Advance Publication by J-STAGE

日本機械学会論文集

Transactions of the JSME (in Japanese)

DOI:10.1299/transjsme.21-00228

Received date : 16 July, 2021

Accepted date : 26 September, 2021

J-STAGE Advance Publication date : 6 October, 2021

二次元結合マス・ばね・ダンパ系の波動解析・波動制御 (二次定数の解析関数としての性質に基づく解析)

長瀬 賢二^{*1}, 谷内 邦夫^{*2}

Wave analysis and control of two-dimensionally connected damped mass-spring systems (Analysis based on analytic properties of secondary constants)

Kenji NAGASE^{*1} and Kunio TANIUCHI^{*2}

^{*1} Faculty of Systems Engineering, Wakayama University
930 Sakaedani, Wakayama 640-8510, Japan

^{*2} Graduate School of Systems Engineering, Wakayama University
930 Sakaedani, Wakayama 640-8510, Japan

Abstract

This paper considers wave analysis and control of two-dimensionally connected damped mass-spring systems, focusing on the properties of the secondary constants as an analytic function of the Laplace transform variable s . Mass motion in the longitudinal direction is considered. The system can be viewed as a cascade connection of layers comprising the lateral direction elements. The dynamics can be described by a first order recurrence formula in the Laplace transform domain. We show that the characteristic polynomial of the coefficient matrix can be decomposed into second order polynomials, which reveals analyticity of the secondary constants in the open right-half plane, as well as the separation property of the propagation constants and the positive real property of the characteristic admittances. These properties justify the harmonic analysis in the wave analysis and guarantee the closed loop stability of the impedance matching controller. Numerical examples illustrate the derived results and show effectiveness for vibration control.

Keywords : Vibration control, Wave analysis and control, Impedance matching, Damped mass-spring system, Two-dimensional vibration, Multi-coupled periodic system

1. 緒 言

1.1 研究の背景

柔軟構造物の振動制御は、大型構造物や宇宙構造物、飛行機や車輛などの移動体、ロボットや工場設備など、様々な分野で重要な研究課題となっている。モード解析に基づくモード制御法は、柔軟構造物の振動制御に対する代表的な設計法として広く利用されている (Balas, 1978, Spencer and Sain, 1997, 長瀬, 早川, 1997, 背戸, 1998, など) が、モードの特性はパラメータ変化に敏感であるためモデル化誤差の影響を受けやすく、また、制振モードの増加に伴い、制御系設計の労力が飛躍的に増大するなどの問題が指摘されている (MacMartin and Hall, 1991, 田中, 1993, 吉田, 1993, 長瀬, 早川, 2000)。

一方、一様な構造物や単純なサブシステムが繰り返し結合されているなどのシステムに対しては、波動解析 (Brillouin, 2003, など) が適用できる場合がある。波動解析に基づく波動制御法は、二次定数 (伝搬定数, 特性イ

ンピーダンス（アドミッタンス））がもつ有用な性質（構造物の長さや繰り返しの数に依存しない、パラメータ変動に対してロバスト、など）から、高い柔軟性を有する大規模な繰り返し構造系に対して有用な制振手法として期待されている（MacMartin and Hall, 1991, 田中, 1993, 長瀬, 早川, 2000）。これまでに、宇宙構造物などを想定した棒や梁およびそのジョイント結合（Miller et al., 1990, Mei, 2002, Svensson et al., 2008, Airolidi and Muzzene, 2011）、長方形のパネルや円筒系などのシェル構造（Spadoni et al., 2009, Iwamoto et al., 2013, Sorokin et al., 2020）、一方向に連鎖するマス・ばね・ダンパ系（Wang et al., 1995, Ojima et al., 2002, O'Connor and Zhu, 2013）などに対する波動解析法やその解析を用いた制御手法の提案がなされており、その適用対象の拡大が進められている。また、より複雑なシステムを想定したものとしては、有限要素法を用いて解析を行う手法（Duhamel et al., 2006, Mace and Manconi, 2008, Nobrega et al., 2016, Hong et al., 2018）や、入出力応答から二次定数の同定を試みるもの（Matsuda and Fujii, 1995, Nagase and Hayakawa, 2000）なども提案されている。

上記に代表される波動解析の議論においては、システムの動特性を表す漸化式より二次定数を導出し、調和解析により定常状態の応答の評価がなされていることが多い。このことは、ラプラス変換上では、伝達関数の値を虚軸上（ $s = j\omega$ ）のみで評価していることに相当する。上記解析は、二次定数や変数変換行列が、複素右開半平面（ $\mathbb{C}_+$ ）内で解析的な関数として定義することができれば正しい解を与えるが、そうでなければその解は意味をなさない。例えば、伝搬定数が、 $\lambda_1(s) = \sqrt{\frac{s-10}{10s+1}}$, $\lambda_2(s) = \sqrt{\frac{10s+1}{s-10}}$ で与えられるとすると、これらは、 $s = j\omega$ で有限の値をもち、また、進行波の解析に必要な条件 $\lambda_1(j\omega)\lambda_2(j\omega) = 1$ を満足する。しかしながら、例えば、 λ_1 は、 $s = -0.1$ （極）、10（分岐点）に特異点をもつため、極は安定であるものの、 $\mathbb{C}_+$ で解析的ではない。また、 $|\lambda_1(j\omega)| = \sqrt{10} > 1$ ($\omega = 0$) $\rightarrow \sqrt{0.1} < 1$ ($\omega \rightarrow \infty$) となるが、これは、波の進行方向が周波数により変化することを意味する。そのような場合、任意の外力に対する解 $f_\ell^-(s) = \lambda_1(s)f_{\ell-1}^-(s)$, $f_\ell^+(s) = \lambda_2(s)f_{\ell-1}^+(s)$ の時間応答（逆ラプラス変換）を、進行波として解釈するのは難しい。また、波動制御コントローラを用いた系の性質についても、単に無限延長時の系の類推から説明がなされていることが多いが、その議論が有効であるためには、関数の収束性や閉ループ系の安定性の議論も必要である。

1.2 本研究の目的

上記の点を明らかにするため、著者らはこれまでに、マス・ばね・ダンパ系を中心に、二次定数の解析関数としての性質に着目した波動解析・制御の議論を行ってきた。ここでは、まず、質点が左右の質点とばね・ダンパで単純に縦続結合するシステムから始め（Ojima et al., 2002, 2004）、それを抽象化した、梯子型回路や一般の単結合系へ議論を展開した（Nagase et al., 2005, Nagase et al., 2021）。また、質点が、左右の質点に加え、その隣の質点以降にも結合を有する多段結合系に対しても議論を展開してきた（長瀬, 中道, 2013, 箕土路, 長瀬, 2018, 2019）。前出のシステムが、隣り合う層と一組の結合のみを有する単結合系（漸化式の係数行列は 2×2 ）であるのに対し、多段結合系は、隣り合う層と複数の結合を有する多重結合系（係数行列は $2n \times 2n$ 。 n は隣の層との結合の数で、多段結合系では、 n 個先の質点までに結合を有する場合に相当）となっている。ただし、その場合においても、質点は左右方向に一つずつ配置されているのみ（一次元場）であり、質点が平面上に配置された状況（二次元場）については考えられていない。

そこで本研究では、上記、二次定数の解析関数としての性質に着目した議論のさらなる一般化を目指し、質点が左右方向に加えて上下方向にも結合した、二次元結合マス・ばね・ダンパ系の波動解析・制御について考える。各質点の運動の方向は、左右方向にとる（板の縦振動や膜の面外振動などを想定）。システムは、上下方向に結合された質点から構成されるサブシステム A が、左右方向に縦続結合された多重結合系とみなすことができる。それにより、システムの動特性は、ラプラス変換上での一階の漸化式で表され、波動解析の議論が適用できる。係数行列の固有値が伝搬定数であり、固有ベクトルから変数変換行列が構成され、そのブロック要素より特性インピーダンス（特性アドミッタンス）が定義される。なお、上記従来研究や本研究のように、システムの構成要素として、質量、ばね、ダンパなどの線形時不変な集中定数系の要素を仮定することは、二次定数が代数関数（多項式係数の多項式の根）（Ahlfors, 1979）の範囲で求まるシステムのクラスを考察対象とすることに相当する。本研究では取り扱わないが、弦や梁などの分布定数系の要素を繰り返し構造の内部に含むシステムを考えることも可能である。ただし、その場合、特性多項式の係数は多項式とはならず、解析性などの議論はより複雑となる。

以降では、まず、第2章で、対象システムの概要の説明および漸化式の導出を行い、その特性多項式が、三項間

漸化式の形で表せることを述べる．第3章では，特性多項式が，単純なマス・ばね・ダンパ系に対する特性多項式と同じ形の2次多項式（基本多項式と呼ぶ）の積に因数分解できることを示す．基本多項式の各項は，1次の係数の定数値（特性定数と呼ぶ）のみが異なり，それらは，実数係数の多項式の根として与えられる．根は2以上の実数であり，そのことから，伝搬定数が，波動解析の議論に必要な性質（ C_+ での解析性，分離性）を満たすように定義できることを示す．続く第4章では，固有ベクトルが特性定数を用いた漸化式で表現できることを示し，そこから変数変換行列の解析性を導く．第5章では，それらの結果を用い，特性アドミタンス（インピーダンスマッチングコントローラ）が正実関数となることを示す．また，上記の固有値，固有ベクトルの表現を用いた，コントローラの実装方法についても述べる．第6章は数値例であり，本論文で得られた結果の妥当性と振動制御への有効性を確認する．第7章は，まとめと今後の課題である．

s はラプラス変換の演算子とし，記号の簡単化のため，元の時間信号とラプラス変換には同じ記号を用いる ($x(t) \leftrightarrow x(s)$)．各引数は，特に必要な場合を除いて省略する． C_+ は複素右開半平面内（実部が正）の複素数を表す．

2. 対象システムとシステムの表現

2.1 二次元結合マス・ばね・ダンパ系

Fig. 1 Two-dimensionally connected damped mass-spring systems: Mass m_0 (Y) is distributed in both the longitudinal (left/right) and lateral (upper/lower) directions. It is connected by spring k_0 and damper d_0 (Z). Mass motion in the longitudinal direction is considered. The upper and lower side boundaries can be fixed, free, or in-between by setting $0 \leq \alpha_{1,n} \leq 1$. The left end is connected to linear, time-invariant and passive elements, and a controller is located on the right end. These boundary conditions can be interchangeable.

