Advance Publication by J-STAGE

日本機械学会論文集

Transactions of the JSME (in Japanese)

DOI:10.1299/transjsme.21-00200

Received date : 23 June, 2021

Accepted date : 29 September, 2021

J-STAGE Advance Publication date : 8 October, 2021

多孔質構造体の固有振動設計を目的とするミクロ孔構造の形状最適化

藤田 隼平^{*1}, 下田 昌利^{*2}

Micropore shape optimization for natural vibration design of porous structures

Junpei FUJITA^{*1} and Masatoshi SHIMODA^{*2}

^{*1}Department of Advanced Science and Technology, Graduate School of Engineering, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tenpaku-ku, Nagoya-shi, Aichi 468-8511, Japan

^{*2}Department of Advanced Science and Technology, Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tenpaku-ku, Nagoya-shi, Aichi 468-8511, Japan

Abstract

In this paper, we present a shape optimization method for periodic microstructures to maximize a specified vibration eigenvalue of a porous macrostructure. The homogenized elastic moduli calculated by the homogenization method are applied to the macrostructure to connect the microstructures with the macro structure. The KS function is introduced to solve the repeated eigenvalue problem hidden in vibration eigenvalue optimization. The shape optimization problem subject to the volume constraint considering the microstructures is formulated as a distributed-parameter optimization problem, and the shape gradient function is derived by the Lagrange multiplier method and the adjoint variable method. The shape gradient function is applied as a distributed force to update the design boundaries of the unit cells of the microstructures by the H^1 gradient method. The smooth boundary shapes obtained by the H^1 gradient method are suitable for manufacturing with a 3D printer. In the numerical examples, the eigenvalues and the optimum shapes were compared changing the number of the domains of the microstructures in the macrostructure. As a result, the effectiveness of shape optimization method for microstructures aimed at maximizing the vibration eigenvalue of a macrostructure was confirmed.

Keywords : Multi-scale optimization, Homogenization method, Shape optimization, H^1 gradient method, Periodic microstructure, Eigenvalue, Natural frequency

1. 緒 言

近年、3D プリンターをはじめとする製造技術の発展に伴い、ミクロ三次元トラス材料やセルラー材料のような様々な多孔質材料に注目が集まっている。多孔質材料は孔の大きさや配置を適切に設計することにより軽量かつ高剛性、もしくは高振動特性の構造を実現できるため、様々な用途に応用できる可能性を秘めている。本研究では、孔を含む複数のミクロスケール材料から成る多孔質構造のミクロ構造の形状最適化に注目した。多孔質材料からなる構造体ではマクロ構造に加えミクロ構造の設計が力学的挙動に大きく影響しており、ミクロ構造設計の次第で重量と剛性といった複数機能の同時向上が可能となっている。そのため、マクロ構造の力学特性を向上させるような最適ミクロ構造の設計が求められている。近年ではCAEを用いてマクロ構造とミクロ構造を同時に最適化するマルチスケール構造設計が注目され、その研究が盛んに行われている。本研究では力学特性の中で構造設計上重要な固有振動問題に着目した。

マルチスケール構造設計において用いられる手法の基礎として均質化法がある(例えば, Hornung, 1997, Yvonnet, 2019)。均質化法ではマクロ構造とそこに周期的に分布するミクロ構造を定義し、ミクロ構造の形状と材料定数から均質化弾性係数を算出し、これをマクロ構造の弾性係数として用いる。このようにマクロ構造とミクロ構造は数学的整合性を保ちながら結び付けられており、その厳密さから設計における様々なマルチスケール問題に応用

No.21-00200 [DOI: 10.1299/transjsme.21-00200]

^{*1} 学生員, 豊田工業大学大学院 工学研究科 (〒468-8511 愛知県名古屋市天白区久方 2-12-1)

^{*2} 正員, 豊田工業大学

E-mail of corresponding author: shimoda@toyota-ti.ac.jp

されている。例えば Duvaut と Nuc は均質化法を一方方向性繊維強化複合材料に適用し、有限要素法による解析を行った (Duvaut and Nuc, 1983)。また、均質化法を用いた最適化手法では多孔質材料を扱う研究が多く、Bendsøe と Kikuchi は均質化法を用いて等方性材料に周期的に極小の孔を分布させ、孔の大きさを制御することでトポロジーを最適化する計算を行い (Bendsøe and Kikuchi, 1988)、Suzuki と Kikuchi はその理論を複数のモデルに適用させた (Suzuki and Kikuchi, 1991)。弾性問題以外にも、Francfort は均質化法を用いて周期的に変化する機械的特性と熱的特性を有する場合の線形熱弾性方程式を導出し (Francfort, 1983)、Iga らは熱対流と内部発熱の設計依存性をトポロジー最適化によって確かめた (Iga et al., 2008)。寺田らは、大変形/微小ひずみを仮定して均質化法を非線形材料からなる複合材料に適用し、全体構造物の非線形挙動を追うための定式化を行い (寺田他, 1995)、繊維強化材の材料間界面の損傷を塑性によって評価した (寺田他, 1996)。Takano らは大変形時に局所領域のマイクロ構造が一様に変形し微視的な周期性が残るという仮定の下、大変形下での均質化法による定式化を行った (Takano et al., 2000)。また、所定の材料特性を得るために、周期マイクロ構造を設計する逆均質化についての研究も行われている。Sigmund は重量最小化の目的の下で所定の材料特性を持つ、トラスから成る 2 次元と 3 次元のマイクロ構造の設計手法を提案した (Sigmund, 1995)。さらに Sigmund と Torquato は、二つの異なる材料とボイド領域の三相から成る複合材の、トポロジー最適化による特定の熱膨張係数を有する構造設計を行った (Sigmund and Torquato, 1996)。Wang らは負のポアソン比を持つメタマテリアルの計算設計のためのトポロジー形状最適化法を開発した (Wang et al., 2014)。

さらに近年では、マクロ構造の力学特性を向上させるために、マイクロ構造と同時にマクロ構造のトポロジーや形状を求めるマルチスケール最適設計の研究が多く行われている。Rodrigues らはマイクロ構造と材料配置の同時トポロジー最適化を行い、コンプライアンス最小化問題を定式化し数値計算を実行した (Rodrigues et al., 2002)。また、Yan らはマクロ構造とマイクロ構造の同時トポロジー最適化を双方向進化構造最適化(BESO 法)を用いて行い、2 次元や 3 次元のモデルに適用させた (Yan et al., 2014)。さらに、Sivapuram らはマクロ構造の領域を分割して複数種類のマイクロ構造から成るマクロ構造をモデルとし、マクロ構造とマイクロ構造の同時トポロジー最適化を行った (Sivapuram et al., 2016)。Gao らは 3 次元エネルギーベース均質化法(EBHM)とパラメトリックレベルセット法を用いて、3 次元マイクロ構造材料の形状最適化を行った (Gao et al., 2018)。

