紡績単糸の強伸度について*

(第3報) 繊維性質のむらが紡績単糸の強伸度に及ぼす影響

(昭和35年3月21日受理) 会 員 久 間 秀 彦**

摘 要

研究目的

繊維性質のむらが糸の強伸度にいかなる影響をおよぼすかを考察する。

研究結果

(1) 集束試験により得られる繊維の平均切断強伸度を G'_b , q'_b , 各繊維の強伸度の算術平均値を σ_B , m とすれば

$$G'_b = \eta'_1 \sigma_B, \quad q'_b = z'_1 m \quad \eta'_1 < 1, \quad z'_1 < 1$$

なお η'_1 , z'_1 は m , σ'_e , $\bar{a}_t$, $\bar{b}_t$ により定まり, σ'_e は繊維の切断伸度にむらがあり, また束中で一様に引揃えられないことによる束中の繊維の見かけの切断伸度の分散, $\bar{a}_t$, $\bar{b}_t$ は繊維の強伸度曲線に関する定数である。

(2) 最適より係数以前において繊維性質にむらがある場合の繊維切断率 λ を生ずるに必要な糸の切断時における外周繊維のより角度 θ'_{R1b} と繊維性質にむらがない場合に $\lambda = \bar{\lambda}$ の繊維切断率を生ずるに必要な第1報より求め得る θ_{R1b} の間には近似的に次の関係があり $\theta'_{R1b} > \theta_{R1b}$ である。

$$F(\theta'_{R1b})/F(\theta_{R1b}) = \{1 - (1 + \bar{\lambda}) \bar{t}'_b \sigma'_e/2\} \{1 - F(\bar{t}'_b) - \bar{t}'_b f(\bar{t}'_b)\} / \{1 - F(\bar{t}'_b)\}^2$$

ただし $F(\theta) = 1 + 2 \log(\cos \theta) / \tan^2 \theta$

$\bar{t}'_b$: 次式より定められる数

$$m/\sigma'_e + \bar{a}_t/\bar{b}_t \sigma'_e = \sqrt{2\pi} (1 - \int_{-\infty}^{\bar{t}'_b} e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}) / e^{-(\bar{t}'_b)^2/2} - \bar{t}'_b$$

なお特に混紡をしない通常の紡績糸に対しては繊維性質にむらがない場合と同様に $\bar{\lambda} = 0.95$ として近似的に最適より係数を求める。

(3) 繊維の切断強伸度を G'_b , q'_b とすれば糸の切断強伸度は繊維性質にむらがない場合と同様に取扱い得る。

1. 緒 言

第1, 2報において^{1,2)} 物理的性質および形状にむらのない繊維からなる糸むらのない紡績単糸の強伸度について考察したが, 実際の糸においてはこれを構成する繊維は強伸度等の物理的性質および長さ, 太さ等の形状においてむらを有し, また糸むらをも有する。繊維の物理的性質および形状のむらが糸の強伸度にいかなる影響を及ぼすかについては³⁾ R. R. Sullivan, M. M. Platt 等の報告があるが, まだ不十分の点があるので, この影響を本報にて考察した。

2. 解析のための仮定

ここでは繊維性質の中, 繊維の比重と摩擦係数におい

てはむらはないが, 繊維長, 断面積, 単位面積当たりの強さはむらを有し, かつ互いに独立な確率変数であるとする。なお切断伸度もむらを有し, 単位面積当たりの強さとは相関々係を有するが他の因子とは互いに独立な確率変数であるとする。なおこの場合糸むらについては考察せず, 各繊維は糸内に一様に分布し糸断面中の繊維数および繊維の糸軸に対する平均の傾斜角は糸の全長にわたりむらがないとする。

3. 解析のための記号

解析のために符号を次のように定めた。なおその他の符号は第1, 2報と同様である。^{1,2)}

$\bar{A}$: 各繊維の横断面積の平均値

* Strength and Elongation of a Single Staple Yarn. Part 3: Single Staple Yarn Composed of Fibers Having Irregular Physical Properties. (第1報 13巻 5号, 第2報 13巻 8号所載)