図1に示す，質点が横方向に加えて縦方向にも結合した，二次元結合マス・ばね・ダンパ系を考える．図中， ℓ ($\ell = 1, \dots, m$)， i ($i = 1, \dots, n$) は，それぞれ，左右方向および上下方向の質点の番号を表す． m_0 [kg]， d_0 [Ns/m]， k_0 [N/m] は，質点の質量，ダンパの減衰係数，ばねのばね定数を表し，それらは各々すべて等しいとする．板の縦振動や膜の面外振動のモデルを想定し，質点の運動は一方方向とし，それを左右方向にとる．システムは，縦方向に結合した質点からなるサブシステム A が，横方向に繰り返し結合されているシステムとみなすことが出来る． (ℓ, i) 番目の質点の速度を $v_\ell^{(i)}$ [m/s]，その質点が右側のばね・ダンパから受ける反力を $f_\ell^{(i)}$ [N]（左方向を正）とする．後述のように，質点とばね・ダンパの特性は，ラプラス変換上で，次式の Y, Z で表すことが出来る．

$$Y = m_0 s, \quad Z = \frac{s}{d_0 s + k_0} \quad (1)$$

システムの上下は，壁に固定されたばね $\alpha_{1,n} k_0$ とダンパ $\alpha_{1,n} d_0$ ($0 \leq \alpha_1, \alpha_n \leq 1$) に結合されているとする．これらのばね・ダンパの動特性は，システムのばね・ダンパの定数倍 ($Z/\alpha_{1,n}$) であり， $\alpha_1 = 0, \alpha_n = 1$ などとすれば，

上側を自由端、下側を固定端とする状況を、 $\alpha_{1,n} = 0.5$ などとすれば、その中間的な状況も表すことができる。一方、システムの左右は、線形時不変な受動要素に結合されているとする。典型的な状況としては、図に示すような、左端が固定端で、右側にコントローラを設置する状況である。コントローラは、右端の質点の速度 $v_m^{(1)}, \dots, v_m^{(n)}$ を観測し、各質点に力 $f_m^{(1)}, \dots, f_m^{(n)}$ (左方向を正) を入力するものとする。左右の境界条件は交換可能 (左側をコントローラとするなど) であり、また、コントローラを設置しない側は、自由端や自由端と固定端の中間的な特性とすることも可能である。なお、 $n = 1$, $\alpha_{1,n} = 0$ とすれば、本研究のシステムは、従来の単純な単結合マス・ばね・ダンパ系となる。本研究の議論は、従来の単結合マス・ばね・ダンパ系に対する議論の自然な拡張となっている。以降では、 $n \geq 2$ として議論を展開する。

2.2 システムの漸化式と波動解析

図 1 中央の (I) の点での力のつり合いをラプラス変換上で表すと、 $f_{\ell-1}^{(i)} = -(k/s + d)(v_{\ell}^{(i)} - v_{\ell-1}^{(i)}) = -\frac{1}{Z}(v_{\ell}^{(i)} - v_{\ell-1}^{(i)})$ である。したがって、

$$v_{\ell}^{(i)} = v_{\ell-1}^{(i)} - Z f_{\ell-1}^{(i)} \quad (2)$$

を得る。一方、 (ℓ, i) 番目 ($i = 2, \dots, n-1$) の質点の運動方程式は、以下で与えられる。

$$Y v_{\ell}^{(i)} = f_{\ell-1}^{(i)} - f_{\ell}^{(i)} - \frac{1}{Z} (v_{\ell}^{(i)} - v_{\ell}^{(i+1)}) - \frac{1}{Z} (v_{\ell}^{(i)} - v_{\ell}^{(i-1)}) \quad (3)$$

ここで、上式右辺の $f_{\ell}^{(i)}$ を左辺に移動し、式 (2) を用いて、 $v_{\ell}^{(i)}$, $v_{\ell}^{(i+1)}$, $v_{\ell}^{(i-1)}$ を消去すれば、

$$f_{\ell}^{(i)} = \frac{1}{Z} v_{\ell-1}^{(i-1)} - \left(Y + \frac{2}{Z} \right) v_{\ell-1}^{(i)} + \frac{1}{Z} v_{\ell-1}^{(i+1)} - f_{\ell-1}^{(i-1)} + (ZY + 3) f_{\ell-1}^{(i)} - f_{\ell-1}^{(i+1)} \quad (i = 2, \dots, n-1) \quad (4)$$

を得る。 $i = 1, n$ の場合、上端と下端が壁に結合されている ($v_{\ell-1}^{(0, n+1)} = 0$) ことに注意すれば、

$$f_{\ell}^{(1)} = - \left(Y + \frac{1 + \alpha_1}{Z} \right) v_{\ell-1}^{(1)} + \frac{1}{Z} v_{\ell-1}^{(2)} + (ZY + 2 + \alpha_1) f_{\ell-1}^{(1)} - f_{\ell-1}^{(2)} \quad (5)$$

$$f_{\ell}^{(n)} = \frac{1}{Z} v_{\ell-1}^{(n-1)} - \left(Y + \frac{1 + \alpha_n}{Z} \right) v_{\ell-1}^{(n)} - f_{\ell-1}^{(n-1)} + (ZY + 2 + \alpha_n) f_{\ell-1}^{(n)} \quad (6)$$

となる。

$V_{\ell} = [v_{\ell}^{(1)} \dots v_{\ell}^{(n)}]^T$, $F_{\ell} = [f_{\ell}^{(1)} \dots f_{\ell}^{(n)}]^T$ とし、さらにそれらをまとめて、 $X_{\ell} = [V_{\ell}^T, F_{\ell}^T]^T$ とする。それらを用いて、式 (2), および、式 (4), (5), (6) の関係をまとめると、システムの動特性は、ラプラス変換上で 1 階の漸化式

$$X_{\ell} = A X_{\ell-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} X_{\ell-1} = \begin{bmatrix} I_n & -Z I_n \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} X_{\ell-1} \quad (7)$$

で与えられる。ただし、

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -(Y + \frac{\beta'_1}{Z}) & \frac{1}{Z} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{Z} & -(Y + \frac{2}{Z}) & \frac{1}{Z} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{Z} & -(Y + \frac{2}{Z}) & \frac{1}{Z} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{Z} & -(Y + \frac{\beta'_n}{Z}) \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} ZY + \beta_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & ZY + 3 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & ZY + 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & ZY + \beta_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

であり、 $\beta'_{1,n} = 1 + \alpha_{1,n}$, $\beta_{1,n} = 2 + \alpha_{1,n}$ とした。

ブロック要素 A_{ij} は対称行列であり、また、 $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = I$ となっていることに注意すると、

$$A^T J A = J, \text{ ただし, } J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} \quad (9)$$

であることを確認できる。

モビリティ類推（近野，1980；速度 $\leftrightarrow$ 電圧，力 $\leftrightarrow$ 電流の対応）を用いれば，システムを類推回路（LCR 回路）に置き換えて解析することも可能である（例えば，箕土路，長瀬，2019）．その場合， A 行列は，回路の縦続行列に相当する．システムは受動要素のみから構成されているので，類推回路 A は受動回路であり，対応するインピーダンス行列，および，アドミッタンス行列は，正実関数となる（Anderson and Vongpanitlerd, 1973）．

波動解析では，係数行列の固有値解析により漸化式 (7) の対角化を行い，調和解析を適用することで，変換後の変数の波としての性質を議論する．固有ベクトルを並べた変換行列を T とし，変数変換

$$X_\ell = T F_\ell^\pm = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} F_\ell^\pm, \quad \text{ただし, } F_\ell^\pm = [(F_\ell^-)^T, (F_\ell^+)^T]^T \quad (10)$$

を考える．固有値 λ_i がすべて異なるとすると，固有ベクトルは 1 次独立であり，変換後のシステムは，

$$F_\ell^- = \Lambda_1 F_{\ell-1}^-, \quad F_\ell^+ = \Lambda_2 F_{\ell-1}^+, \quad \text{ただし, } \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}) \quad (11)$$

と対角化される． λ_i は，伝搬定数と呼ばれる．

節 1.1 でも触れたように， F_ℓ^-, F_ℓ^+ が進行波として解釈できるためには， λ_i が $\mathbb{C}_+$ で解析的な関数として定義でき，またその領域で， $|\lambda_i| > 1$, $|\lambda_{n+i}| < 1$, および， $\arg \lambda_i = -\arg \lambda_{n+i}$ を満たし続けている必要がある．伝搬定数に求められるこれらの性質の詳細については，著者らの前報（箕土路，長瀬，2019，Nagase et al., 2021）などを参照されたい．以降ではまず，この伝搬定数の性質について議論していく．次節は，その準備である．

2.3 特性多項式の漸化式表現

$|A_{12}| \neq 0$ より， A の固有値を与える行列は，

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda I - A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ -(\lambda I - A_{22})A_{12}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} & -A_{12} \\ \bar{A}_{21} & O \end{bmatrix} \quad (12)$$

ただし，

$$\bar{A}_{21} = (\lambda I - A_{22})A_{12}^{-1}(\lambda I - A_{11}) - A_{21} = A_{12}^{-1}\lambda^2 - (A_{12}^{-1}A_{11} + A_{22}A_{12}^{-1})\lambda + A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} - A_{21} \quad (13)$$

と表すことができる．したがって， A の固有値は， $|A_{12}||\bar{A}_{21}|$ ，すなわち，

$$f_n = |\lambda^2 I - (I + A_{22})\lambda + A_{22} + ZA_{21}| = \begin{vmatrix} p_{\beta_1+1} & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & p_4 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda & p_4 & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & p_{\beta_n+1} \end{vmatrix} \quad (14)$$

の根として求まる．ここで，対角要素 p_a は，定数 a により定まる多項式

$$p_a = \lambda^2 - (ZY + a)\lambda + 1 \quad (15)$$

により与えられる． p_a は， λ に関する 2 次の多項式であり，1 次の係数の定数項 a のみに違いを有する． $a = 2$ のときの p_a は，単純な単結合マス・ばね・ダンパ系の特性多項式と一致する． p_a は，次章以降の議論に重要な役割を果たす多項式である．以降では， p_a を基本多項式， a を特性定数と呼ぶこととする．

式 (14) は三重対角行列であり， k 次の小行列式を r_k とすると，最下行での行展開より，次の漸化式が得られる．

$$r_k = p_{\alpha_k} r_{k-1} - \lambda^2 r_{k-2} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (16)$$

ただし， $r_0 = 1$, $r_{-1} = 0$ であり，また，

$$\begin{cases} a_k = 4 & (k = 2, \dots, n-1) \\ a_k = \beta_k + 1 = 3 + \alpha_k & (0 \leq \alpha_k \leq 1) \quad (k = 1, n) \end{cases} \quad (17)$$

である．特性多項式 f_n は， $f_n = r_n$ により与えられる．なお，漸化式 (16) は，数値解析などで用いられる，定数の三重対角行列の特性多項式の漸化式 ($r_k = (\lambda - a_k)r_{k-1} - b_{k-1}^2 r_{k-2}$ の形；森，2002) とは形が異なることに注意する．