また、静的問題のみでなく動的問題を扱った研究も行われている。マイクロ構造のみの最適化では Yang らや Du らは振動する構造の音響放射パワーを最小化するためのマイクロ構造トポロジー最適化を行っている (Yang et al., 2012, Du et al., 2015)。そこから発展させたマルチスケール最適化では、Niu らが構造基本周波数の最大化を目的としたマクロ構造とマイクロ構造のトポロジー最適化を行い (Niu et al., 2008)、Zuo らや Liu らによって、固有振動数最大化を目的とした 2 次元モデル及び 3 次元モデルでのトポロジー最適化が行われた (Zuo et al., 2013, Liu et al., 2016)。さらに Liang らはマルチマテリアルとマルチスケールの両モデルを確立し、同時振動音響トポロジー最適化を行い (Liang et al., 2019)、Zhang らはマクロ構造と複数のマイクロ構造及びその分布を同時に最適化するために形状補間を行い複数のマイクロ構造サンプルを生成し、固有振動数を最大化させた (Zhang et al., 2020)。

このように動的問題は、設計問題の中で構造物の安定性や騒音低減の要求、望ましくない振動の抑制のために重要な特性を担っている。特に固有振動問題では、構造物が周囲環境に対して望ましくない固有振動モードを有する場合、励起周波数にそのモードの固有振動数が一致しないように設計することは共振現象を避けるための普遍的対策となっている。しかし従来の固有値最大化を目的としたマルチスケール問題の多くはトポロジー最適化を用いており、その多くは形状最適化と比較して設計境界が不明瞭である。そこで本研究ではマイクロ構造に対して形状最適化を用い、ヘテロ材料を対象とすることを最終目的としてその基礎となる多孔質材料について振動固有値最大化のための解法を提示することを目的とする。漸近展開法による均質化法を用いて多孔質材料からなる二次元構造体の形状最適化を行い、面積制約の下でマクロ構造の任意の次数の固有振動数を最大化する周期的マイクロ構造の形状を求める。形状最適化では、従来のトポロジー最適化に比べ自由度は少ないが、明瞭で陽的な境界設計が可能であることが特徴であり、3D プリンティングヘダイレクトに適用可能であると考えられる。

形状最適化手法には H^1 勾配法を用いる。 H^1 勾配法 (力法) は畔上によって提案された手法であり、設計境界に分布する形状勾配関数に比例した荷重を疑似弾性問題の外力として作用させることで、滑らかな境界形状を保ちながら目的関数を減少させることを可能にしている (畔上, 1994)。また、本手法はノンパラメトリック手法となっているため、パラメトリック手法の持つパラメータ化の難しさや煩雑さ、及び得られる解のパラメータ依存

性の問題を解決でき、様々な研究に用いられている。下田らによって汎用 FEM コードを用いた領域最適化問題への数値解析法が提案されると（下田他, 1994）、畔上、呉は、線形弾性体の平均コンプライアンス最小化を目的とした最適形状変動場を H^1 勾配法により求め（畔上、呉, 1994）、呉、畔上によって固有振動問題を対象とした単一振動固有値を最大化させるための領域形状最適化が行われた（呉、畔上, 1995）。さらに、多目的問題（Shimoda et al., 1996）、変位・応力規定問題（Shimoda et al., 1998）、均質化法と統合した形状・トポロジー最適化問題（井原他, 1996）への応用的な解法も示された。また、マルチスケール形状最適化に H^1 勾配法を用いた先行研究もあり、加藤らはマクロ構造に対して材料特性を設計変数として解き、逆均質化法と形状最適化を組み合わせることでマイクロ構造の形状設計を行う手法を提案した（加藤他, 2019）。Fujioka らは均質化法を用いて、マクロ構造のコンプライアンス最大化を目的としたマイクロ構造の形状最適化を行った（Fujioka et al., 2021）。いずれの問題も分布系の最適化問題として定式し、ラグランジュ乗数法、随伴変数法、及び物質導関数法を用いて、設計境界に分布する感度関数（形状勾配関数とよばれる）を理論的に導出している。得られた形状勾配関数は直接形状変動に利用せず、ノイマン条件に置き換え、すなわち法線方向の分布荷重として疑似線形弾性体の設計境界に適用される。

本研究ではマクロ構造を複数の領域に分割し、領域ごとに異なるマイクロ構造を周期的に分布させ、周期マイクロ構造から求まる均質化弾性係数、及び均質化密度をマクロ構造に適用し固有振動解析を行う。先行研究と同様のプロセスにより得られた感度を H^1 勾配法に適用し、固有振動数最大化のためのマイクロ構造最適形状を求める。

本章に続く 2 章では均質化法の概要、形状変動場の定義、マルチスケール最適化問題の定式化を示す。3 章では形状勾配関数の導出、 H^1 勾配法、最適化システムの流れと提案最適化手法を示す。4 章では提案手法の有効性を確認するための数値計算例の結果と考察を示す。そこではマイクロ領域の総数を変えながら、それが最適形状や固有振動数の増加に与える影響も比較した。5 章にて本研究を総括する。

2. マルチスケール最適化問題の定式化

2・1 均質化法

本節ではマイクロ構造の形状最適化の定式化に先立ち、そこで用いる均質化法について説明する。なお、本論文でのテンソル表記は Einstein の総和規約と偏微分表記 $\partial(\)/\partial x_i = (\)_{,i}$ を用いることとする。数値解析的な均質化法（Bensoussan et al., 1978）はマイクロ構造の材料特性がマクロ構造に与える影響を定量的に議論するための手法であり、その本質はミクロスケールとマクロスケールを数学的に橋渡しすることにある。本研究では構造全体で均質化された弾性テンソルを計算するために用いる。

Fig. 1 A multi-scale structure. (a) a macrostructure, (b) a periodic microstructure, and (c) a unit cell.

