形ばねで支持された 1 次元多自由度振動系で（振動系は線形ばね結合）、持続時間に対するノッチ周波数と自由-自由境界の固有振動数の関係を調べる。図 3 で確認したように、中空球の固有振動モードが接触点に対して鉛直方向振動として現れるので、1 次元振動系で衝撃力特性を表現できると仮定して、落下球衝撃特性を分析する基礎となる特徴を定性的に確認する。図 13(a)に、計算に用いた 1 次元 4 質量 3 自由度の均質な振動系（剛体モードを除く）を示す。図中の Hertz ばね係数値は式(1)の n_z を示す。計算例は第 5 章での 1 次元モデルを考慮して便宜的に選んだものであるが、前章の DYNA 計算のモデルとしてかけ離れた形状ではない。自由-自由境界の固有振動数は 54.1, 100, 131 Hz である。図 13(b)は Hertz ばね力の時間軸応答、(c), (d)はそれぞれ Hertz ばね力の周波数応答振幅と位相である。落下距離は特性を鮮明にするために極端な場合を示している。

まず、1 m 落下時のノッチ周波数に着目すると（同図(c)）、54, 102, 146 Hz であり N_1, N_2 は自由境界固有振動数に一致する。10 m 落下時にはノッチ周波数は 1 m 落下時に比べて高周波数側にシフトしているだけであるが、0.001 m 落下時は低周波側にシフトするだけでなく、新たなノッチ周波数が生じていて固有振動数との対比が見えなくなる。上述の半サインノッチ特性を同図(b)の持続時間に適用してみると、1 m 落下時の持続時間 0.026 (s)に対して $N_1=58$ Hz, 10 m 落下時で 64 Hz, 0.001 m 落下時で 34 Hz である。持続時間半サインノッチ周波数が固有振動数より低い場合には、持続時間ノッチ周波数特性と固有振動特性が入り混じって、ノッチ特性が複雑に

Fig. 13 Impacts of a one-dimensional 4-mass and linear spring system supported by Hertz spring with a different initial velocity; (a): schematic diagram of the model, (b): impact time chart, (c): amplitude of frequency response of impact, (d): unwrap phase of frequency response of impact. The relation between notch frequencies and natural frequencies of free-free boundary condition brings the important information on analyzing the DYNA computation results.

変化する．ここで，自由-自由境界の固有振動数がノッチ特性を持つのは，落下物体の運動は全質量が同一の初速度のみをもつ剛体モードが初期条件であるため，自由境界固有振動モードが励起されにくいためと考えられる．接触振動中には支持ばね剛性によって固有振動数が変わるのでノッチ周波数は自由境界固有振動数に完全には一致しない（上述の 1 m 落下時の N_3 はずれている）．非均質な振動系の場合はノッチ周波数が自由境界固有振動数からかなりシフトし，また均質であっても最下端質量以外の質量変位によるノッチ周波数は自由境界固有振動数からずれていく．しかしながら，この衝撃力ノッチ周波数と自由境界固有振動数との関係は，本研究で扱っている落下球では，近似的ではあるが特性をモデル化する有用な手立てとなる．非折り返し位相特性が半サイン位相特性と異なるのは純粋な半サイン関数からのずれを表していると考えられる．（半サイン関数の非折り返し位相特性は後述図 19(c)の 1DOF 応答の位相と同じである）

4.2 DYNA 計算値および実験球の場合

S90 球，R90 球，S60 球の肉厚比を変えた DYNA 計算値について，持続時間，基本ノッチ周波数および自由境界条件 1 次固有振動数の関係を図 14 に示す．同図は，図 6 に示した実験値と比較したときの材料係数と落下距離を用いた場合である．持続時間の半サイン基本ノッチ周波数を DF，衝撃力の基本ノッチ周波数を NTF，自由境界 1 次固有振動数を NF と記している．持続時間は衝撃力波形を半サイン関数と見なして前節の関係式を用いて基本ノッチ周波数に変換している．それぞれの差異を明確にするために誤差比表示したもので，同図(a)は持続時間半サインノッチ周波数とノッチ周波数との関係，同図(b)は固有振動数とノッチ周波数の関係，同図(c)は持続時間半サインノッチ周波数と固有振動数の関係である．