3. 伝搬定数の性質

3.1 特性多項式の因数分解表現

本節では， r_k が p_a の積に因数分解できることを示す．まず，以下が成立する．

補題 1 p_a を式 (15) で与えられる， λ の 2 次の多項式とする．与えられた次数 k および定数 $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-2}$ に対し，次式を満たす定数 $c_1, \dots, c_k$ が存在する．

$$p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_k} - \lambda^2 p_{b_1} p_{b_2} \cdots p_{b_{k-2}} = p_{c_1} p_{c_2} \cdots p_{c_k} \quad (18)$$

ただし， $k=1$ の時は， $p_{b_1} p_{b_2} \cdots p_{b_{k-2}} = 0$ ， $k=2$ の時は， $p_{b_1} p_{b_2} \cdots p_{b_{k-2}} = 1$ とする．

証明 $h_a = ZY + a$ とおくと，式 (18) は，

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - h_{a_1} \lambda + 1)(\lambda^2 - h_{a_2} \lambda + 1) \cdots (\lambda^2 - h_{a_k} \lambda + 1) - \lambda^2 (\lambda^2 - h_{b_1} \lambda + 1)(\lambda^2 - h_{b_2} \lambda + 1) \cdots (\lambda^2 - h_{b_{k-2}} \lambda + 1) \\ & = (\lambda^2 - h_{c_1} \lambda + 1)(\lambda^2 - h_{c_2} \lambda + 1) \cdots (\lambda^2 - h_{c_k} \lambda + 1) \quad (19) \end{aligned}$$

と書ける．上式の表現を用いて式 (18) の項を展開し，両辺の係数を次数ごとに等値すると次式を得る（左欄の次数となるように，上式括弧内の項を選ぶ組み合わせを考えれば良い）．なお，下式中の和記号は，各変数のすべての組み合わせに対する和を表すものとする．例えば， $k=3$ の場合， $\sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} = h_{a_1} h_{a_2} + h_{a_1} h_{a_3} + h_{a_2} h_{a_3}$ である ($a_{i_1}, a_{i_2} = \{a_1, a_2, a_3\}$ で， $a_{i_1} \neq a_{i_2}$ となる組み合わせ) ．

$$\begin{aligned} \lambda^{2k} : & 1 = 1 \\ \lambda^{2k-1} : & \sum h_{a_{i_1}} = \sum h_{c_{i_1}} \\ \lambda^{2k-2} : & \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} + {}_k C_1 - 1 = \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} + {}_k C_1 \\ \lambda^{2k-3} : & \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} h_{a_{i_3}} + {}_{k-1} C_1 \sum h_{a_{i_1}} - \sum h_{b_{i_1}} = \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} h_{c_{i_3}} + {}_{k-1} C_1 \sum h_{c_{i_1}} \\ \lambda^{2k-4} : & \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_4}} + {}_{k-2} C_1 \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} + {}_k C_2 - \sum h_{b_{i_1}} h_{b_{i_2}} - {}_{k-2} C_1 = \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_4}} + {}_{k-2} C_1 \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} + {}_k C_2 \\ \lambda^{2k-5} : & \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_5}} + {}_{k-3} C_1 \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} h_{a_{i_3}} + {}_{k-1} C_2 \sum h_{a_{i_1}} - \sum h_{b_{i_1}} h_{b_{i_2}} h_{b_{i_3}} - {}_{k-3} C_1 \sum h_{b_{i_1}} \\ & = \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_5}} + {}_{k-3} C_1 \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} h_{c_{i_3}} + {}_{k-1} C_2 \sum h_{c_{i_1}} \\ \lambda^{2k-6} : & \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_6}} + {}_{k-4} C_1 \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_4}} + {}_{k-2} C_2 \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} + {}_k C_3 - \sum h_{b_{i_1}} \cdots h_{b_{i_4}} - {}_{k-4} C_1 \sum h_{b_{i_1}} h_{a_{i_2}} - {}_{k-2} C_2 \\ & = \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_6}} + {}_{k-4} C_1 \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_4}} + {}_{k-2} C_2 \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} + {}_k C_3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

上式の上側の式を使って，下側の式を順に整理していくと，次式を得る．

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \sum h_{c_{i_1}} &= \sum h_{a_{i_1}} \\ \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} &= \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} - 1 \\ \sum h_{c_{i_1}} h_{c_{i_2}} h_{c_{i_3}} &= \sum h_{a_{i_1}} h_{a_{i_2}} h_{a_{i_3}} - \sum h_{b_{i_1}} \\ \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_4}} &= \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_4}} - \sum h_{b_{i_1}} h_{b_{i_2}} \\ &\vdots \\ \sum h_{c_{i_1}} \cdots h_{c_{i_k}} &= \sum h_{a_{i_1}} \cdots h_{a_{i_k}} - \sum h_{b_{i_1}} \cdots h_{b_{i_{k-2}}} \end{aligned}$$

最後に、上式の関係に $h_a = ZY + a$ を適用し、上の式から順に ZY の項で係数を比較していくと、次式を得る。

$$\begin{aligned}
e_0^{(k)} : & \quad 1 = 1 \\
e_1^{(k)} : & \quad \sum c_{i_1} = \sum a_{i_1} \\
e_2^{(k)} : & \quad \sum c_{i_1} c_{i_2} = \sum a_{i_1} a_{i_2} - 1 \\
e_3^{(k)} : & \quad \sum c_{i_1} c_{i_2} c_{i_3} = \sum a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} - \sum b_{i_1} \\
e_4^{(k)} : & \quad \sum c_{i_1} \cdots c_{i_4} = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_4} - \sum b_{i_1} b_{i_2} \\
& \quad \vdots \\
e_k^{(k)} : & \quad \sum c_{i_1} \cdots c_{i_k} = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_k} - \sum b_{i_1} \cdots b_{i_{k-2}}
\end{aligned} \tag{20}$$

上式から分かるように、 $e_j^{(k)}$ ($j = 1, \dots, k$) は、 c_i ($i = 1, \dots, k$) の j 次基本対称式 ($e_1^{(k)} = \sum c_{i_1} = c_1 + c_2 + \dots + c_k$, $e_2^{(k)} = \sum c_{i_1} c_{i_2} = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{k-1} c_k$, ...) となっている。したがって、 c_i は、 x に関する k 次の多項式

$$g_k = x^k - e_1^{(k)} x^{k-1} + e_2^{(k)} x^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} e_{k-1}^{(k)} x + (-1)^k e_k^{(k)} \tag{21}$$

の根として与えられる ($e_j^{(k)}$ は、 k 次多項式の $(k-j)$ 次の係数)。代数学の基本定理より、根 c_i は (複素数を含め) 必ず存在する。 $\square$

3.2 特性定数の決定多項式

小行列式の漸化式 (16) は、補題 1 の式 (18) の左辺の形をしており、補題 1 を、 $k = 1$ から順に適用していけば、 r_k は c_i を定数とした p_a の積で表せることが分かる。 c_i を定める g_k は、漸化式により表すことが出来る。

定理 1 r_k を式 (16) で与えられる小行列式、 p_a を式 (15) とする。 r_k は、

$$r_k = p_{c_1} p_{c_2} \cdots p_{c_k} \quad (k = 1, \dots, n) \tag{22}$$

のように因数分解できる。式 (22) 中の c_k は、漸化式

$$g_k = (x - a_k) g_{k-1} - g_{k-2}, \quad (k = 1, \dots, n) \tag{23}$$

ただし、 $g_0 = 1, g_{-1} = 0$ 、で与えられる多項式 g_k の根として与えられる。

証明 r_k が式 (22) の形で表せることは既に述べたので、以下では、式 (23) を示す。補題 1 の証明で示したように、 c_k は、式 (21) の g_k の根として与えられる。係数 $e_j^{(k)}$ は、式 (20) であり、この場合の a_{i_j}, b_{i_j} は、式 (16) より、

$$r_k = \underbrace{p_{a_k} r_{k-1}}_{p_{a_1} \cdots p_{a_k}} - \lambda^2 \underbrace{r_{k-2}}_{p_{b_1} \cdots p_{b_{k-2}}} \tag{24}$$

で与えられる。上式における r_{k-1}, r_{k-2} の因数分解の特性定数を定める基本対称式が、 $e_j^{(k-1)}, e_j^{(k-2)}$ と表されることに注意すれば、 $e_j^{(k)}$ は、式 (20) の右辺より、次式で計算することが出来る。

$$\begin{aligned}
e_0^{(k)} : & 1 & = & 1 \\
e_1^{(k)} : & \sum a_{i_1} & = & a_k + e_1^{(k-1)} \\
e_2^{(k)} : & \sum a_{i_1} a_{i_2} - 1 & = & a_k e_1^{(k-1)} + e_2^{(k-1)} - 1 \\
e_3^{(k)} : & \sum a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} - \sum b_{i_1} & = & a_k e_2^{(k-1)} + e_3^{(k-1)} - e_1^{(k-2)} \\
e_4^{(k)} : & \sum a_{i_1} \cdots a_{i_4} - \sum b_{i_1} b_{i_2} & = & a_k e_3^{(k-1)} + e_4^{(k-1)} - e_2^{(k-2)} \\
& \quad \vdots & & \\
e_k^{(k)} : & \underbrace{\sum a_{i_1} \cdots a_{i_k} - \sum b_{i_1} \cdots b_{i_{k-2}}}_{g_k} & = & \underbrace{a_k e_{k-1}^{(k-1)}}_{-a_k g_{k-1}} \underbrace{\quad}_{x g_{k-1}} - \underbrace{e_{k-2}^{(k-2)}}_{g_{k-2}}
\end{aligned} \tag{25}$$

各列の係数の項は、最終行の下に示した多項式の係数となっている（右辺の $a_k g_{k-1}$ の項に負号がついているのは、式 (21) のように、次数が 1 つ増えると係数の符号が反転することによる）。したがって、式 (23) が成立する。 $g_0 = 1, g_{-1} = 0$ は、 $r_1 = p_{a_1}$ より、 $g_1 = (x - a_1)$ であることによる。□

3.3 特性定数の性質

これまでに見たように、伝搬定数は、 r_n の因数分解の項 p_{c_i} の根として求まる。以下で示すように、特性定数 c_i は、2 以上の実数となる。定理の証明には、スツルムの定理（森，2002，など）を用いる。

区間 $[a, b]$ が与えられたとき、次の 4 条件を満たす実係数多項式の列 $q(x), q_1(x), \dots, q_l(x)$ をスツルム列という：