** H. Kuma, Member. 信州大学繊維学部

$a_i, b_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$: 各繊維の強伸度曲線に関する定数およびその平均値
 $F(\varepsilon_b), f(\varepsilon_b)$: 繊維の切断伸度の分布関数および密度関数
 G, G_b : 一様に引揃えられた繊維束中の繊維 1 本当たりの任意のひずみに対する平均張力および平均切断強力
 G', G'_b : 一様に引揃えられていない繊維束中の繊維 1 本当たりの任意のひずみに対する平均張力および平均切断強力
 $\bar{G}'_b$: 糸中の繊維の糸切断時における平均切断強力
 $\bar{G}'_{bs}$: 糸の切断時における糸切断面上の各繊維部分の張力の平均値
 $H(t)$: t の関数
 L_{i0} : ひずみを受けない各繊維の繊維長
 $l_i, \bar{L}$: ひずみを受けた各繊維の繊維長, およびその平均値
 $\bar{L}_{a0}, \bar{L}_0$: 両毛房およびしのステープル ダイアグラムにおける平均繊維長
 $l_{cl}, \bar{l}_{cl}$: 各繊維の critical length およびその平均値
 m : 繊維の切断伸度 ε_{bi} の算術平均値
 N_B : 繊維束の断面中の繊維数
 Q_S : しの長さ
 q, q_b : 一様に引揃えられた繊維束の任意の伸度および切断伸度
 q', q'_b : 一様に引揃えられない繊維束の任意の伸度および切断伸度
 $\bar{q}_b$: 糸中の繊維の糸切断時における平均切断伸度
 T_i, T_{bi} : 各繊維の任意のひずみに対する張力および切断強力
 t, t_b, t'_b : $(q-m)/\sigma_\varepsilon, (q_b-m)/\sigma_\varepsilon, (q'_b-m)/\sigma'_\varepsilon$
 w_0 : ひずみを受けない繊維束の試長
 $\Delta w_{0i}, \Delta w_0$: ひずみを受けない繊維束中の各繊維試長の偏差および最大偏差
 $X=f(L)$: 繊維張力ダイアグラム
 x_i : 両毛房ステープル ダイアグラムにおける長さ L_{i0} の繊維数
 Y, Y_b : 一様に引揃えられた繊維束の任意のひずみに対する張力および切断強力
 Y', Y'_b : 一様に引揃えられない繊維束の任意のひずみに対する張力および切断強力
 $y_b, \bar{y}_i$: 各繊維の周長, およびその平均値
 Z : 繊維の代表的強伸度曲線における任意のひずみに対する張力
 z_1, z'_1 : $q_b/m, q'_b/m$

z_i : 長さ Q_S のしの中の長さ l_{i0} の繊維数
 α' : 構成繊維の性質にむらがある糸断面の繊維の充実度
 β' : 構成繊維の性質にむらがある糸中の圧力に関する定数
 γ' : 構成繊維の性質にむらがある糸中の繊維の有効接触比
 δ_i : 各繊維横断面の単位面積当たりの強さ
 $\varepsilon_i, \varepsilon_{bi}$: 各繊維の任意のひずみおよび切断伸度
 ε'_{bi} : 一様に引揃えられていない繊維束中の各繊維の見かけの切断伸度
 η_1, η'_1 : $G_b/\sigma_B, G'_b/\sigma_B$
 $\theta'_{R10}, \theta'_{R20}, \theta'_{R30}$: 構成繊維の性質にむらがある糸がひずみを受けないときの最適より係数以前, 最適より係数, 最適より係数以後の糸の外周における繊維のより角度
 $\theta'_{R1b}, \theta'_{R2b}, \theta'_{R3b}$: 構成繊維の性質にむらがある糸の切断時における最適より係数以前, 最適より係数最適より係数以後の糸の外周における繊維のより角度
 $\cos \theta'_{r1b}, \cos \theta'_{r2b}, \cos \theta'_{r3b}$: 構成繊維の性質にむらがある糸の切断時における最適より係数以前, 最適より係数, 最適より係数以後の糸中の繊維の糸軸に対する傾斜の平均値
 λ_i : l_{cl} が同一である繊維の切断率
 $\bar{\lambda}$: 構成繊維の性質にむらがある糸の繊維切断率
 $\sigma_\varepsilon, \sigma_{\varepsilon'}, \sigma_w$: $\varepsilon_{bi}, \varepsilon_{bi'}, \Delta w_{0i}/w_0$ の標準偏差
 σ_B : 繊維切断強力³⁾の算術平均値