同図(a)の持続時間と基本ノッチ周波数の関係は，応答の半サイン性を表していると考えられる．肉厚比 < 0.6 の薄肉球では 10% 以内の誤差で衝撃力が半サイン形状であることを示しており，誤差がゼロに近い肉厚比では持続時間に関して衝撃応答が半サイン関数で精度よく近似できると考えられる．同図(b)からは固有振動数に対するノッチ周波数のずれが読み取れる．ノッチ周波数が固有振動数に一致する肉厚比では固有振動数が乱されにくい応答を意味していて，剛体モードに近い状態で振動すると考えられる．同図(c)は 1 次固有振動数と基本ノッチ周波数の関係であるが，同図(a),(b)の特性を統合した特性である．同図(c)で逆半サイン周波数変換して時間軸で考えると，誤差が小さい領域では持続時間が固有振動数から推定できることになる．なお，R9070 は図 13

Fig. 14 Relations between duration, notch frequency and natural frequency of DYNA and experimental data; The time data and the frequency data are converted to each other by the half-sine notch frequency relation; DF is the frequency data converted from duration time data; NTF is the notch frequency; NF is the 1st natural frequency of hollow sphere; Fig. 14 (a) shows the half-sine characteristics of the response; Fig. 14(b) the notch frequency shift from the natural frequency; Fig. 14(c) the estimation accuracy of duration by natural frequency. Fig. 14(c) shows the duration can be estimated from the natural frequencies by about 10% error.

で示した $DF < NF$ の場合となり NTF 特性がずれるので同図(a), (b)では参考値としている。

図 14 は特定の落下距離の場合の例であるが、落下距離が変わっても肉厚比に対する定性的な傾向には変わらない。

5. 1次元多自由度振動系による衝撃力のモデル化

5.1 衝撃力特性の同定

前章で衝撃力の持続時間と応答周波数特性の関係を整理したが、本章で衝撃力特性を図 13(a)に示した 1 次元振動系モデルで表現することを検討する。落下中実球の衝撃応答が Hertz ばねと剛体質量からなる 1 自由度振動系応答で精度よくモデル化できるので、中空球に対して Hertz ばね係数を式(8)に示す調整パラメータ c_1 を導入した修正 Hertz ばねで支持する 1 次元多自由度振動系で構成することを考える。調整パラメータ c_1 は DYNA 計算の持続時間を基に決める必要があり解析的に求められるものではないが、中空部の作用を縦弾性係数の修正で表現する係数である。

$$F = \frac{4E\sqrt{\alpha(R_1 - R_2)}}{3(1-\nu^2)} x^{1.5} = c_1 \frac{4E\sqrt{R_1}}{3(1-\nu^2)} x^{1.5}; \quad c_1 = \sqrt{\alpha r}, \quad r = (R_1 - R_2)/R_1 \quad (8)$$

まず、中空球を質量が同一の剛体として扱う場合を示す (HS モデルと称す)。図 15 に 1 m 落下 S90 球の計算例を示す。同図(a), (b), (c)はそれぞれ S9000, S9040, S9070 の応答で、図中凡例の数値は DYNA 計算値に持続時間が一致する c_1 値である。本節では $GI=0$, $\beta=1 \times 10^{-4}$ の DYNA 計算値を用いている。S9000 は中実球であり Hertz ばねで DYNA 計算と HS モデル計算が一致するのは自明である ($c_1=1.4$)。中実球では $c_1=1$ であるべきであるが、DYNA 計算値と Hertz 理論値に差があるため修正値が生じている。一方、中空球では、衝撃力波形が一

Fig. 15 Impact of HS model by a drop distance of 1 m; (a), (a'): S9000 sphere, $c_1=1.41$; (b), (b'): S9040 sphere, $c_1=0.98$; (c), (c'): S9070 sphere, $c_1=0.16$; (a), (b), (c): time chart; (a'), (b'), (c'): frequency response. The c_1 value may represent the compliance of the modified Hertz spring with respect to the duration of a hollow sphere. The difference of amplitudes and frequency characteristics between HS model and DYNA computation becomes larger as the thickness ratio becomes smaller.