図 1 に示すような、周期マイクロ構造を有する構造体におけるマイクロ領域 Ω^ε を解析対象としたとき、微小変位の弱形式の平衡方程式は次式で与えられる(Sigmund, 1994)。ここで、上付きの ε はマクロ座標系とマイクロ座標系との比を表す ($\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$)。またマクロ領域 Ω のスケールを $\mathbf{x}$ 、マイクロ領域 Ω^ε のスケールを $\mathbf{y}$ とし、ユニットセルの大きさ（2 次元問題では面積）を $|Y|$ とする。

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \bar{u}_i^\varepsilon d\Omega + \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i^\varepsilon \bar{u}_i^\varepsilon d\Gamma, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^\varepsilon \in H_0^1. \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{E}_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x})$ はマイクロ構造の弾性テンソルを、 $\mathbf{f}^\varepsilon$ は物体力、 $\mathbf{t}^\varepsilon$ は部分境界 $\partial\Omega^\varepsilon$ に与えられた表面力、 $\mathbf{u}^\varepsilon$ 、 $\bar{\mathbf{u}}^\varepsilon$ はそれぞれ変位と仮想変位を表す。 H_0^1 は 1 階までの微分の 2 乗が有界積分可能なヒルベルト空間を表す。式(1)に漸近展開法を用いると均質化弾性テンソルは式(2)のように表される(Sigmund, 1994)。式(2)は大きさ 1 の初期ひずみをマイクロ構造に与え、そこで得られる応力の体積平均によって均質化弾性テンソルが計算されることを示しており、標準的な汎用 FEM コードで計算可能である。

$$\mathbf{E}_{ijkl}^M = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\mathbf{E}_{ijkl}^\varepsilon - \mathbf{E}_{ijmn}^\varepsilon \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) dY. \quad (2)$$

式(2)において、 χ^{kl} は特性変位である。2 次元弾性体の場合は対称性を考慮すると $kl=11, 22, 12$ に対応する大きさ 1 の単位初期ひずみを与え、次式により計算される。また、単位初期ひずみを与えた際の特性変位モードを図に示す。

$$a(\chi^{kl} - \mathbf{Y}^{kl}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in U_Y, \quad (k, l = 1, 2). \quad (3)$$

Fig. 2 Characteristic displacements of a unit cell. They are calculated based on Eq. (3) by giving the unit cell initial strains with respect to $kl (=11, 22, 12)$.

ただし、双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ は式(4)を用いる。 $\mathbf{Y}^{kl}$ は kl 成分による初期ひずみによって生じる線形な基本変位場を表す。 U_Y は周期性の条件を満たす許容変位空間を表す。なお、表記を簡潔にするため、混乱のない範囲で $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon$ をそれぞれ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ として表すこととする。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_Y \mathbf{E}_{ijkl}^\varepsilon u_{k,l} v_{i,j} dY, \quad (4)$$

$$U_Y = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(Y; \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v} \text{ is } Y\text{-periodic in the unit cell } Y \right\}, \quad (k, l = 1, 2). \quad (5)$$

2・2 マルチスケール形状最適化問題の定式化

本節では、2.1 節に示した均質化法を用いて、マイクロ構造のユニットセルの形状最適化問題の定式化を行う。2・2・1 節では設計変数である形状変動場 $\mathbf{V}(\mathbf{y})$ を定義し、2・2・2 節にてマルチスケール振動固有値最大化問題の定式化を行う。

2・2・1 設計変数の定義

マイクロ構造中のユニットセル形状の変動を表す、形状変動場 $\mathbf{V}(\mathbf{y})$ について定義する。図 2 のようにユニットセル内の孔と材料部分の境界を設計境界 Γ_y とした時、形状変動量を $\mathbf{V}(\mathbf{y}) = V(\mathbf{y})\mathbf{n}, \mathbf{y} \in \Omega^\varepsilon$ で表す。なお、 $\mathbf{n}$ は設計境界 Γ_y 上で定義される、単位外向き法線ベクトルとする。

Fig. 3 Shape variation field $V(y)$ on the design boundary Γ_y in a unit cell and shape variation by $V(y)$.

2・2・2 振動固有値最大化問題の定式化

本項では、2次元弾性体の振動固有値最大化を目的としたマルチスケール形状最適化問題の定式化を行う。設計変数を形状変動場 $V(y)$ ，目的関数を任意の次数の振動固有値 $\lambda^{[r]}$ ，制約条件に，マクロ構造の状態方程式，ミクロ構造の均質化方程式，体積制約を用いる。また，振動固有値 $\lambda^{[r]}$ 及び変位ベクトル $u^{[r]}$ ，仮想変位ベクトル $v^{[r]}$ の上付きの $[r]$ は r 次の振動モードにおける値であることを示す。

$$\text{find} \quad V(y), \quad (6)$$

$$\text{that minimizes} \quad -\lambda^{[r]}, \quad (7)$$

$$\text{subject to} \quad M \left(\equiv \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_y} d\Omega_y \right) d\Omega \right) = M_0, \quad (8)$$

$$a(u^{[r]}, v^{[r]}) = \lambda^{[r]} b(u^{[r]}, v^{[r]}), \quad \forall v^{[r]} \in H_0^1, \quad (9)$$

$$a(\chi^{kl} - Y^{kl}, \bar{\chi}^{kl}) = 0, \quad \forall \bar{\chi}^{kl} \in H_0^1, (k, l = 1, 2). \quad (10)$$

ここで， M はミクロ構造を考慮した全体積を， M_0 は制約値とする初期体積の値を表す。双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ ， $b(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ，仮想変位ベクトル $v^{[r]}$ による内力の仮想仕事と慣性力の仮想仕事を表し，次式のように示される。

$$a(u^{[r]}, v^{[r]}) = \int_{\Omega} E_{ijkl}^M u_{i,j}^{[r]} v_{i,j}^{[r]} d\Omega, \quad (11)$$

$$b(u^{[r]}, v^{[r]}) = \int_{\Omega} \rho^M u_i^{[r]} v_i^{[r]} d\Omega. \quad (12)$$

また，式(11)中の E_{ijkl}^M は式(2)より求まる均質化弾性係数を， ρ^M は式(13)によって表されるユニットセルの均質化密度であり，板厚 t と，材料密度 ρ を用いて以下のように表す。

$$\rho^M = \frac{\int_Y dY}{|Y|} t \rho. \quad (13)$$

2・2・3 KS 関数

前節にて定式化した問題において，式(7)で表される目的関数は振動固有値が重根になる場合，微分不可能な関数となってしまう。この重根問題を解決するために KS 関数 (Kreisselmeier and Steinhauser, 1979) を導入し，目的関数を以下のように置き換える (月原, 下田, 2021)。この KS 関数を用いることで，目的関数は対称の振動固有値に重みをかけた値の足し合わせとなり，連続微分可能な近似関数となる。すなわち局所的に発生する重根問題の解決を可能としている。

$$-\lambda^{[r]} \Rightarrow -\frac{1}{pw^{[r]}} \ln \left\{ \frac{1}{M_0} \sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \lambda^{[r]}) \right\}, \quad (14)$$

$$w^{[r]} = \begin{cases} w_0 & (|\lambda^{[r]} - \lambda^{[j]}| < \delta\lambda) \\ \frac{1}{(\lambda^{[r]})^2 - (\lambda^{[j]})^2} & (\text{other}), \end{cases} \quad (15)$$

ここで、 p は抽出係数、 w は重み定数、 M_0 は重根数、 w_0 は重根時の重み定数、 $\delta\lambda$ は重根判定定数（本研究では $\lambda^{[r]}$ の1/10の値）を表す。