- (i) 区間内の任意の点 x において、 $q_k(x)$ と $q_{k+1}(x)$ は同時に 0 にならない。
- (ii) 区間内のある点 x_0 において、 $q_k(x_0) = 0$ ならば $q_{k-1}(x_0)q_{k+1}(x_0) < 0$ 。
- (iii) 列の最後の多項式 $q_l(x)$ は、区間内において一定の符号をもつ。
- (iv) 区間内のある点 x_0 において $q(x_0) = 0$ ならば、 $q'(x_0)q_1(x_0) > 0$

定理 2（スツルムの定理）実係数多項式の列 $q(x), q_1(x), \dots, q_l(x)$ が、区間 $[a, b]$ でスツルム列をなし、 $q(a)q(b) \neq 0$ とする。このとき、 x を固定して関数値の列、 $q(x), q_1(x), \dots, q_l(x)$ を左から順に見ていった時の符号の変化の数を $N(x)$ とする。方程式 $q(x) = 0$ の区間 $[a, b]$ における解の個数は、 $N(a) - N(b)$ で与えられる。

以下を示すことが出来る。

定理 3 定理 1 の仮定の下で、 A の特性方程式 f_n は、

$$f_n = p_{c_1} p_{c_2} \cdots p_{c_n} \quad (26)$$

と因数分解できる。 c_i ($i = 1, \dots, n$) は相異なる実数で、 $c_i \geq 2$ である。

証明 $f_n = r_n$ が因数分解できることは定理 1 で述べたので、 g_n が $x \geq 2$ に n 個の根をもつことを示す。

はじめに、式 (23) ($g_0 = 1, g_{-1} = 0$) で定義される、 $g_n(x), g_{n-1}(x), \dots, g_0(x)$ が、スツルム列をなすことを示す。まず、 $g_k(x) = g_{k-1}(x) = 0$ が成り立つとすると、 $g_{k-2} = (x - a_k)g_{k-1} - g_k$ より、それ以降の $g_k(x)$ はすべて 0 となるが、これは、 $g_0(x) = 1$ に矛盾するので、(i) が成立する。また、 $g_k(x_0) = 0$ とすると、式 (23) より、 $g_{k+1}(x_0) = -g_{k-1}(x_0)$ を得るので、(ii) が成立する。(iii) は、 $g_0(x) = 1$ より明らかである。(iv) に関しては、

$$\begin{aligned} h_k &:= g'_k g_{k-1} - g_k g'_{k-1} = \{g_{k-1} + (x - a_k)g'_{k-1} - g'_{k-2}\}g_{k-1} - \{(x - a_k)g_{k-1} - g_{k-2}\}g'_{k-1} \\ &= g_{k-1}^2 + g'_{k-1}g_{k-2} - g_{k-1}g'_{k-2} = g_{k-1}^2 + h_{k-1} \end{aligned} \quad (27)$$

を用いる。 $h_1 = g'_1 g_0 - g_1 g'_0 = (x - a_1)' = 1 > 0$ であり、それを上式に適用すれば、 $h_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) である。 $h_n > 0$ に、 $g_n(x_0) = 0$ を適用すると、 $g'_n(x_0)g_{n-1}(x_0) > 0$ を得る。以上より、 $g_n, g_{n-1}, \dots, g_0$ は、スツルム列である。なお、上記の証明は、定数の三重対角行列の特性多項式に対する漸化式がスツルム列をなすことの証明（森，2002）と同様である。

次に、 M を十分大きな正の実数とし、区間 $[2, M]$ での符号の反転回数を調べる。 $x = 2$ とすると、

$$g_0(2) = 1 > 0, \quad g_1(2) = 2 - a_1 < 0 \quad (28)$$

である。 $k = 2, \dots, n-1$ については、 $x = 2$ として式 (23) に $a_k = 4$ を適用すると、 $g_k + g_{k-1} = -(g_{k-1} + g_{k-2})$ であり、したがって、 $g_k + g_{k-1} = (-1)^{k-1}(g_1 + g_0) = (-1)^k(a_1 - 3)$ である。この式を用いて、和 $(g_k + g_{k-1}) - (g_{k-1} + g_{k-2}) + \dots + (-1)^{k-1}(g_1 + g_0)$ を計算すれば、

$$g_k(2) = k(-1)^k(a_1 - 3) - (-1)^{k-1}g_0 = (-1)^k\{(a_1 - 3)k + 1\} \quad (k = 2, \dots, n-1) \quad (29)$$

を得る。 g_n についても、式 (23) の g_{n-1}, g_{n-2} に上式を適用して整理すれば、次式となる。

$$g_n(2) = (2 - a_n)g_{n-1} - g_{n-2} = (-1)^n[(a_1 - 3)\{(a_n - 3)n + (4 - a_n)\} + (a_n - 3)] \quad (30)$$

$3 \leq a_{1,n} \leq 4$ に注意すれば、式 (29) 右辺の中括弧内の項は正である。式 (30) の大括弧内については、 $a_1 = a_n = 3$ の場合を除いて正となる。両式右辺の (-1) の指数が、数列の番号に一致していることに注意すれば、 $3 < a_{1,n} \leq 4$ において、スツルム列の符号の反転回数は、 $N(2) = n$ である。

$a_1 = a_n = 3$ の場合については、 $g_n(2) = 0$ となるので、スツルムの定理の前提条件を満たしていない。この場合、十分小さな $\varepsilon > 0$ を考え、区間の左側を $x = 2 - \varepsilon$ に変更すれば良い。この場合、 $g_0(2 - \varepsilon) = 1 > 0$ 、 $g_1(2 - \varepsilon) = 2 - \varepsilon - a_1 < 0$ である。また、式 (29) より $g_k(2) = (-1)^k$ ($k = 2, \dots, n-1$) であるので、

$$g_k(2 - \varepsilon) = (-2 - \varepsilon)g_{k-1}(2 - \varepsilon) - g_{k-2}(2 - \varepsilon) \simeq (-2 - \varepsilon)(-1)^{k-1} - (-1)^{k-2} \simeq (-1)^k \quad (k = 2, \dots, n-1) \quad (31)$$

$$g_n(2 - \varepsilon) = (-1 - \varepsilon)g_{n-1}(2 - \varepsilon) - g_{n-2}(2 - \varepsilon) \simeq (-1 - \varepsilon)(-1)^{n-1} - (-1)^{n-2} \simeq (-1)^n \varepsilon \quad (32)$$

である。したがって、この場合も、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、 $N(2 - \varepsilon) = n$ となっている。 $g_n(2) = 0$ なので、符号の反転の回数に寄与する解の最小値は $x = 2$ である。

$x = M$ の場合については、 $g_0 = 1 > 0$ 、 $g_{-1} = 0$ であり、

$$g_k(M) = (M - a_k)g_{k-1} - g_{k-2} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (33)$$

を順に計算していけば、 $g_k(M) > 0$ とする十分大きな M が存在する。したがって、 $N(M) = 0$ である。

以上より、 g_n は、区間 $[2, M]$ に n 個の実数根を持つ。 □

3.4 伝搬定数の分離性と変換行列

定理 3 より、波動解析に必要となる、伝搬定数の性質を示すことが出来る。

定理 4 式 (7) で与えられる漸化式の係数行列 A を考える。 A の $2n$ 個の固有値 λ_i (伝搬定数) は、 n 個の組 ($\lambda_i = \lambda_i^-$, $\lambda_{n+i} = \lambda_i^+$) ($i = 1, \dots, n$) に分けることができ、以下を満たすように定義できる。

(i) λ_i^- , λ_i^+ は、 $s \in \mathbb{C}_+$ で解析的である。

また、適当な $s_0 \in \mathbb{C}_+$ において、 $|\lambda_i^-(s_0)| > 1$, $|\lambda_i^+(s_0)| < 1$ である、 λ_i^+ , λ_i^- を選ぶことができ、以下が成立する。

(ii) $\arg \lambda_i^- = -\arg \lambda_i^+$ ($s \in \mathbb{C}_+$)

(iii) $|\lambda_i^-| > 1$, $|\lambda_i^+| < 1$ ($s \in \mathbb{C}_+$)

さらに、 λ_i , λ_j を A の 2 つの固有値とすると、

(iv) $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($s \in \mathbb{C}_+$)

証明 定理 3 より、 A の固有値は、式 (26) の根として与えられる。したがって、固有値は、

$$p_{c_i} = \lambda^2 - (ZY + c_i)\lambda + 1 = 0 \quad (34)$$

により定まる、代数関数の枝 λ_i^- , λ_i^+ ($i = 1, \dots, n$) として定義できる。

(i) 代数関数は、高々、(分母を払って多項式係数の形とした方程式の) 最高次の係数のゼロ点、判別式のゼロ点 (重根をもつ点)、および、無限遠点で特異点をもつ (Ahlfors, 1979)。まず、 Z, Y は、式 (1) であるので、最高次の係数のゼロ点は、 $\mathbb{C}_+$ にはない。また、判別式は、

$$D = (ZY + c_i)^2 - 4 = (ZY + c_i - 2)(ZY + c_i + 2) \quad (35)$$

と因数分解できる。定理 3 より、 $c_i \pm 2 \geq 0$ である。したがって、 $D = 0$ となるのは、 ZY が 0 以下の実数となる時のみであるが、 Z, Y は正実関数であるので、 ZY は $\mathbb{C}_+$ で 0 以下の実数とはならない。したがって、(i) が成立する。

(ii), (iii) $\lambda_i^{+-} = e^{j\theta}$ と仮定し、式 (34) に代入し、整理すると、

$$\cos \theta = (ZY + c_i)/2 \quad (36)$$

を得る。上式が成立するのは、右辺が実数となる時であるが、 ZY は 0 以下の実数とはならないので、 $(ZY + c_i)/2 > 1$ であり、矛盾である。したがって、

$$|\lambda_i^+|, |\lambda_i^-| \neq 1 \quad (s \in \mathbb{C}_+) \quad (37)$$

である．加えて，式 (34) より $\lambda_i^+ \lambda_i^- = 1$ であるので，定理の条件を満たす s_0 を選ぶことが出来る．(ii) に関しては， $\lambda_i^+ \lambda_i^- = 1$ より明らかである．(iii) に関しては，(i) より固有値は連続であるので，(iii) が成立しないとすると， $|\lambda_i^+(s_1)|, |\lambda_i^-(s_1)| = 1$ となる $s_1 \in \mathbb{C}_+$ が存在しなくてはならないが，式 (37) より，そのような s_1 は存在しない．

(iv) (i) より，式 (34) は重根を持たないので， $\lambda_i^+ \neq \lambda_i^-$ ($s \in \mathbb{C}_+$) である．また，異なる c_i, c_j に対する枝が， $\lambda_i = \lambda_j$ を満たすとなると，式 (34) より， $(c_i - c_j)\lambda_i = 0$ を得るが，これは $c_i \neq c_j$ に矛盾する（式 (34) より， $\lambda_i^-, \lambda_i^+ \neq 0$ であることに注意）． $\square$