致せず，衝撃力最大値が誤差をもち，立ち上がりが遅れている．DYNA 計算に現れる高周波成分を表現できないことは明らかであるが，中空球での HS モデルの立ち上がりの遅れはモデルとしての本質的な点である．第 3 章で見たように，中空球の応力伝播の初期立ち上がりは中実球特性に類似しているので，修正 Hertz バネも中実球特性を有する必要がある．つまり， $c_1 \sim 1.4$ に近くなければならない．ところが S9070 球で $c_1=0.16$ であり力学モデルとして不合理であることがわかる．薄肉球では Hertz バネで支持する 1 自由度振動系で持続時間を DYNA 計算値に合わせると非常に柔らかいばねになる．

図 15 は S90 球の場合であるが，その特性は球種にほとんど依存しない．図 16 に肉厚比に対する S90 球，R90 球，S60 球の c_1 値を示す．各球の特性は中実球を除くとほぼ同一曲線上にあり，縦弾性係数と球外径に依存しない補正係数であることが分かる． c_1 値は支持ばねの柔らかさを修正しているが，定性的には持続時間の逆数を表していて，スケールを調整すると図 10(a')に示した持続時間特性と逆数の関係を読み取れる．

HS モデルでは薄肉球で誤差が大きくなるため，DYNA 特性に近づけるためには多自由度振動系モデルが必要である．前章で自由境界固有振動数が落下球衝撃応答特性に大きな影響をもつことを確認したので，Hertz バネで支持した，中空球固有振動数をもつ 4 質量 3 自由度振動系モデルを検討した (HF4 モデルと記す)．4 質量の合計値は中空質量に一致させる．ここで，質量分布が重要となるが，与えられた固有振動数を満たす質量分布は無数にあるため，DYNA 応答に近い質量分布は試行錯誤的に探索せざるを得ない．質量分布を仮定して結合ばね定数を振動数方程式から求め，仮定した質量分布とばね定数をもつ振動系で DYNA

Fig. 16 The c_1 value of HS model that satisfies the duration of DYNA computation to the thickness ratio of hollow spheres. The relation between c_1 and thickness ratio may be expressed by a common characteristic curve irrespective of the kind of sphere. Roughly the inverse of c_1 represents the duration characteristics shown in Fig. 10(a').

Fig. 17 Responses of HF4 model of S9060 sphere (a, a', a'') and S9040 sphere (b, b', b''); DYNA: DYNA computation, HF#.#: HF4 model with c_1 =#.#; HF0.68 : (m_1, m_2, m_3, m_4) 0.46, 1.1, 0.46, 0.23 (kg); HF0.89 : 0.46, 0.91, 0.57, 0.34; HF1.71 : 0.22, 1.1, 0.45, 0.45; HF2.0 : 0.59, 1.2, 0.59, 0.59; HF2.2 : 0.59, 0.59, 1.2, 0.59; Natural frequencies of S9060 are 89, 139, 198 Hz and those of S9040 are 116, 192, 264 Hz. HF2.0 is the case of which discrepancy between DYNA and HF4 is very small. The impact of starting period may depend on whether the c_1 value is less than 1.4 or not, and the total response depends on the mass distribution, too.

持続時間を満たす c_1 値を求めて DYNA 計算に近い場合を探索した。近似度の高い質量分布を系統的に求めるのは容易ではないため、本報では代表的な質量分布で検討を行った。

図 17 に応答計算例を示す。同図(a) [(a'), (a'')]は S9060 球（固有振動数は 89, 139, 198 Hz），同図(b) [(b'), (b'')]は S9040 球（固有振動数は 116, 192, 264 Hz）の場合である。凡例の DYNA は DYNA 計算，HF は HF4 モデル計算を示し，数字は修正 Hertz ばね係数 c_1 値である。S9060 球について見ると， $c_1=0.68$ （質量は 0.46, 1.1, 0.46, 0.23 kg，以後値のみ記す）では立ち上がりが緩やかなため，持続時間が決まっているので最大振幅値が大きくなり，衝撃力として急峻な効果を生み出してノッチ周波数が高周波側に移動している。 $c_1=1.71$ （0.22, 1.1, 0.45, 0.45）では立ち上がりは DYNA 計算に沿っているが支持ばねが強すぎるため振動特性がずれて $N_2 \sim N_3$ 周波数域で振幅が過大になっている。 $c_1=0.89$ （0.46, 0.91, 0.57, 0.34）では N_1, N_2 周波数が DYNA に一致し振幅特性も DYNA からそれほどずれてはいない。ほぼ最適な質量分布に近い場合である。つぎに S9040 球について見る。いずれの場合も $c_1 > 1.4$ の例であるが， N_1 周波数が DYNA より低周波側にある。立ち上がりが DYNA より急峻であれば最大振幅が低下する傾向になり衝撃力作用が低減して N_1 が低周波側に移動すると考えられる。この例ではノッチ周波数のずれが振幅特性にあまり影響を及ぼさず，振幅は DYNA に近い。 $c_1=2.0$ （0.59, 1.2, 0.59, 0.59）では位相特性は一致していないが $N_1 \sim N_2$ の振幅特性が DYNA に近く，近似度のよい質量分布である。 $c_1=2.2$ （0.59, 0.59, 1.2, 0.59）では $N_1 \sim N_2$ の周波数域の振幅が大きい位相特性は DYNA に近い。