3. マルチスケール形状最適化システム

前節にて定式化した振動固有値最大化問題のマルチスケール形状最適化システムについて説明する。本節では、初めに形状勾配関数の導出を行い、最適化手法、及び最適化システム全体の流れについて述べる。また、本論文では振動固有値 $\lambda^{[r]} < 1.0$ の場合でも解析を行えるように一般化するため、ミクロ構造の初期形状における1次の振動固有値で考慮する m 個の振動固有値を下式のように規準化している。

$$\hat{\lambda}^{[j]} = \frac{\lambda^{[j]}}{\lambda^{[1]} \text{ for the initial microstructures}}. \quad (16)$$

3・1 形状勾配関数の導出

ミクロ構造を考慮したマクロ構造の体積制約に関するラグランジュ乗数を Λ とすると、ラグランジュ汎関数 L は次のように表される。

$$L = -\frac{1}{pw^{[r]}} \ln \left\{ \frac{1}{M_0} \sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]}) \right\} + \sum_{r=1}^m \left\{ -a(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) + \hat{\lambda}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) \right\} \\ - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a(\chi^{kl} - Y^{kl}, \bar{\chi}^{kl}) d\Omega + \Lambda(M - M_0). \quad (17)$$

式(16)のミクロ構造の形状変動に関する物質導関数は次のように求まる。

$$\dot{L} = \sum_{r=1}^m \left\{ -a(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]})' + \hat{\lambda}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]})' - a(\mathbf{u}^{[r]'}, \mathbf{v}^{[r]}) + \hat{\lambda}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]'}, \mathbf{v}^{[r]}) \right\} \\ - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left\{ a(\chi^{kl'}, \bar{\chi}^{kl'}) + a(\chi^{kl} - Y^{kl}, \bar{\chi}^{kl'}) \right\} d\Omega + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left\{ (E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl'}}{\partial y_n}) dY \right\} u_{k,l}^{[r]} v_{i,j}^{[r]} d\Omega \\ + \dot{\Lambda}(M - M_0) - \frac{1}{w^{[r]}} \frac{\sum_{r=1}^m (w^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})' \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})}{\sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})} + \sum_{r=1}^m \dot{\hat{\lambda}}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) \\ + \sum_{r=1}^m \left\{ - \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_y} (E_{ijkl} - E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) u_{k,l}^{[r]} v_{i,j}^{[r]} n_s V_s d\Gamma_y d\Omega + \hat{\lambda}^{[r]} \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_y} t \rho u_i^{[r]} v_i^{[r]} n_s V_s d\Gamma_y d\Omega \right\} \\ - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_y} (E_{ijmn} \chi_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl} - E_{ijmn} Y_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl}) n_s V_s d\Gamma_y \right\} d\Omega + \Lambda \int_{\Omega} \left(\int_{\Gamma_y} n_s V_s d\Gamma_y \right) d\Omega. \quad (18)$$

なお、 $(\quad)'$ は形状導関数、 $\dot{(\quad)}$ は物質導関数を表す。 $\mathbf{n}$ はミクロ構造の境界 Γ_y 上の外向き単位法線ベクトルを表す。

ここで、以下の式(19)–(24)が成立する時、式(17)は形状勾配関数 $\mathbf{G} = (\mathbf{G}\mathbf{n})$ と、形状変動場 $\mathbf{V}$ の内積によって式(25)のように表される。

$$a(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) = \hat{\lambda}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}), \quad \forall \mathbf{v}^{[r]} \in H_0^1, \quad (19)$$

$$a(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) = \hat{\lambda}^{[r]} b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}), \quad \forall \mathbf{u}^{[r]} \in H_0^1, \quad (20)$$

$$a(\chi^{kl} - Y^{kl}, \bar{\chi}^{kl}) = 0, \quad \forall \bar{\chi}^{kl} \in H_0^1, \quad (k, l = 1, 2), \quad (21)$$

$$a(\chi^{kl}, \bar{\chi}^{kl}) = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y (E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) dY \right\} u_{k,l}^{[r]} v_{i,j}^{[r]}, \quad \forall \chi^{kl} \in H_0^1, \quad (k, l = 1, 2), \quad (22)$$

$$b(\mathbf{u}^{[r]}, \mathbf{v}^{[r]}) = \frac{\exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})}{\sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})}, \quad (23)$$

$$\dot{\Lambda}(M - M_0) = 0. \quad (24)$$

なお、上式はそれぞれ、マクロ構造の固有振動方程式（式(19)）と随伴方程式（式(20)）、ミクロ構造の状態方程式（式(21)）と随伴方程式（式(22)）、正規化条件（式(23)）、体積制約条件（式(24)）を示している。

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \langle \mathbf{G}, \mathbf{V} \rangle \\ &= \sum_{r=1}^m \left\{ - \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_y} (E_{ijkl} - E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) u_{k,l}^{[r]} v_{i,j}^{[r]} n_s V_s d\Gamma_y d\Omega + \hat{\lambda}^{[r]} \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_y} t \rho u_i^{[r]} v_i^{[r]} n_s V_s d\Gamma_y d\Omega \right\} \\ &\quad - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_y} (E_{ijmn} \chi_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl} - E_{ijmn} Y_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl}) n_s V_s d\Gamma_y \right\} d\Omega + \Lambda \int_{\Omega} \left(\int_{\Gamma_y} n_s V_s d\Gamma_y \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)より、ミクロ構造の形状勾配密度関数 $\mathbf{G}$ は以下のように導出される。

$$\mathbf{G} = \frac{\exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})}{\sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})} \left[- \frac{1}{|Y|} (E_{ijkl} - E_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n}) u_{k,l}^{[r]} v_{i,j}^{[r]} + \hat{\lambda}^{[r]} \frac{1}{|Y|} t \rho u_i^{[r]} v_i^{[r]} \right] - \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (E_{ijmn} \chi_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl} - E_{ijmn} Y_{m,n}^{kl} \bar{\chi}_{i,j}^{kl}) + \Lambda. \quad (26)$$

ただし、上式には、式(21)と式(22)から得られるミクロ構造の随伴関係（式(27)）および、式(23)より得られる随伴関係（式(28)）を用いている。

$$\chi^{kl} = \frac{\bar{\chi}^{kl}}{|Y| u_{i,j}^{[r]} v_{i,j}^{[r]}}, \quad (27)$$

$$\mathbf{v}^{[r]} = \frac{\exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})}{\sum_{r=1}^m \exp(pw^{[r]} \hat{\lambda}^{[r]})} \mathbf{u}^{[r]}. \quad (28)$$

また、有限要素法により形状勾配関数 $\mathbf{G}$ を導出する場合、下式のように各要素より計算される形状勾配関数 G_{el} ($el=1, \dots, EN$) を合計し、算術平均をとったものを $\bar{\mathbf{G}}$ として用いる。ただし、 EN は要素数、 A_{el} は要素面積とする。

$$\bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{\int_{\Omega} dA} \int_{\Omega} G_{el} dA \approx \frac{1}{\sum_{el=1}^{EN} A_{el}} \sum_{el=1}^{EN} G_{el} A_{el}. \quad (29)$$