定理 4 より，伝搬定数は $s \in \mathbb{C}_+$ で解析的であり，その領域で単位円の内部に留まるものと外部に留まるものの組に分離される．また，単位円の内部と外部のそれぞれにある伝搬定数も等しい値をとることはなく，その軌跡は分離されている．これらの性質は，調和解析の有効性ならびに変換後の波の性質を特徴づけるとともに，次節以降で述べる，変換行列と特性アドミッタンスの性質の証明に利用される．

変換行列 T は，上記で得られた固有値より定まる固有ベクトルを並べて構成される．以降では，一般性を損なうことなく，変換行列は， $\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-; \lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+$ に対応する固有ベクトルを，左から順に並べて

$$T = [T_1 \ T_2] = [x_1^- \ \cdots \ x_n^- \mid x_1^+ \ \cdots \ x_n^+] \quad (38)$$

のように構成されているものとする．また，対応する固有値を対角に並べた行列を，

$$\Lambda = \text{block diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \text{ただし,} \quad \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-), \quad \Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+) \quad (39)$$

とする． $AT = T \text{block diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ より，以下の式が成立することに注意する．

$$\begin{bmatrix} A_{11}T_{11} + A_{12}T_{21} & A_{11}T_{12} + A_{12}T_{22} \\ A_{21}T_{11} + A_{22}T_{21} & A_{21}T_{12} + A_{22}T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}\Lambda_1 & T_{12}\Lambda_2 \\ T_{21}\Lambda_1 & T_{22}\Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

固有値と固有ベクトルを上記のように定義すれば，式 (11) で与えられる変換後の変数 F_ℓ^+, F_ℓ^- は， ℓ の正方向と負方向に互いに同じ速度で進む進行波として解釈できる．それらは，変換行列とその逆行列の $s \in \mathbb{C}_+$ での解析性の下で，元の物理変数 V_ℓ, F_ℓ と結び付けられる（式 (10)）．また， T のブロック要素より，もう一つの二次定数である，特性アドミッタンスが定義される

4. 変換行列の性質

4.1 固有ベクトルの表現

変換行列を構成する固有ベクトルについて，以下が成立する．

補題 2 式 (34) で定義される p_{c_i} により定まる A の固有値を λ_i ，固有ベクトルを $x_i = [u^T \ v^T]^T$ とする（簡単のため， u, v の添え字 i は省略）．上側の要素 u は，下側の要素 v を用いて，次式で与えられる．

$$u = \frac{-Z}{\lambda_i - 1} v \quad (41)$$

また， $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ の要素は，以下の漸化式

$$v_{k-1} = -(c_i - a_k)v_k - v_{k+1} \quad (k = n, \dots, 2) \quad (42)$$

ただし， $v_n = 1, v_{n+1} = 0$ ，より与えられる．

証明 固有値と固有ベクトルの関係より，

$$(\lambda_i I - A)x_i = \begin{bmatrix} (\lambda_i - 1)I & ZI \\ -A_{21} & \lambda_i I - A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

が成立する．上側の式より，ただちに，式 (41) を得る．次に，式 (41) を下側の式に代入すると，次式を得る．

$$\left\{ \frac{Z}{\lambda_i - 1} A_{21} + (\lambda_i I - A_{22}) \right\} v = \frac{1}{\lambda_i - 1} \begin{bmatrix} p_{a_1}(\lambda_i) & \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_i & p_{a_2}(\lambda_i) & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda_i & p_{a_{n-1}}(\lambda_i) & \lambda_i \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i & p_{a_n}(\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

上式中の a_k は，式 (17) で与えられる． v_k は，式 (44) の各行から得られる，次式の漸化式を満たす．

$$v_{k-1} = -\frac{p_{a_k}(\lambda_i)}{\lambda_i} v_k - v_{k+1} \quad (k = n, \dots, 2) \quad (45)$$

($v_n = 1, v_{n+1} = 0$)．式 (42) は， $p_{a_k}(\lambda_i)$ 中の a_k 以外の項を， $p_{c_i}(\lambda_i) = 0$ を用いて消去することで求まる． $\square$

4.2 変換行列の正則性

前節の結果を用いると，変換行列に関する次の定理を示すことができる．

定理 5 A の固有値を定理 4 のように選び，また，変換行列 T を，式 (38) のように並べて構成するとする． T, T^{-1} は， $s \in \mathbb{C}_+$ で解析的である．

証明 補題 2 より，変換行列 T を構成する固有ベクトルの要素は，式 (41), (42) で与えられる． $v_n = 1$ より， v_k は定数であるので， v は $\mathbb{C}_+$ で解析的である． u の解析性については， Z と λ_i は $\mathbb{C}_+$ で解析的であり，また， $\lambda_i \neq 1$ であることによる． $x_i = [u^T v^T]^T$ は $\mathbb{C}_+$ で解析的であり，それを並べて構成される T も $\mathbb{C}_+$ で解析的である． T^{-1} の解析性については， T が解析的であれば，その特異点は $|T| = 0$ となる点のみであるが，定理 4(iv) より A の固有値は $\mathbb{C}_+$ ですべて異なるので，固有ベクトルは 1 次独立であり， $|T| \neq 0$ ($s \in \mathbb{C}_+$) となることによる． $\square$

定理 5 より， T と T^{-1} は $\mathbb{C}_+$ で解析的であり，調和解析から得られる進行波の解釈は，物理変数 X_ℓ と変換後の変数 $F_\ell^\pm$ の間で受け継がれる．次の (ii) は，次節で述べる特性アドミッタンスの定義の際に必要な性質である．

系 1 変換行列 T を，式 (10) のようにブロック行列に分割する．定理 5 の仮定の下で，以下が成立する．

- (i) $T_{11}^T T_{21} = T_{21}^T T_{11}, T_{12}^T T_{22} = T_{22}^T T_{12}$ ($s \in \mathbb{C}_+$)
- (ii) T_{11}^{-1}, T_{12}^{-1} は， $s \in \mathbb{C}^+$ で解析的である．

証明 (i) 以下では，第 1 式 $T_{11}^T T_{21} = T_{21}^T T_{11}$ を示す．第 2 式についても同様に示すことができる．

$T_1 = [T_{11}^T \ T_{21}^T]^T$ とする．また， J を式 (9) とする．一般に，正則な行列 A の固有値を λ ，固有ベクトルを x とすると， $1/\lambda$ は A^{-1} の固有値であり，その固有ベクトルは x である ($Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^{-1}x = 1/\lambda x$ による)．したがって， $AT_1 = T_1 \Lambda_1$ であり，また， $A^{-1}T_1 = T_1 \Lambda_2$ である．1 つ目の式の転置を取り，さらに右から JT_1 を掛けると， $T_1^T A^T J T_1 = \Lambda_1 T_1^T J T_1$ を得る．また，2 つ目の式の左から $T_1^T J$ をかけると， $T_1^T J A^{-1} T_1 = T_1^T J T_1 \Lambda_2$ であり，さらに左辺に式 (9) を適用すると， $T_1^T A^T J T_1 = T_1^T J T_1 \Lambda_2$ を得る．得られた 2 つの式の差を取ると，

$$\Lambda_1 P - P \Lambda_2 = 0, \quad \text{ただし, } P = T_1^T J T_1 \quad (46)$$

を得る． P の列展開 (列ベクトルを縦に並べたベクトル) を p とすれば，上式は，クロネッカ積を用いて，

$$(I \otimes \Lambda_1 - \Lambda_2 \otimes I)p = 0 \quad (47)$$

と書き換えられる．係数行列の固有値は Λ_1 と Λ_2 の固有値の差の組み合わせ ($\lambda_i(\Lambda_1) - \lambda_j(\Lambda_2)$) で与えられ (児玉, 須田, 1978)，定理 4 より，それらは 0 とはならない．したがって， $p = 0$ であり， $P = 0$ より，1 つ目の式を得る．

(ii) T は $\mathbb{C}_+$ で解析的であるので, $|T_{11}|, |T_{12}| \neq 0$ ($s \in \mathbb{C}_+$) を示せば良い. 以下では, $|T_{11}| \neq 0$ について示す. $|T_{12}| \neq 0$ についても, 同様にして示すことができる.

ある $s_0 \in \mathbb{C}_+$ において, $T_{11}u = 0$ とする, $u \neq 0$ が存在するとする. 式 (40) の (1,1) 要素から得られる式に対し, 左から $u^T T_{21}^T$, 右から u をかけ, さらに (i) を適用すると,

$$u^T T_{21}^T A_{12} T_{21} u = u^T T_{21}^T T_{11} \Lambda_1 u = u^T T_{11}^T T_{21} \Lambda_1 u = 0 \quad (48)$$

を得る. 左辺の $A_{12} = -Z I_n$ に注意すれば, $T_{21}u = 0$ を得る. $T_{11}u = 0$ と合わせれば, $T_1 u = 0$ を得るが, 定理 5 より T_1 は列フルランクであるので, $u \neq 0$ に矛盾する. したがって, $|T_{11}| \neq 0$ ($s \in \mathbb{C}_+$) である. $\square$

5. 特性アドミッタンスの性質

5.1 波動制御とインピーダンスマッチングコントローラ

右端もしくは左端にコントローラを設置する状況を考え, その入出力関係が, $F_n = K_n V_n$, $F_0 = -K_0 V_0$ で与えられるとする (速度を観測し力を入力する状況. F_0 の負号は, 力の向きが右端と逆向きであることによる). また, T の逆行列を, $U = T^{-1}$ と表す.

境界での波の反射を無くすインピーダンスマッチングコントローラは, 式 (10) より得られる $F_\ell^\pm = U X_\ell$ に, 上記コントローラの表現を代入し, $F_n^- = 0$, もしくは, $F_0^+ = 0$ とすることで得られる. 結果は,

$$K_n = K^+ = -U_{12}^{-1} U_{11} = T_{22} T_{12}^{-1}, \quad -K_0 = -K^- = -U_{22}^{-1} U_{21} = T_{21} T_{11}^{-1} \quad (49)$$

となる. 3 番目の等式の変形には, ブロック行列による逆行列の表現 (児玉, 須田, 1978) より, $U_{11} = T_{11}^{-1} + T_{11}^{-1} T_{12} S^{-1} T_{21} T_{11}^{-1}$, $U_{12} = -T_{11}^{-1} T_{12} S^{-1}$, $U_{21} = -S^{-1} T_{21} T_{11}^{-1}$, $U_{22} = S^{-1}$, ただし, $S = T_{22} - T_{21} T_{11}^{-1} T_{12}$ を用いている. なお, 上式の導出過程においては, T と T_{11}, T_{12} の正則性が仮定されており, それらは, 定理 5, 系 1 により保証されている. K^+, K^- は, 速度 (電圧) から力 (電流) への伝達関数であるので, 特性アドミッタンスと呼ばれる.