つぎに落下距離による持続時間拡大の近似度を確認する。図 18 に R9060 球の計算例を示す。 $c_1=1.33$ （0.38, 0.51, 1.02, 0.64）の場合で，固有振動数は 89, 139, 198 Hz である。それぞれ 1m と 0.2m 落下の衝撃力の応答を示している。 c_1 値は 1m 落下時の持続時間で求めた値である。立ち上がり時間軸応答が DYNA 計算値に近く， $c_1 \sim 1.4$ であり Hertz ばね特性を実現して，そのため Hertz ばね特性である落下高さ特性についても 0.2 m 落下応答が模擬できていると考えられる。

球種に関わらない適切な質量分布を見出すのは容易ではないが，これらの計算例から落下中空球衝撃力が中空球の Hertz ばね特性と自由境界固有振動数特性の組み合わせで表現できて，Hertz ばね特性と振動特性が適合した場合に DYNA 解に近づくことが確認された。図 17，図 18 の全周波数域で HF モデル振幅が DYNA 振幅より

Fig. 18 Impacts of HF4 model computation of R9060 sphere; DY(HF)10(02): DYNA(HF4) computation by a drop distance of 1.0 (0.2) m; $c_1=1.33$, $m_{1,2,3,4}=0.38, 0.51, 1.02, 0.64$ kg; Natural frequencies of HF4 model are 89, 139, 198 Hz. This case has a good approximation accuracy of the starting period, which may bring the accurate Hertz spring characteristics of hollow sphere, and simulate the 0.2 m-drop duration very well.

Fig. 19 Impact of 1DOF model of S9070 sphere dropped from a 1 m-high position. The 1DOF response of this case closely corresponds to DYNA response, which will be very useful for an easy calculation of a hollow sphere impact. The 1DOF model ignores the Hertz spring characteristics, so the starting period does not so resemble DYNA computation.

大きくなるのは HF モデルが DYNA モデルより低自由度で同じ運動エネルギーを負担しているからと考えられる。

5.2 落下球衝撃力の簡易計算

前節では中空球落下衝撃力を HF モデルで模擬できることを示したが、モデルの正確な同定には持続時間と衝撃力波形が必要であり、また適切な質量分布を求めるのが容易ではないためモデルの有用性は限定的である。そこで簡易な応答計算である線形 1 自由度モデルを検討した (1DOF と記す)。中空球と同一質量の剛体を線形ばねで支持し、持続時間を一致させた応答である。図 19 に S9070 球 1m 落下の例を示す。同図は 1DOF モデルが振幅特性を精度よく近似している場合である。しかしながら、近似誤差は球種と落下距離によって変わり、さらに DYNA 計算で用いる材料モデル係数値によっても変わる。第 3 章で確認したように、材料係数値は持続時間への影響は少ないが衝撃最大値への影響は大きい。それゆえ 1DOF モデルの近似誤差を一般的に評価するには多くの計算が必要となり実際的ではない。本報では、一例として、1m 落下時の誤差を図 20 に示しておく。同図の計算は $GI=0$ で Decay 定数は S90 球と R90 球が $\beta=1 \times 10^{-4}$ 、S60 球が $\beta=1 \times 10^{-2}$ の場合で、近似誤差は 10% 程度である。近似誤差値そのものに一般性はないが、肉厚比に対する傾向は材料係数値が異なる場合も類似である。また近似誤差特性は図 14(a)の半サイン性の近似特性と類似している。

実用的な簡易計算には図 10(a'),(b)の中実球特性を基準にした衝撃力特性を近似式表示して実験式として用いることが簡便であると考えられる。同図は無次元化した関係であり DYNA 計算の絶対値の影響を受けないと考えられる。ただし、中実球の特性は正確に知る必要がある。

6. 結 言

本論文では、建築物の床衝撃音測定の影響源として用いられている中空ゴム球をモデルとして、中空ゴム球の平板への落下高さ 1m 以下の落下衝撃力特性を実験および有限要素法解析により明らかにした。中空球

Fig. 20 Errors of impact peak of 1DOF model response to DYNA response. The error tendency to the thickness ratio may be common to all spheres. However, the absolute value of error may depend on the type of spheres and DYNA material model used.