また、本研究では、図のようにマイクロ構造の配置する領域数は任意であり、それぞれの領域に異なるマイクロ構造が配置されているとする。したがって、形状勾配関数は領域数に応じた数だけ $\bar{G}^d$ ($d=1, \dots, DN$) として計算される。ただし、 DN は総領域数とする。

$$\bar{G}^d = \frac{1}{\int_{\Omega^d} dA^d} \int_{\Omega^d} G_{el}^d dA^d \approx \frac{1}{\sum_{el=1}^{EN} A_{el}^d} \sum_{el=1}^{EN} G_{el}^d A_{el}^d. \quad (30)$$

Fig. 4 (a) Macro structure divided into DN domains and (b) Image of shape gradient functions for unit cells by Eq. (30) to unit cells. Sensitivities are applied to the H^1 gradient method, which transforms the shape of microstructures in each area.

3・2 H^1 勾配法

本研究では形状最適化手法として H^1 勾配法 (畔上, 1994) を用いる。これは、前節にて導出した形状勾配関数 G に比例する疑似荷重を、境界節点にノイマン条件として作用させることで境界の滑らかさを保ちながら最適形状変動場 $\mathbf{V}$ を求める勾配法である。 H^1 勾配法は、設計変数のパラメータ化を必要としない変分法に基づくノンパラメトリックな手法であり、理論的に無限自由度の設計変数を扱える。

実際にマイクロ構造のユニットセルに H^1 勾配法を適用する場合は、図4のようにユニットセルの設計境界に形状勾配関数 G に比例した負の法線方向荷重を外力として作用させ、この時得られる変位ベクトルが求める最適形状変動ベクトル $\mathbf{V}$ となる。 $\mathbf{V}$ の支配方程式は、以下のように表される。

$$a(\mathbf{V}, \bar{\mathbf{v}}) = -\langle \mathbf{G}, \bar{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in C_0. \quad (31)$$

C_0 は剛体変位や設計制約等の形状変動の拘束条件を満たす許容関数空間とする。式(31)は有限要素法によって解くことが可能である。

目的関数の減少は次のように確認されている (畔上, 1994)。状態方程式(19),(21)と随伴方程式(20),(22)、正規化条件(23)、体積制約条件(24)がすべて満たされているとき、ラグランジュ汎関数の摂動展開は次のように表される。

$$\Delta L = \langle \mathbf{G}, \Delta s \mathbf{V} \rangle + O(|\Delta s|^2). \quad (32)$$

ここで、 Δs が十分小さいとき、式(32)は $\mathbf{E}^e$ の正定値性に基づく $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の正定値性を考慮すると以下のように表される。

$$\Delta L = \langle -\mathbf{G}, \Delta s \mathbf{V} \rangle = -a(\mathbf{V}, \Delta s \mathbf{V}) < 0. \quad (33)$$

この関係は速度場 $\mathbf{V}$ を用いて領域を変形していけば、凸性が保証されている問題において、ラグランジュ関数 L は必ず減少する関係を与えている。

3・3 体積制約

H^1 勾配法における体積制約の方法について述べる。本研究では、ミクロ構造の形状を考慮したマクロ構造体積 (式(8)) を制御する。導出した形状勾配密度関数 G (式(26)) は、体積制約に関するラグランジュ乗数 Λ とそれ以外の項 G_G^d に分けて考えることができる。

$$G = G_G^d + \Lambda. \quad (34)$$

従って H^1 勾配法におけるラグランジュ乗数 Λ は、図 5(b) のようなユニットセル設計境界に負荷する疑似荷重 $-\mathbf{G}$ の中で一様な表面力と考えることができる。

ここで微小変動 Δs を仮定した時、以下のように変形の線形性を考慮して疑似荷重 $\mathbf{G}$ を $\Delta s \mathbf{G}_G^d \mathbf{n}$ と境界に分布する一様な力 $\Delta s \mathbf{G}_H^d \mathbf{n} = \Delta s \mathbf{n}$ に分けて与える (Shimoda et al., 1995)。

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_G^d + \Lambda \mathbf{G}_H^d, \quad (35)$$

$$G_H^d = 1. \quad (36)$$

$\Delta s \mathbf{G}_G^d \mathbf{n}$ を作用させて得られる面積変動を ΔV_G^d (図 5(a)), $\Delta s \mathbf{G}_H^d \mathbf{n} = \Delta s \mathbf{n}$ を作用させて得られる面積変動を ΔV_H^d (図 5(b)) とすると、面積一定条件(式(24))を満たすようなラグランジュ乗数 Λ は以下の方程式を解くことで求められる。

$$\sum_{d=1}^{DN} \left\{ \left(\sum_{el=1}^{EN} A_{el}^d \right) (\Delta V_G^d - \Lambda \Delta V_H^d) \right\} = 0. \quad (37)$$

上式より求まったラグランジュ乗数 Λ を用いることで、分割領域ごとに体積制約を満たすユニットセルの領域変動量 $\mathbf{V}^d$ (図 5(c)) が求められる。

$$\mathbf{V}^d = \mathbf{V}_G^d + \Lambda \mathbf{V}_H^d. \quad (38)$$

Fig. 5 Updating of the unit cell shape. The updated shape is determined by superimposing the shape variation with $\mathbf{G}_G^d$ and that with the uniform surface force $\mathbf{G}_H^d$.

3・4 最適化システムの流れ

提案手法の流れを図6に示す．最初に解析対象となるマイクロ構造の初期モデルの状態解析を，式(3)を用いて行う．続いて状態解析から得られた応力を用いて均質化弾性係数を式(2)より計算し，計算結果をマクロ構造に適用させる．次に，均質化弾性係数を適用したマクロ構造の固有値解析を式(9)によって行い，振動固有値の収束判定を行う．収束が確認されなければ形状勾配関数を式(26)から計算し，式(31)により H^1 勾配法を基にした速度場解析を行う．その後，式(37)から体積制約を満たすラグランジュ乗数 Λ を求め，最後にマイクロ構造の形状を式(38)より更新する．以上の流れを振動固有値が収束するまで繰り返していく．また，図6右の青破線部には，マクロ構造内の n 番目領域におけるマイクロ構造の形状変化の様子を示した．それぞれの図は，フローチャートの各段階に対応している．

Fig. 6 Flowchart of multi-scale optimization. The developed optimization system consists of commercial FEM code in red and in-house programs in blue. The state of the shape change of the microstructure distributed in the n th region is shown in the blue dashed line.