5.2 特性アドミッタンスの縦続接続表現

次に, 特性アドミッタンスの類推回路 A の縦続接続による表現を求める. 式 (40) の (1,1) 要素の式を Λ_1 で解いて (2,1) 要素の式に代入し, さらに右から T_{11}^{-1} をかけ, $K = -K^- = T_{21} T_{11}^{-1}$ とおく. また, (1,2) 要素の式を Λ_2 で解いて (2,2) 要素の式に代入し, さらに右から T_{12}^{-1} をかけ, $K = K^+ = T_{22} T_{12}^{-1}$ とおく. 両者は同じ形をしており,

$$K A_{12} K + K A_{11} - A_{22} K - A_{21} = 0 \quad (50)$$

と与えられる. K の 2 次項と 2 つある K の 1 次項の一方を K で因数分解し, その K で解くと, K に関する二つの表現が得られる. それらを漸化式の形で表現すると, 次の 2 式を得る.

$$K_k = (A_{22} K_{k-1} + A_{21}) (A_{12} K_{k-1} + A_{11})^{-1}, \quad K_\eta = (A_{22} - K_{\eta-1} A_{12})^{-1} (K_{\eta-1} A_{11} - A_{21}) \quad (51)$$

上式より, $K^+, -K^-$ が, 上記右辺で与えられる (行列形式の) 1 次分数変換の不動点ともなっていることが分かる.

さらに, 中間変数 $X_{k,\eta} = [V_{k,\eta}^T \ F_{k,\eta}^T]^T$ を導入すれば, 式 (51) は,

$$\begin{cases} X_k = A X_{k-1} \\ F_k = K_k V_k \end{cases}, \quad \begin{cases} X_\eta = A^{-1} X_{\eta-1} \\ F_\eta = K_\eta V_\eta \end{cases} \quad (52)$$

と等価であることが確認できる. A を類推回路の縦続行列とみなせば, $-K_k$ は, A の左側の端子を, アドミッタンスが $-K_{k-1}$ である回路で終端した時のアドミッタンスである. 一方, K_η は, A の右側の端子を, アドミッタンスが $K_{\eta-1}$ である回路で終端した時のアドミッタンスである. これら回路としての解釈の詳細は, 著者らの従来研究 (箕土路, 長瀬, 2018, など) を参照されたい. A は受動回路であるので, 終端アドミッタンスを正実関数の範囲で選べば, $-K_k, K_\eta$ も正実関数となる.

5.3 特性アドミッタンスの正実性

前節の結果と伝搬定数ならびに変換行列の性質を合わせると、以下の定理を示すことが出来る。証明は、多段結合系に対する著者らの従来研究（箕土路，長瀬，2018, 2019）と同様である。

定理 6 定理 4，定理 5 の仮定のもとで，特性アドミッタンス K^+ ， K^- を，式 (49) で定義する。また， K_κ, K_η を，式 (51) とする。

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} -K_\kappa = K^-, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} K_\eta = K^+ \quad (s \in \mathbb{C}_+) \quad (53)$$

が成立する。また， K^+ ， K^- は，正実関数である。

証明 以下では， K^+ について示す。 K^- についても同様に示すことが出来る。

式 (52) の 2 つ目の式に， $A^{-1} = T\Lambda^{-1}U$ ($U = T^{-1}$) を適用すれば，次式である。

$$X_\eta = T\Lambda^{-\eta}UX_0 \quad (54)$$

K^0 を任意の正実関数とし，上式のブロック要素による表現に， $F_0 = K_0V_0 = K^0V_0$ を適用し，整理すれば，

$$K_\eta = \left\{ T_{21}\Lambda_1^{-\eta}(U_{11} + U_{12}K^0) + T_{22}\Lambda_2^{-\eta}(U_{21} + U_{22}K^0) \right\} \left\{ T_{11}\Lambda_1^{-\eta}(U_{11} + U_{12}K^0) + T_{12}\Lambda_2^{-\eta}(U_{21} + U_{22}K^0) \right\}^{-1} \quad (55)$$

を得る。上式右辺の 4 つの項を左から A, B, C, D とおき， $BD^{-1} = T_{22}T_{12}^{-1} = K^+$ に注意して，逆行列補題 $(C+D)^{-1} = D^{-1}\{I - (I+CD^{-1})^{-1}CD^{-1}\}$ を用いて整理すれば，

$$K_\eta = (A+B)(C+D)^{-1} = K^+ - K^+(I+CD^{-1})^{-1}CD^{-1} + AD^{-1}\{I - (I+CD^{-1})^{-1}CD^{-1}\} \quad (56)$$

を得る。なお， $D^{-1} = (U_{21} + U_{22}K^0)^{-1}\Lambda_2^\eta T_{12}^{-1}$ の括弧内の行列の逆行列の存在は，終端アドミッタンス K^0 を任意の正実関数に選べることから保証される。定理 4 より， $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Lambda_1^{-\eta}, \Lambda_2^\eta = 0$ ($s \in \mathbb{C}_+$) であるので，その領域で $A, C, D^{-1} \rightarrow 0$ である。したがって，式 (53) の第 2 式を得る。

前述したように， K^0 が正実関数であれば， K_η ($\eta = 1, 2, \dots$) は正実関数であり，その極限も存在すればまた正実関数である。二つの解析関数は，ある解析的な領域で一致すれば両者は等しい (Ahlfors, 1979)。したがって，式 (53) より， K^+ は正実関数である。□

これまでに見てきたように，左端もしくは右端において，波の反射を無くすインピーダンスマッチングコントローラは， $F_n = K^+V_n$ ， $F_0 = -K^-V_0$ により与えられる。それぞれのコントローラの効果は，システムの類推回路の左端もしくは右端を，アドミッタンスが K^- ， K^+ である回路により終端することと等価である。システムは受動的であるので， K^- ， K^+ が正実関数であるという上記の結果は，インピーダンスマッチングコントローラを用いた閉ループ系の安定性を保証するものになっている。

5.4 インピーダンスマッチングコントローラの実装方法

二次定数から定まる波動制御コントローラは，一般に s の無理関数（無限次元系）となる。そのため，従来研究の多くでは，コントローラの実装に際しては，特定の周波数のみを想定し，そのゲインと位相差の特性のみを実現しているものが多い。一方，任意の周波数の外乱に対応するためには，コントローラを有限次元の伝達関数として実装する必要がある。本節では，その手順について述べる。

コントローラの有理関数近似は，原理的には，適当な周波数を選び，その帯域内の各点において A の固有値解析を数值的に行い，コントローラの周波数応答を求めて利用すれば良い。しかしながら，周波数ごとの数値解析より得られる固有値，固有ベクトルの並びは，関数として計算する場合とは異なり，一般に入れ替わりが生じる。そのため，周波数応答から近似関数を求める際には，各周波数の固有ベクトルの並びを，もとの関数と一致するように並び替える必要がある。特に本研究のような多重結合系では，コントローラの構成に必要な固有ベクトルは n 本あり，その対応を求めるのは一般に困難が伴う。

幸い，本論文で導いた固有値，固有ベクトルの表現は，定理の証明のみならず，インピーダンスマッチングコントローラの構成にも利用できる。その手順は，以下のようにまとめられる（括弧内は， K^- の場合）。

- (i) 式 (21), (25) より g_n を求め, c_i ($i = 1, \dots, n$) を決定する.
- (ii) 式 (34) より, 固有値 λ_i^+ (λ_i^-) を決定する.
- (iii) 式 (41), (42), より, u, v を求め, 固有ベクトル x_i^+ (x_i^-) を決定する.
- (iv) T_2 (T_1) を, 式 (38) のように構成する. K^+ (K^-) は, 式 (49) で与えられる.

上記の結果を利用すれば, 実装のための有理関数近似は, 次の手順で求められる (K^+ の場合で説明).

- (I) システムの周波数特性から近似を行う帯域を定め, その範囲内に, 代表点 $\omega = \omega_1, \dots, \omega_N$ を選ぶ.
- (II) 各 ω_i に対し, 上記 (ii) ~ (iv) を行い, コントローラの周波数応答 $K^+(j\omega_i)$ を求める.
- (III) 近似誤差 $K^+(j\omega_i) - \hat{K}^+(j\omega_i)$ ($i = 1, \dots, N$) が小さくなるように, 有理伝達関数 $\hat{K}^+$ を決定する.

上記 (III) における近似関数 $\hat{K}^+$ の計算には, カーブフィッティング (Levi, 1959) などの手法が利用できる. その際, K^+ は正実関数であるので, 近似関数は, 安定な有理伝達関数の範囲で探索すれば良い. $K^+, \hat{K}^+$ は $\mathbb{C}_+$ で解析的であるので, $\mathbb{C}_+$ における近似誤差の最大値は, 誤差の評価を行う虚軸上に現れることに注意する. また, コントローラを計算機で実装する場合には, 双一次変換などを利用し, $\hat{K}^+$ をパルス伝達関数へ変換すれば良い.

6. 数 値 例

6.1 シミュレーションの設定

本章では, これまでの解析結果の妥当性とインピーダンスマッチングコントローラの振動制御への有効性について, 数値例により検証する.

本数値例では, 上下および左右方向の質点の数を $n = 4, m = 8$ とし, 左端は壁に固定され, 右端にコントローラを設置するとする (図 1 の状況). また, システムの上側と下側は, ともに開放 ($\alpha_1, \alpha_n = 0$) されているとする (振動が最も顕著となる状況を想定). 各物理定数は, 以降の図が見やすくなるように, 系の固有角振動数が $0.1 \sim 10$ [rad/sec] 程度に分布し, モードのピークが卓越するように, $m_0 = 1$ [kg], $d_0 = 0.01$ [Ns/m], $k_0 = 1$ [N/m] と設定した. 以降の計算には, 制御系設計 CAD MATLAB (Ver. R2007b, MathWorks Inc.) を用いている.

この場合のコントローラは右端に設置されるため, 対応するインピーダンスマッチングコントローラは K^+ である. 本数値例では, 簡単のため, 左右方向の質点の数を $m = 8$ としているが, 任意の m に対し同じコントローラを利用できることに注意する (コントローラは系の繰返しの数に依存しない).

6.2 伝搬定数とインピーダンスマッチングコントローラ

伝搬定数とインピーダンスマッチングコントローラの周波数応答は, 節 5.4 の手順に従い求めることができる. 本数値例では, 近似を行う周波数帯域を, システムの周波数特性 (後述の図 6 参照) から, $0.1 \leq \omega \leq 10$ と選び, 代表点 ω_i は, 対数スケールで等間隔に $N = 1000$ 点を選んだ.