4. 繊維束における繊維の平均の強伸度

糸の切断時における繊維の切断状態は, 繊維束の切断状態と類似であることはすでに認められ, 繊維束の強伸度についての研究はすでに二, 三^{3,4)}見られるが, まだ不十分の点があるのでこれを考察する。

一般に切断強力および切断伸度がそれぞれ T_{bi}, ε_{bi} の N_B 本の繊維を束にして切断した場合の繊維束の強力は T_{bi} の算術平均値を σ_B としたとき $N_B \sigma_B$ 以下であることはすでに認められている。これは各繊維の切断伸度 ε_{bi} にむらがあるために繊維束が繊維束の切断伸度 q_b に達したときに束中のある繊維は $\varepsilon_{bi} < q_b$ のためにすでに切断し, ある繊維は $\varepsilon_{bi} > q_b$ のためにまだ切断強力 T_{bi} に達していないためである。これについては M. M. Platt³⁾ 等が繊維の切断伸度 ε_{bi} は正規分布をなすとしてその分布関数を近似的に ε_{bi} の 2 次式で表わして繊維束の強力が繊維の強伸度曲線および ε_{bi} の分布状態により

いかに変化するかを示したが、ここでは ε_{bl} の分布関数に近似式を用いず次のように求めた。

すなわち繊維束中の N_B 本の繊維の強伸度曲線は切断点の近傍において次のごとくに表わされるとする。

$$T_i = a_i + b_i \varepsilon_i \quad i=1, 2, \dots, N_B$$

また繊維の切断伸度 ε_{bl} は平均値 m ，標準偏差 σ_ε の正規分布をなすとする。すなわち密度関数 $f(\varepsilon_b)$ 分布関数 $F(\varepsilon_b)$ はそれぞれ次の通りである。

$$f(\varepsilon_b) = e^{-\frac{(\varepsilon_b - m)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} / \sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon$$
$$F(\varepsilon_b) = \int_{-\infty}^{(\varepsilon_b - m)/\sigma_\varepsilon} e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}$$

またある伸度 ε における各繊維の張力の算術平均値 Z を示す繊維の代表的強伸度曲線は次式に示される。

$$Z = \overline{a_i} + \overline{b_i} \varepsilon \dots\dots\dots (1)$$

繊維束がある伸度 q に達したとき，束中の繊維 N_B 本中 $N_B F(q)$ 本はすでに切断していると考えられるのでこの繊維束の張力 Y は

$$Y = N_B Z \{1 - F(q)\} \dots\dots\dots (2)$$

したがってこのときの繊維束中の繊維 1 本当たりの平均張力 G は

$$G = Z \{1 - F(q)\} \dots\dots\dots (3)$$

この G を一様に引揃えられた繊維束中の繊維 1 本当たりの平均張力と称する。

なお $dY/dq=0$ の条件より Y の極大値を求めれば $q + \overline{a_i}/\overline{b_i} = \{1 - F(q)\}/F'(q) \dots\dots\dots (4)$