4. 数値解析結果

本章では，数値解析を通して提案手法の有効性を検証する．解析に用いるモデルは2次元弾性体（平面応力状態）からなる片持ちはりとし，面内方向の振動を対象としている．2次元弾性体の材料定数は，ヤング率 $E=193\text{ GPa}$ ，ポアソン比 $\nu=0.3$ ，材料密度 $\rho=7.93\text{ g/cm}^3$ ，板厚 $t=1\text{ mm}$ とした．また，KS 関数に用いる定数として抽出係数 $p=2$ ，重み定数 $w_0=10$ ，重根判定用定数 $\delta\lambda=0.1$ とし，固有振動解析では1次から6次までの振動固有値を考慮した．

4・1 1次振動固有値最大化

図 7(a)に示した片持ちはりにて、領域を 1,3,9 分割したマクロ構造モデル($d=1,3,9$)を用いて体積一定の条件下で、1 次振動固有値最大化を目的とした数値例を示す。1 次振動モードの様子は図 7(b)に示した通りである。集中質量 50 g をマクロ構造の右端中央に配置し、分割した各領域にはそれぞれ異なるマイクロ構造を配置する。また、配置するマイクロ構造の形状は図 8 のような円孔を有する正方形セルとし、周期的に配置されるマイクロ構造を再現するために周期境界条件を満たすように、向かい合う辺の自由度が同じ変化をするように拘束を加えた。また、剛体変位による境界値問題の不定性を避けるためにユニットセルの四隅を単点拘束した(Fujioka et al., 2021)。図 8(b)中の SPC 12 には拘束する自由度番号を表し、1,2 はそれぞれ x,y 方向の併進自由度を表す。

Fig. 7 (a) Two-dimensional cantilever with concentrated mass and (b) 1st vibration mode.

Fig. 8 (a) Initial shape of a unit-cell in microstructure and (b) Periodic boundary conditions with MPC.

領域分割数ごとの最適化結果と規準化された 1 次の振動固有値の履歴を図 9 に示す。いずれの解析も体積制約を満たしており、領域分割数 $d=1,3$ では、1 振動固有値は適切に収束し、最大化されていることが分かる。領域分割数 $d=9$ では、振動固有値が収束する前にマクロ構造左端に配置されているマイクロ構造中の孔が収縮し、最終的にメッシュの潰れが発生した。そこでこの領域は孔が不要と判断し、設計領域から除いたモデル($d=7$)に変更して再度解析を行った。その結果振動固有値の履歴は、初期形状($d=9$)との固有値比 1.4 から解析が始まっている。領域分割数 $d=1$ では、1 次振動固有値が初期形状から約 20% の上昇を、領域分割数 $d=3$ では約 60% 上昇している。領域分割数 $d=7$ では、初期形状から約 40% 上昇を示した。これは、マイクロ構造中の孔をマクロ構造全体に配置したモデル($d=9$)の初期振動固有値から約 80% の上昇となる。以上より、マクロ構造の領域分割数を増やしていくことで、初期の振動固有値からの上昇率が大きくなり、より最適なマイクロ構造設計が可能になると考えられる。

最適形状は、1 次振動モードにおいて変位が大きくなる、右端の領域のマイクロ構造の孔が広がっていく傾向にある。これは、振動時の変位が大きい領域は運動エネルギーも大きくなるため、軽くするために材料が取り除かれる傾向になると考えられる。また、領域分割数 $d=9$ のモデルでは、マクロ構造の中立軸に配置されるマイクロ構造の孔が広がっている。これはせん断力が支配的であることを裏付けており、妥当な結果といえる。

Fig. 9 Optimization result for maximizing the 1st eigenvalue. (a) Domain division of macro structures. (b) Optimal shapes of microstructures. (c) Iteration histories of normalized 1st eigenvalue. Divided domains of the macrostructure and the corresponding optimum shapes of the microstructures for the domains are expressed with the same color.

4・2 2次振動固有値最大化

次に、マクロ構造と初期ミクロ構造は同様とし、2次振動固有値最大化を目的とした数値例を示す。図 10(a)のように、境界条件や集中質量の大きさを先ほどの例と同様とした。マクロ構造の境界条件と2次振動モードの様子は図 10(b)に示した通りである。

(a) Two-dimensional cantilever with concentrated mass

(b) 2nd vibration mode

Fig. 10 (a) Cantilever of two-dimensional elastic body with concentrated mass and (b) 2nd vibration mode.

領域分割数 d ごとの最適化結果と規準化された 2 次の振動固有値の履歴を図 11 に示す. 2 次振動固有値最大化の場合も, 体積制約を満たしつつ振動固有値が最大化されていることが確認できる. また, 1 次振動固有値最大化の時と同様に, 領域分割数 d を増やすほど振動固有値の上昇率が大きいことも確認できる. 最適形状は, 2 次振動モードでは固定端と自由端が節となるため, 右端領域の孔は 1 次振動固有値最大化の時のように大きく広がらず, 振動変位が大きくなる中央付近の領域の孔が広がっている.

Fig. 11 Optimization result for maximizing the 2nd eigenvalue. (a) Domain division of macro structures. (b) Optimal shapes of microstructures. (c) Iteration histories of normalized 2nd eigenvalue. Divided domains of the macrostructure and the corresponding optimum shapes of the microstructures for the domains are expressed with the same color.

4・3 重根モデル

最後に、KS 関数によって重根発生時も適切に振動固有値が最大化されることを確認するため、図 12(a)のようなマクロ構造において、4 次振動固有値最大化を目的とした数値例を示す。マクロ構造の領域分割数は Y 軸方向に 4 つ($d=4$)とし、幅が 60 mm から 20 mm に変わる境界部分に集中質量 0.5 g を配置した。ミクロ構造の初期形状及び周期性境界条件は 1 次振動固有値最大化の時と同様とする。また、図 12(b),(c)に 4 次と 5 次の振動モードの様子を示す。

Fig. 12 (a) Two-dimensional cantilever with concentrated mass. (b) 4th vibration mode and (c) 5th vibration mode.

図 13 に最適化結果と、4 次および 5 次の規準化された振動固有値の履歴を示す。重根発生前の 4 次振動固有値は、適切に最大化されている。最適化の過程で 4 次と 5 次の振動固有値が重根となり、その後は 4 次と 5 次の振動固有値が同時に最大化されていくことが確認できる。4 次振動モードは X 軸方向の振動となるため、ミクロ構造は X 軸方向の振動に対して強い構造となるように、横長の形状となっている。固定端と集中質量を置いた領域境界部分にて応力が大きくなるため、その周辺のミクロ構造の孔が小さくなっている。この結果より、重根発生時も KS 関数によって適切に最適化が行われていることが確認できる。

Fig. 13 Optimization result for maximizing the 4th eigenvalue. (a) Domain division of macro structure. (b) Optimal shapes of microstructures. (c) Iteration histories of normalized 4th and 5th eigenvalues. Divided domains of the macrostructure and the corresponding optimum shapes of the microstructures for the domains are expressed with the same color.