伝搬定数のナイキスト軌跡を, 図 2(a) に示す. 図中, 実線が λ_i^+ を, 破線が λ_i^- を表しており, 同じ特性定数 c_i から得られる根の組を同じ色で示している. また, 図右下には, g_n より求まる c_i の値を示しており, c_i が 2 以上の実数であることが確認できる. 図より, 伝搬定数が単位円の内部と外部に分離され, かつ, 各線が交差しないことが確認できる (分離性). また, 同じ色で示されている各組が, $\lambda_i^- \lambda_i^+ = 1$ を満たすように変化していることも確認できる. 次に, 各周波数 ω_i において, $K^+(j\omega)^* + K^+(j\omega)$ (*は共役転置) の固有値 (実数) をプロットしたものを, 図 2(b) に示す. 図より, 固有値はすべて正の実数であり, K^+ が正実関数としての性質を満たしていることが確認できる.

インピーダンスマッチングコントローラの有理関数近似 $\hat{K}^+(s)$ は, 周波数応答 $K^+(j\omega) \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ にカーブフィッティングなどの手法を適用することで求めることができる. 本数値例では, 近似関数の計算に, MATLAB のコマンド *fitsys* を用いた. 近似関数の探索は, オプションにより安定な伝達関数の範囲に限定した. 近似関数の計算は行列の各列 (各入力) ごとに行い, 近似の次数は, 考慮している周波数範囲で元の周波数応答と近似関数の周波数応答が十分に小さくなるように決定した. 本数値例では, 各列ごとに 23 次の近似関数を用いることとし, それらをまとめ, 最終的に 92 次のコントローラを得た. 元の周波数応答 $K^+(j\omega)$ およびその有理関数近似 $\hat{K}^+(s)$ のゲイン線図を, 図 3 に示す (紙面の節約のため, 上側の要素のみ表示. 下側の要素についても同様). 図中, 実線

Fig. 2 Properties of secondary constants: (a) Nyquist plot of propagation constants. Each pair of the propagation constants ($\lambda_i^+ \lambda_i^- = 1$) is shown in the same color. They are respectively located inside and outside of the unit circle; (b) Eigen values of $(K^+)^* + K^+$ of characteristic admittance. All the eigen values are positive over all the frequency.

Fig. 3 Gain plots of impedance matching controller: The original controller K^+ (solid) and a rational approximation $\hat{K}^+$ with 92nd degree (dashed). Only upper elements are shown for brevity. Both the plots are in good agreement.

(赤)が K^+ 、破線(青)が $\hat{K}^+$ の周波数応答である。図より、両者は良く一致しており、良好な近似が得られていることが確認できる。

6.3 時間応答

次に、インピーダンスマッチングコントローラの制御効果について確認する。はじめに、システムのインパルス応答を、図4に示す。図は、左上 $(\ell, i) = (1, 1)$ の質点にインパルス外力を加えた時の過渡応答の様子である。上側の図(a)は、最上段の行の質点における、振動の伝搬の様子を示している。左上から、左から1番目($\ell = 1$)、3番目、6番目、右端($\ell = 8$)の質点の変位の時間応答であり、破線(青)が無制御時、実線(赤)が制御時の応答である。図より、左端の質点から入射された波が右側の質点へ伝搬し、無制御時の場合、その後その波が両端で反射を繰り返すことで、振動がいつまでも続いていることが確認できる。一方、制御時においては、右端からの波の反射はなく、入射された波が速やかに消滅しているのが確認できる。次に、下側の図(b)は、ある時刻における各質点の変位を縦方向に変換し、等高線として表示したものである。左から、(i) $t = 1.5$ [s], (ii) $t = 4.0$ [s], (iii) $t = 30$ [s]の時の振動の様子であり、上側が無制御時、下側が制御時の応答である。図(i), (ii)より、左上から入射

(a) Time history of mass displacement ($i=1$)

(b) Contour plot

Fig. 4 Impulse response disturbed at the upper-left corner mass: (a) Time history of mass displacement in the top layer. No control (dashed) and wave control (solid). Impulsive wave transmits from the left to right masses. Vibration reflects repeatedly without control, while it is suppressed rapidly by control; (b) Contour plots of mass displacements. The time instants are indicated in (a). Vibration at the upper-left corner (i) gradually transmits to the lower-right (ii). It remains over the region for a great while without control (iii), while it is quieted down by the controller absorbing it.

された波が、右下方向へ伝搬していく様子が確認できる。これらの時刻は、波が右端に伝搬する前であり、無制御時と制御時の応答に差は見られない。一方、そこから暫く時間が経過した図 (iii) では、無制御時には、振動が領域全体に渡って分布しており、その振幅も大きい。制御時には、振動の振幅は領域全体で小さく抑えられているのが確認できる。

次に、調和加振時の定常応答を、図 5 に示す。図は、インパルス応答と同様、左上の質点に正弦波外力を加えた場合の応答であり、ある時刻の質点の変位を面外方向に変換し等高線として図示したものである。左から (i) 2 次モード、(ii) 5 次モードの固有角振動数で加振した場合であり、(iii) は、1 次、2 次、3 次モードの正弦波を加えて同時に与えた場合の結果である。上側が無制御時、下側が制御時の振動の様子である。各図の時刻は、無制御時のモードの形状が顕著に現れる時刻を選んでいる。(i), (ii) の無制御時には、上側の図のような定在波が発生しており、その結果非常に大きな振幅で振動している。制御を行った場合、定在波は発生せず、波が右方向に進行していく様子が確認された。定在波が生じなくなった結果、振動の振幅は非常に小さく抑えられている。インパルス応答でも確認したように、本研究のコントローラは有理伝達関数として実装しており、複数周波数の外乱にも対応できる。結果は図 (iii) であり、この場合も、制御により波が右方向に進行し、それにより高い振動抑制効果が得られていることが確認できる。なお、この場合の無制御時の応答は、加えた振動数のモード形状が時

Fig. 5 Steady state response for harmonic excitation: (i) 2nd mode, (ii) 5th mode, and (iii) 1st+2nd+3rd modes. No control (upper) and wave control (lower). For (i) and (ii), standing waves occur without control, and they cause large vibration amplitude. By control, vibration is absorbed at the right end, and the standing waves do not grow up. The controller is still effective against (iii) the superposition of multiple frequency disturbances.

間とともに切り替わるような応答をする．図の時刻は，1次モードの形状が顕著に現れる時刻を選んでいる．

6.4 周波数応答

システムの周波数応答を，図 6(a) に示す．図はすべて最上段の行の質点の特性であり，左から順に，(i) 左端 ($\ell = 1$)，(ii) 中央付近 ($\ell = 5$)，および，(iii) 右端 ($\ell = 8$) の質点における，力から変位までのゲイン線図である．破線（青）が開ループ，実線（赤）が閉ループ系の特性である．(i) 左端の場合，無制御時に現れていた振動モードのピークが完全に平滑化されており，高い振動抑制効果が確認できる．(ii) 中央付近と (iii) 右端の場合は，左端での波の反射があるため完全な平滑化はなされないが，その場合においても，ゲインのピークは滑らかでその大きさも小さく抑えられているのが確認できる．

最後に，コントローラのロバスト性を検証する．図 6 の下側の図 (b) は，図 (a) の状況において，各質点と各ばね・ダンパの値を，ノミナル値からランダムに ± 20 [%] の範囲内で変動させた場合の特性である（コントローラは固定）．図から分かるように，比較的大きなパラメータ変動に対しても，コントローラは振動抑制効果を保持しているのが確認できる．この結果は，すべてのパラメータが厳密に等しいとは限らない実際のシステムにおいても，波動制御コントローラの適用が期待できることも示唆している．なお，ここでは，紙面の制約上，パラメータの変動範囲を ± 20 [%] とした場合の結果のみを示したが，制御系の安定性は，より大きなパラメータ変動を有するシステムに対しても保証される．ただし，変動が大きくなるにつれ制御性能は徐々に劣化していき，波動制御系としての特性は失われていく．

7. 結 言

本研究では，二次定数の解析関数としての性質に着目した，二次元結合マス・ばね・ダンパ系の波動解析・波動制御について考えた．はじめに，漸化式の導出を行い，係数行列の特性多項式の漸化式表現を導いた．特性多項式は，基本多項式 (λ に関する 2 次の多項式) に因数分解でき，その特性定数は，実係数多項式の根として与えられる．特性定数は 2 以上の実数であり，それにより，伝搬定数は波動解析に必要な条件 ($\mathbb{C}_+$ での解析性，分離性) を満たす．固有ベクトルの要素は，漸化式で表現することができ，それを並べて構成される変換行列およびその逆行列は， $\mathbb{C}_+$ で解析的である．また，インピーダンスマッチングコントローラを与える特性アドミタンス

Fig. 6 Gain plots of open (dashed) and closed (solid) loop systems for top layer masses: (a) Nominal system. From force to displacement of (i) left ($\ell = 1$), (ii) middle ($\ell = 5$), and (iii) right ($\ell = 8$) masses. For (i), the mode peaks are perfectly smoothed out by the controller. Although there are some mild peaks caused by the left end reflection for (ii) and (iii), the mode peaks are drastically reduced by control; (b) Perturbed system. Physical parameters of the system are randomly changed with a perturbation up to $\pm 20\%$. The same controller is used. The controller is still effective for a relatively large perturbation.

は、必ず存在し正実関数である。これらの結果は、調和解析に基づく波動解析に理論的な根拠を与えるとともに、インピーダンスマッチングコントローラを用いた制御系の安定性を保証している。加えて、上記の解析で導いた固有値、固有ベクトルの表現は、インピーダンスマッチングコントローラの実装にも有益である。結果の妥当性と、振動制御への有効性は、 $n \times m = 4 \times 8$ 層のシステムに対する数値例により検証し、良好な結果を確認した。

今後の課題としては、本研究の議論を、今回の二次元結合系がさらに上下に重なった三次元結合系（三次元場）やより一般の多重結合系などへ展開することがある。また、本研究の議論をある種の非一様系（一定比で変化する場合など）へ展開する可能性を検討することや、波動制御コントローラのロバスト性能の定量的な評価手法を確立することも重要である。

文 献

- Ahlfors, L.V., Complex Analysis (1979), McGraw-Hill Book.
- Airolidi, L. and Ruzzene, M., Wave propagation control in beams through periodic multi-branch shunts, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 22, No. 14 (2011), pp. 1567-1579.
- Anderson, B.D.O. and Vongpanitlerd, S., Network Analysis and Synthesis (1973), Prentice Hall.
- Balas, M.J., Active control of flexible systems, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 25, No. 3 (1978), pp. 415-436.
- Brillouin, L., Wave Propagation in Periodic Structures (2003), Dover Publications.
- Duhamel, D., Mace, B.R. and Brennan, M.J., Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures, Journal of Sound and Vibration, Vol. 294, No. 1-2 (2006), pp. 205-220.
- Hong, J., He, X., Zhang, D., Zhang, B. and Ma, Y., Vibration isolation design for periodically stiffened shells by the wave finite element method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 419 (2018), pp. 90-102.