は外半径 90mm のシリコンゴム球と加硫ゴム球，外半径 60mm のシリコンゴム球を対象とした．肉厚比（肉厚／外半径）の異なる中空球に対して，衝撃力持続時間特性を，衝撃力の周波数応答に現れるノッチ周波数と中空球固有振動数の関係から分析した．さらに，中空球の衝撃力特性を表現できる 1 次元モデルを検討し，衝撃力簡易計算モデルの検討を行った．主な結果をまとめると以下のとおりである．

- (1) 中実球の実験結果は Hertz 衝突理論でほぼ表現できる．
- (2) 中空球の実験結果に質量を一致させた Hertz 衝突理論式を適用すると，定性的な傾向は一致するが，定量的には誤差が大きい．
- (3) 有限要素法衝撃解析ソフトウェア LS-DYNA で線形粘弾性材の粘性係数値を調整すれば実験結果を準定量的に模擬できる．接触面の静摩擦係数と動摩擦係数の衝撃力特性への影響は少ない．
- (4) 中空球の持続時間と衝撃力最大値は中実球の特性で基準化すると，球種に関わらず肉厚比に対してほぼ一定の曲線で表せる．肉厚比が小さくなるにしたがい，持続時間は放物線的に増加し，衝撃力最大値は直線的に減少する．
- (5) 中空球の衝撃力は，衝撃初期の中空球肉厚部での Hertz 接触に類似の特性と中空部に応力伝播される期間からなる．中空球の落下距離に対する持続時間の特性は Hertz バネ特性をもつ肉厚の厚さに起因しているため，薄肉球ほど Hertz バネ作用が少なく，落下距離の減少に対する持続時間の拡大量が少なくなる．
- (6) 中空球の衝撃力特性を，半サイン関数衝撃力の周波数応答に現れるノッチ周波数と持続時間の関係を利用して整理すると，持続時間，ノッチ周波数および球の自由境界固有振動数の関係が明瞭になる．
- (7) 中空球衝撃力は修正 Hertz バネと中空球自由境界固有振動数の組み合わせでモデル化できる．

文 献

- Big-Alabo, A., Equivalent impact system approach for elastoplastic impact analysis of dissimilar spheres, International Journal of Impact Engineering, Vol. 113 (2018), pp. 168-179.
- Boettcher, R., Kunik, M., Eichmann, S., Russell, A. and Mueller, P., Revisiting energy dissipation due to elastic waves at impact of spheres on large thick plates, International Journal of Impact Engineering, Vol. 104 (2017), pp. 45-54.
- Hunt, K. H. and Crossley, F. R. E., Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, No. 2 (1975), pp. 440-445.
- Hunter, S. C., Energy absorbed by elastic waves during impact, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 5, No. 3 (1957), pp. 162-171.
- 井上勝夫，新重量床衝撃源の特性と測定法，騒音制御，Vol. 25, No. 4 (2001), pp. 189-193.
- 井上勝夫，床衝撃音測定用標準重量衝撃源の開発，日本音響学会誌，Vol. 59, No. 5 (2003), p. 267-273.