5. 結 言

本論文では、体積制約の下でポーラスなマクロ構造に周期的に分布するミクロ構造の孔の形状を最適化し、振動固有値を最大化する手法を提案した。そこでは、重根問題解決のために KS 関数を用いた目的関数を示すと

もに、最適化問題の定式化を行い、形状勾配関数の導出をした。マクロとマイクロ構造は均質化弾性係数と均質化密度により接続した。得られた形状勾配関数は H^1 勾配法に適用し、マイクロ構造の最適形状変動場を求めた。

数値計算例では、片持ちはりのマクロ構造に、円孔を有するマイクロ構造を配置したモデルの解析を行った。マクロ構造の領域分割数を変化させ、目的関数の上昇の様子とマイクロ構造の最適形状を比較した。1次と2次の振動固有値最大化を目的とした解析では、どちらも適切に振動固有値が最大化され、振動モードに適したマイクロ構造の最適形状が求まっていることを確認した。また、重根問題発生時の KS 関数の有効性を確認するために、4次の振動固有値最大化を目的とした数値例も示した。最適化の過程で4次と5次の振動固有値が重根となった後も目的関数の上昇を確認することができ、 KS 関数が有効に機能していることが分かった。すべての数値計算例で体積一定の下振動固有値が上昇し手法の有効性を示した。

謝 辞

本研究の一部には JSPS 科研費 18K03853 の助成を受けました。ここに記して厚く感謝の意を表します。

文 献

- 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.574 (1994), pp. 1479-1486.
- 畔上秀幸, 呉志強, 線形弾性問題における領域最適化解析(力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.578(1994), pp.2312-2318.
- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71(1988), pp.197-224.
- Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G., Asymptotic analysis for periodic structures. Studies in Mathematics and Its Applications, Vol. 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam(1978).
- Du, J., Yang, R., Vibro-acoustic design of plate using bi-material microstructural topology optimization, Journal of Mechanical Science and Technology, 29(2015), pp.1413-1419.
- Duvaut, G., Nuc, M., A new method of analysis of composite structure, Ninth European Rotor Craft and Powered Lift Aircraft Forum, 88(1983).
- Francfort, G., Homogenization and linear thermoelasticity, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 14(1983).
- Fujioka, M., Shimoda, M., Al Ali, M., Shape optimization of periodic-microstructures for stiffness maximization of a macrostructure, Composite Structures, 268(2021), 113873.
- Gao, J., Li, H., Gao, L., Xiao, M., Topological shape optimization of 3D micro-structured materials using energy-based homogenization method, Advances in Engineering Software, 116(2018), pp.89-102.
- Hornung, U., Homogenization and porous media, Springer (1997).
- Iga, A., Nishiwaki, K., Yoshimura, M., Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection, International Journal of Heat and Mass Transfer, 52(2009), pp.2721-2732.
- 井原久, 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, 位相最適化と形状最適化の統合による多目的構造物の形状設計 (均質化法と力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.62, No.596 (1996), pp. 1091-1097.
- 加藤匠, 藤岡みなみ, 下田昌利, 逆均質化法と H^1 勾配法を用いた周期的マイクロ構造のマルチスケール形状最適化, 日本機械学会論文集, Vol.85, No.880,(2019).
- Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., Systematic control design by optimizing a vector performance index, IFAC Proceedings Volumes, Vol.12, No.7 (1979), pp.113-117.
- Liang, X., Du, J., Concurrent multi-scale and multi-material topological optimization of vibro-acoustic structures, Computer methods in applied mechanics and engineering, 349(2019), pp.117-148.
- Liu, Q., Chan, R., Huang, X., Concurrent topology optimization of macrostructures and material microstructures for natural frequency, Materials and Design, 106(2016), pp.380-390.
- Niu, B., Yan, J., Cheng, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, Struct Multidisc Optim, 39(2008), pp.115-132.
- Rodrigues, H., Guedes, J.M., Bendsøe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, Structural and Multidisciplinary Optimization, 24(2002).
- 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明; ”汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法(力法による

アプローチ”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.578(1994), pp.2418-2425.

- Shimoda, M., Sakurai, T. and Azegami H., Shape optimization of linear elastic structures subject to multiple loading conditions: a traction method approach to minimum volume design, Current Topics in Computational Mechanics (Proceedings of the 1995 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, JSME Co-Sponsorship), 305, The 1995 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, JSME Co-Sponsorship, Hilton Hawaiian Village, Honolulu, Hawaii, 1995.7.23-1995.07.27, pp. 319-326.
- Shimoda, M., Azegami, H. and Sakurai, T., Multiobjective shape optimization of linear elastic structures considering multiple loading conditions : dealing with mean compliance minimization problems, JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering, Vol. 39, No. 3 (1996), pp. 407-414.
- Shimoda, M., Azegami, H. and Sakurai, T., Traction method approach to optimal shape design problems, SAE 1997 Transactions, Journal of Passenger Cars, Section 6, Vol.106 (1998), pp. 2355 – 2365.
- Sigmund, O., Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem, International Journal of Solid and Structures, Vol.31(1994), No.17, pp.2313–2329.
- Sigmund, O., Tailoring materials with prescribed elastic properties, Mechanics of Materials, 20(1995), pp.351-368.
- Sigmund, O., Torquato, S., DESIGN OF MATERIALS WITH EXTREME THERMAL EXPANSION USING A THREE-PHASE TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD, J. Mech. Phys. Solids, Vol.45, No.6(1996), pp.1037-1067.
- Sivapuram, R., Dunning, PD., Kim, HA., Simultaneous material and structural optimization by multiscale topology optimization, Struct Multidisc Optim, 54(2016), pp.1267-1281.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93(1991), pp.291–318.
- Takano, N., Ohnishi, Y., Zako, M., Nishiyabu, K., The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials, International Journal of Solids and Structures, 37(2000).
- 月原僚佑, 下田昌利, シェル構造体の振動固有値制御のための自由材料配向設計, 日本機械学会論文集, Vol.87, No.895(2021).
- 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇, 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第 1 報, 定式化), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.61, No.590 (1995), pp.2199-2205.
- 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇, 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析(第 2 報, 数値解析), 日本機械学会論文集 A 編, Vol.62, No.601 (1996), pp.2072-2079.
- Wang, Y., Luo, Z., Zhang, N., Zhan, K., Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method, Computational Materials Science, 87(2014), pp.178-186.
- 呉志強, 畔上秀幸, 固有振動問題における領域最適化解析(力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.61, No.583(1995), pp.930-937.
- Yang, R., Du, J., Microstructural topology optimization with respect to sound power radiation, Struct Multidisc Optim, 42(2012), pp.191-206.
- Yan, X., Huang, X., Zha, Y., Xie, Y.M., Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures, Computers and Structures, 133(2014), pp.103-110.
- Yvonnet, J., Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements, Springer (2019).
- Zhang, Y., Gao, L., Xiao, M., Maximizing natural frequencies of inhomogeneous cellular structures by Kriging-assisted multiscale topology optimization, Computers and Structures, 230(2020), pp.1-24.
- Zuo, Z.H., Hang, X., Rong, j. H., Xie, Y.M., Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies, Materials and Design, 51(2013), pp.1023-1034.