- Iwamoto, H., Tanaka, N. and Hill, S.G., Feedback control of wave propagation in a rectangular panel, Part 1: Theoretical investigation of fundamental characteristics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 39, No. 1–2 (2013), pp. 3–19.
- Levi, E.C., Complex-curve fitting, *IRE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC–4, No. 1 (1959), pp. 37–43.
- Mace, B.R. and Manconi, E., Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4–5 (2008), pp. 884–902.
- MacMartin, D.G. and Hall, S.R., Control of uncertain structures using an H_∞ power flow approach, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 3 (1991), pp. 521–530.
- Matsuda, K. and Fujii, H., On the matched termination for vibration suppression, *Proceedings of Guidance, Navigation, and Control Conference* (1995), pp. 112–121.
- Mei, C., The analysis and control of longitudinal vibrations from wave viewpoint, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, No. 4 (2002), pp. 645–649.
- 箕土路 拓也, 長瀬 賢二, 二段結合を有するマス・ばね・ダンパ系のインピーダンスマッチングコントローラの正実性について, *日本機械学会論文集*, Vol. 84, No. 868 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00302.
- 箕土路 拓也, 長瀬 賢二, 多段結合マス・ばね・ダンパ系の波動解析・波動制御, *日本機械学会論文集*, Vol. 85, No. 873 (2019), DOI:10.1299/transjsme.19-00054.
- Miller, D.W., Hall, S.R. and von Flotow, A.H., Optimal control of power flow at structural junctions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 140, No. 3 (1990), pp. 475–497.
- 森正武, 数値解析 (2002), 共立出版.
- Nagase, K., Doshita, A. and Midoro, T., Analytical properties of secondary constants of uniform and uniformly varying mono-coupled periodic structures, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 146 (2021), 106974.
- 長瀬賢二, 早川義一, 制振モードの変動を考慮した μ 設計による主塔模型のアクティブ制振制御, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 63, No. 607 (1997), pp. 906–913.
- 長瀬賢二, 早川義一, 柔軟構造物のアクティブ振動制御における最近の動向—マス・バネ・ダンパ系にみるモード制御法と波動制御法, *システム/制御/情報*, Vol. 44, No. 5 (2000), pp. 253–258.
- Nagase, K. and Hayakawa, Y., Wave control for a damped mass-spring system by using the cepstrum analysis, *Proceedings of the Fifth International Conference on Motion and Vibration Control*, Vol. 1 (2000), pp. 121–126.
- 長瀬賢二, 中道健太, 多段結合を有するマス・ばね・ダンパ系の波動制御 (基礎理論とテンセグリティ構造体への応用), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol. 79, No. 806 (2013), pp. 3732–3747.
- Nagase, K., Ojima, H. and Hayakawa, Y., Wave-based analysis and impedance matching for ladder networks, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 41, No. 11 (2005), pp. 886–893.
- Nobrega, E.D., Gautier, F., Pelat, A. and Santos, J.M.C.D., Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 79 (2016), pp. 192–202.
- O'Connor, W.J. and Zhu, M., Boundary-controlled travelling and standing waves in cascaded lumped systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 39, No. 1–2 (2013), pp. 119–128.
- Ojima, H., Nagase, K. and Hayakawa, Y., On the analysis of the impedance matching controller for uniformly varying damped mass-spring systems, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 40, No. 3 (2004), pp. 315–321.
- Ojima, H., Nagase, K. and Hayakawa, Y., Wave-based analysis and wave control of damped mass-spring systems – Characterization from propagation constants–, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 38, No. 3 (2002), pp. 239–246.
- 背戸一登, 分布定数系構造物のモデリングとアクティブ振動制御, *計測と制御*, Vol. 37, No. 8 (1998), pp. 546–552.
- Sorokin, S.V., Gautier, F. and Pelat, A., A hierarchy of models of axisymmetric wave propagation in a fluid-filled periodic cylindrical shell composed of high-contrast cells, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 136 (2020), 106487.
- Spadoni, A., Ruzzene, M. and Cunefare, K., Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 8 (2009), pp.

- Spencer, B.F. and Sain, M.K., Controlling buildings: A new frontier in feedback, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 17, No. 6 (1997), pp. 19–35.
- Svensson, J.L., Andersson, P.B.U., Scheuren, J. and Kropp, W., Active scattering control of flexural waves at beam junctions: The influence of beam properties on power flow and control effort, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, No. 3–5 (2008), pp. 418–432.
- 田中信雄, 波動制御によるアクティブ・コントロールと制御理論, 計測と制御, Vol. 32, No. 4 (1993), pp. 326–333.
- Wang, Q., Zhi, Y. and Wang, D., A note on wave control in lumped parameter system, *Computers & Structures*, Vol. 57, No. 1 (1995), pp. 177–181.
- 吉田和夫, 柔軟構造物のモデリングと制御理論, 計測と制御, Vol. 32, No. 4 (1993), pp. 276–283.

References

- Ahlfors, L.V., *Complex Analysis* (1979), McGraw-Hill Book.
- Airolidi, L. and Ruzzene, M., Wave propagation control in beams through periodic multi-branch shunts, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 22, No. 14 (2011), pp. 1567–1579.
- Anderson, B.D.O. and Vongpanitlerd, S., *Network Analysis and Synthesis* (1973), Prentice Hall.
- Balas, M.J., Active control of flexible systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 25, No. 3 (1978), pp. 415–436.
- Brillouin, L., *Wave Propagation in Periodic Structures* (2003), Dover Publications.
- Duhamel, D., Mace, B.R. and Brennan, M.J., Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, No. 1–2 (2006), pp. 205–220.
- Hong, J., He, X., Zhang, D., Zhang, B. and Ma, Y., Vibration isolation design for periodically stiffened shells by the wave finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 419 (2018), pp. 90–102.
- Iwamoto, H., Tanaka, N. and Hill, S.G., Feedback control of wave propagation in a rectangular panel, Part 1: Theoretical investigation of fundamental characteristics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 39, No. 1–2 (2013), pp. 3–19.
- Levi, E.C., Complex-curve fitting, *IRE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-4, No. 1 (1959), pp. 37–43.
- Mace, B.R. and Manconi, E., Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, No. 4–5 (2008), pp. 884–902.
- MacMartin, D.G. and Hall, S.R., Control of uncertain structures using an H_∞ power flow approach, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 3 (1991), pp. 521–530.
- Matsuda, K. and Fujii, H., On the matched termination for vibration suppression, *Proceedings of Guidance, Navigation, and Control Conference* (1995), pp. 112–121.
- Mei, C., The analysis and control of longitudinal vibrations from wave viewpoint, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 124, No. 4 (2002), pp. 645–649.
- Midoro, T. and Nagase, K., On the positive real property of the impedance matching controller for double cascade-connected damped mass-spring systems, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol. 84, No. 868 (2018), DOI:10.1299/transjsme.18-00302.
- Midoro, T. and Nagase, K., Wave analysis and control of multiple cascade-connected damped mass-spring systems, *Transactions of the JSME (in Japanese)*, Vol. 85, No. 873 (2019), DOI:10.1299/transjsme.19-00054.
- Miller, D.W., Hall, S.R. and von Flotow, A.H., Optimal control of power flow at structural junctions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 140, No. 3 (1990), pp. 475–497.
- Mori, M., *Numerical Analysis* (2002), Kyoritsu Shuppan (in Japanese).
- Nagase, K., Doshita, A. and Midoro, T., Analytical properties of secondary constants of uniform and uniformly varying mono-coupled periodic structures, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 146 (2021), 106974.
- Nagase, K. and Hayakaya, Y., Active vibration control of a bridge tower model considering the variation of controlled modes by μ synthesis, *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 63, No. 607 (1997),

- pp. 906–913 (in Japanese).
- Nagase, K. and Hayakawa, Y., Trends in active vibration control of flexible structures –Modal control and wave control for a damped mass-spring system, *Systems, Control and Information*, Vol. 44, No. 5 (2000), pp. 253–258 (in Japanese).
- Nagase, K. and Hayakawa, Y., Wave control for a damped mass-spring system by using the cepstrum analysis, *Proceedings of the Fifth International Conference on Motion and Vibration Control*, Vol. 1 (2000), pp.121–126.
- Nagase, K. and Nakamichi, K., Wave control of multiple cascade-connected damped mass-spring systems (Basic theory and its application to tensegrity structures), *Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 79, No. 806 (2013), pp. 3732–3747 (in Japanese).
- Nagase, K., Ojima, H. and Hayakawa, Y., Wave-based analysis and impedance matching for ladder networks, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 41, No. 11 (2005), pp. 886–893.
- Nobrega, E.D., Gautier, F., Pelat, A. and Santos, J.M.C.D., Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 79 (2016), pp. 192–202.
- O'Connor, W.J. and Zhu, M., Boundary-controlled travelling and standing waves in cascaded lumped systems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 39, No. 1–2 (2013), pp. 119–128.
- Ojima, H., Nagase, K. and Hayakawa, Y., On the analysis of the impedance matching controller for uniformly varying damped mass-spring systems, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 40, No. 3 (2004), pp. 315–321.
- Ojima, H., Nagase, K. and Hayakawa, Y., Wave-based analysis and wave control of damped mass-spring systems – Characterization from propagation constants–, *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 38, No. 3 (2002), pp. 239–246.
- Seto, K., Modeling of structures with distributed parameter and active vibration control, *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 37, No. 8 (1998), pp. 546–552 (in Japanese).
- Sorokin, S.V., Gautier, F. and Pelat, A., A hierarchy of models of axisymmetric wave propagation in a fluid-filled periodic cylindrical shell composed of high-contrast cells, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 136 (2020), 106487.
- Spadoni, A., Ruzzene, M. and Cunefare, K., Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 8 (2009), pp. 979–990.
- Spencer, B.F. and Sain, M.K., Controlling buildings: A new frontier in feedback, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 17, No. 6 (1997), pp. 19–35.
- Svensson, J.L., Andersson, P.B.U., Scheuren, J. and Kropp, W., Active scattering control of flexural waves at beam junctions: The influence of beam properties on power flow and control effort, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, No. 3–5 (2008), pp. 418–432.
- Tanaka, N., Active wave control of distributed parameter systems and the control theory, *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 32, No. 4 (1993), pp. 326–333 (in Japanese).
- Wang, Q., Zhi, Y. and Wang, D., A note on wave control in lumped parameter system, *Computers & Structures*, Vol. 57, No. 1 (1995), pp. 177–181.
- Yoshida, K., Modeling and control theory for flexible structures, *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 32, No. 4 (1993), pp. 276–283 (in Japanese).