- Inoue, K., Yasuoka, M. and Tachibana, H., New heavy impact source for the measurement of floor impact sound insulation of buildings, *Proceeding of the 29th International Congress on Noise Control Engineering* (2000), pp. 1493-1496.
- 日本機械学会, 機械工学便覧基礎編 A3 力学・機械力学 (2001), pp. 36-38.
- Minamoto, H. and Kawamura, S., Effects of mathematical strain rate sensitivity in low speed impact between two identical spheres, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 36 (2009), pp. 680-686.
- Minamoto, H. and Kawamura, S., Moderately high speed impact of two identical spheres, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 38 (2011), pp. 123-129.
- 西村源六郎, 高橋浩一, 鋼球の衝突音の研究, 精密機械, Vol. 28, No. 4 (1962), pp. 220-230.
- 佐藤泰夫, 弾性波動論 (1978), 岩波書店, p. 340.
- Tanaka, Y., Impact of gel balls beyond the Hertzian regime, *The European Physical Journal Series E*, Vol. 18 (2005), pp. 95-103.
- Tatara, Y., Behavior of soft spheres during impact by high-speed photography, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 105, No. 1 (1983), pp. 67-73.
- Tatara, Y., Extensive theory of force-approach relations of elastic spheres in compression and in Impact, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, No. 2 (1989), pp. 163-168.
- 多々良陽一, 森脇信康, 等価 2 物体の衝撃の研究 (黄銅, 鉛, ガラス, 磁器, めのうのはねかえり係数と材料特性), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 47, No. 420 (1981), pp. 1017-1027.
- Timoshenko, S. and Goodier, N., *Theory of elasticity* (1970), pp. 409-421, McGraw-Hill.
- Wen, J., Liu, C., Yao, H. and Wu, B., A nonlinear dynamic model and parameters identification method for predicting the shock pulse of rubber waveform generator, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 120 (2018), pp. 1-15.
- Zhang, X. and Vu-Quac, L., Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 27 (2002), pp. 317-341.

References

- Big-Alabo, A., Equivalent impact system approach for elastoplastic impact analysis of dissimilar spheres, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 113 (2018), pp. 168-179.
- Boettcher, R., Kunik, M., Eichmann, S., Russell, A. and Mueller, P., Revisiting energy dissipation due to elastic waves at impact of spheres on large thick plates, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 104 (2017), pp. 45-54.
- Hunt, K. H. and Crossley, F. R. E., Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 2 (1975), pp. 440-445.
- Hunter, S. C., Energy absorbed by elastic waves during impact, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 5, No. 3 (1957), pp. 162-171.
- Inoue, K., Development of new standard heavy impact source for floor impact sound, *Journal of the Institute of Noise Control Engineering of Japan*, Vol. 25, No. 4 (2001), pp. 189-193 (in Japanese).
- Inoue, K., Development of standard heavy impact source for measurement of floor impact sound, *The Journal of the Acoustical Society of Japan*, Vol. 59 No. 5 (2003), pp. 267-273 (in Japanese).
- Inoue, K., Yasuoka, M. and Tachibana, H., New heavy impact source for the measurement of floor impact sound insulation of buildings, *Proceeding of the 29th International Congress on Noise Control Engineering* (2000), pp. 1493-1496.
- JSME, *JSME Mechanical Engineer's Handbook A. Fundamentals A3: Mechanics and Mechanical Vibrations* (2001), pp. 36-38 (in Japanese).
- Minamoto, H. and Kawamura, S., Effects of mathematical strain rate sensitivity in low speed impact between two identical spheres, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 36 (2009), pp. 680-686.
- Minamoto, H. and Kawamura, S., Moderately high speed impact of two identical spheres, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 38 (2011), pp. 123-129.

- Nishimura, G. and Takahashi, K., Impact sound of steel ball collision, *Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, Vol. 28, No. 4 (1962), pp. 220-230 (in Japanese).
- Sato, Y., *Dansei hadou ron* (1978), Iwanami shoten, p. 340 (in Japanese).
- Tanaka, Y., Impact of gel balls beyond the Hertzian regime, *The European Physical Journal Series E*, Vol. 18 (2005), pp. 95-103.
- Tatara, Y., Behavior of soft spheres during impact by high-speed photography, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 105, No. 1 (1983), pp. 67-73.
- Tatara, Y., Extensive theory of force-approach relations of elastic spheres in compression and in impact, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 111, No. 2 (1989), pp. 163-168.
- Tatara, Y. and Moriwaki, N., Study on the impact of two identical bodies (the coefficient of restitution and material characteristics of brass, lead, glass, porcelain and agate), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 47, No. 420 (1981), pp. 1017-1027 (in Japanese).
- Timoshenko, S. and Goodier, N., *Theory of elasticity* (1970), pp. 409-421, McGraw-Hill.
- Wen, J., Liu, C., Yao, H. and Wu, B., A nonlinear dynamic model and parameters identification method for predicting the shock pulse of rubber waveform generator, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 120 (2018), pp. 1-15.
- Zhang, X. and Vu-Quac, L., Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 27 (2002), pp. 317-341.