References

- Azegami, H., Solution to Domain optimization problems, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.60, No.574 (1994), pp.1479-1486 (in Japanese).
- Azegami, H., Wu, Z. C., Domain optimization analysis in linear elastic problem (approach using traction method), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.60, No.578 (1994), pp.2312-2318(in Japanese).
- Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.71(1988), pp.197-224.
- Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G., Asymptotic analysis for periodic structures. Studies in Mathematics and Its

- Applications, Vol. 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam(1978).
- Du, J., Yang, R., Vibro-acoustic design of plate using bi-material microstructural topology optimization, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(2015), pp.1413-1419.
- Duvaut, G., Nuc, M., A new method of analysis of composite structure, *Ninth European Rotor Craft and Powered Lift Aircraft Forum*, 88(1983).
- Francfort, G., Homogenization and linear thermoelasticity, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 14(1983).
- Fujioka, M., Shimoda, M., Al Ali, M., Shape optimization of periodic-microstructures for stiffness maximization of a macrostructure, *Composite Structures*, 268(2021), 113873.
- Gao, J., Li, H., Gao, L., Xiao, M., Topological shape optimization of 3D micro-structured materials using energy-based homogenization method, *Advances in Engineering Software*, 116(2018), pp.89-102.
- Hornung, U., Homogenization and porous media, Springer (1997).
- Iga, A., Nishiwaki, K., Yoshimura, M., Topology optimization for thermal conductors considering design-dependent effects, including heat conduction and convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(2009), pp.2721-2732.
- Ihara H, Shimoda M, Azegami H, Sakurai T (1996) Shape design by integrating shape optimization with topology optimization for multiobjective structures (An approach using homogenization method and traction method. *Trans. JSME(in Japanese)*, Series A, 62(596): 1091-1097.
- Kato, T., Fujioka, M. and Shimoda, M., Multi-scale shape optimization method for designing a macrostructure with periodic-microstructures using inverse homogenization method and H1 gradient method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.85, No.880 (2019), DOI: 10.1299/transjsme.19-00279(in Japanese).
- Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., Systematic control design by optimizing a vector performance index, *IFAC Proceedings Volumes*, Vol.12, No.7 (1979), pp.113-117.
- Liang, X., Du, J., Concurrent multi-scale and multi-material topological optimization of vibro-acoustic structures, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 349(2019), pp.117-148.
- Liu, Q., Chan, R., Huang, X., Concurrent topology optimization of macrostructures and material microstructures for natural frequency, *Materials and Design*, 106(2016), pp.380-390.
- Niu, B., Yan, J., Cheng, G., Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency, *Struct Multidisc Optim*, 39(2008), pp.115-132.
- Rodrigues, H., Guedes, J.M., Bendsøe, M.P., Hierarchical optimization of material and structure, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24(2002).
- Shimoda, M., Wu, Z. C., Azegami, H., Sakurai, T., Numerical method for domain optimization problems using a general FEM code (traction method approach), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.60, No.578(1994), pp.2418-2425(in Japanese).
- Shimoda, M., Sakurai, T. and Azegami H., Shape optimization of linear elastic structures subject to multiple loading conditions: a traction method approach to minimum volume design, *Current Topics in Computational Mechanics (Proceedings of the 1995 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, JSME Co-Sponsorship)*, 305, The 1995 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, JSME Co-Sponsorship, Hilton Hawaiian Village, Honolulu, Hawaii, 1995.7.23-1995.07.27, pp. 319-326.
- Shimoda, M., Azegami, H. and Sakurai, T., Multiobjective shape optimization of linear elastic structures considering multiple loading conditions : dealing with mean compliance minimization problems, *JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering*, Vol. 39, No. 3 (1996), pp. 407-414.
- Shimoda, M., Azegami, H. and Sakurai, T., Traction method approach to optimal shape design problems, *SAE 1997 Transactions, Journal of Passenger Cars, Section 6*, Vol.106 (1998), pp. 2355—2365.
- Sigmund, O., Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem, *International Journal of Solid and Structures*, Vol.31(1994), No.17, pp.2313–2329.
- Sigmund, O., Tailoring materials with prescribed elastic properties, *Mechanics of Materials*, 20(1995), pp.351-368.
- Sigmund, O., Torquato, S., DESIGN OF MATERIALS WITH EXTREME THERMAL EXPANSION USING A THREE-PHASE TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.45, No.6(1996), pp.1037-1067.
- Sivapuram, R., Dunning, PD., Kim, HA., Simultaneous material and structural optimization by multiscale topology optimization, *Struct Multidisc Optim*, 54(2016), pp.1267-1281.
- Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.93(1991), pp.291–318.

- Takano, N., Ohnishi, Y., Zako, M., Nishiyabu, K., The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials, *International Journal of Solids and Structures*, 37(2000).
- Tsukihara, R., Shimoda, M., Free material orientation design for tailoring vibration eigenvalues of CFRP shell structures, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol.87, No.895(2021).
- Terada, K., Yuge, K., Kikuchi, N., Elasto-plastic analysis of composite materials using the homogenization method (1st report, Formulation), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.61, No.590 (1995), pp.2199-2205(in Japanese).
- Terada, K., Yuge, K., Kikuchi, N., Elasto-plastic analysis of composite materials using the homogenization method (2nd report, Numerical analysis), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.62, No.601 (1996), pp.2072-2079. (in Japanese).
- Wang, Y., Luo, Z., Zhang, N., Zhan, K., Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method, *Computational Materials Science*, 87(2014), pp.178-186.
- Wu, Z. C., Azegami, H., Domain optimization analysis in natural vibration problems (approach using traction method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.61, No.583(1995), pp.930-937(in Japanese).
- Yang, R., Du, J., Microstructural topology optimization with respect to sound power radiation, *Struct Multidisc Optim*, 42(2012), pp.191-206.
- Yan, X., Huang, X., Zha, Y., Xie, Y.M., Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures, *Computers and Structures*, 133(2014), pp.103-110.
- Yvonnet, J., *Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements*, Springer (2019).
- Zhang, Y., Gao, L., Xiao, M., Maximizing natural frequencies of inhomogeneous cellular structures by Kriging-assisted multiscale topology optimization, *Computers and Structures*, 230(2020), pp.1-24.
- Zuo, Z.H., Hang, X., Rong, j. H., Xie, Y.M., Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies, *Materials and Design*, 51(2013), pp.1023-1034.