なお $t = (q - m)/\sigma_\varepsilon \dots\dots\dots (5)$ と置けば (4) より

$$m/\sigma_\varepsilon + \overline{a_i}/\overline{b_i} \sigma_\varepsilon = \sqrt{2\pi} \left(1 - \int_{-\infty}^t e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}\right) / e^{-t^2/2} - t \dots\dots\dots (6)$$

この式の右辺は t の関数であり，正規分布表より求め得るものである。これを $H(t)$ と置く。

$$\sqrt{2\pi} \left(1 - \int_{-\infty}^t e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}\right) / e^{-t^2/2} - t = H(t) \dots\dots\dots (7)$$

(6) において左辺は繊維の強伸度曲線および切断伸度の分布状態より求め得るものであり，したがってあらかじめ $H(t)$ 曲線を求めて置けば容易に所要の t を求め得る。いまこの t の値を t_b と置けば，繊維束の切断伸度 q_b は (5) より求め得る。

$$q_b = m + t_b \sigma_\varepsilon \dots\dots\dots (8)$$

この q_b を一様に引揃えられた繊維束中の繊維の切断

伸度と称する。

この一様に引揃えられた繊維束の切断強力を Y_b ，束中の繊維 1 本当たりの平均切断強力を G_b とすれば

$$Y_b = N_B (\overline{a_i} + \overline{b_i} q_b) \{1 - F(q_b)\} \dots\dots\dots (9)$$

$$G_b = (\overline{a_i} + \overline{b_i} q_b) \{1 - F(q_b)\} \dots\dots\dots (10)$$

以上述べた通り切断強伸度の算術平均値が，それぞれ σ_B ， m である各繊維は束中においては G_b ， q_b の平均切断強伸度を示す。したがって G_b/σ_B および q_b/m をそれぞれ一様に引揃えられた繊維束中の繊維切断強伸度の効率とし，それぞれ η_1 ， z_1 にて示せば

$$\eta_1 = (\overline{a_i} + \overline{b_i} q_b) \{1 - F(q_b)\} / (\overline{a_i} + \overline{b_i} m) = \{1 - F(t_b)\}^2 / 1 - F(t_b) - t_b f(t_b) \dots\dots\dots (11)$$

$$z_1 = 1 + t_b \sigma_\varepsilon / m \dots\dots\dots (12)$$

なお繊維束中の各繊維は実際において束中で一様に引揃えられることは不可能であり，繊維の試長に偏差があると考えられる。

したがってひずみを受けない繊維束の試長 w_0 に対し繊維の試長に最大 $\pm \Delta w_0$ の偏差があり，またこの範囲で一様分布をしていると仮定して，この場合の繊維束の強伸度を求めて見る。

まず繊維束が q' のひずみを受けたときに束中の任意の繊維の受けるひずみ ε_i は，この繊維の試長が $w_0(1 + \Delta w_{0i}/w_0)$ であったとすると $\Delta w_{0i}/w_0 \leq 1$ のときに次式が成立する。

$$\varepsilon_i = (q' - \Delta w_{0i}/w_0) / (1 + \Delta w_{0i}/w_0) \approx q' - \Delta w_{0i}/w_0$$
$$\therefore T_i = a_i + b_i (q' - \Delta w_{0i}/w_0)$$

ゆえに繊維束の任意のひずみ q' に対する繊維束中の各繊維の張力の算術平均値 Z を示す繊維の代表的強伸度曲線は次式で示される。

$$Z = E(a_i) + E \{b_i (q' - \Delta w_{0i}/w_0)\}$$
$$b_i \text{ と } \Delta w_{0i} \text{ は独立であり } \overline{\Delta w_{0i}} = 0 \text{ なるゆえ}$$
$$Z = \overline{a_i} + \overline{b_i} q' \dots\dots\dots (13)$$

上式は (1) 式と同一であり，代表的強伸度曲線は変わらない。またこのときの繊維束の強力 Y' ，繊維束中の繊維 1 本当たりの平均張力 G' は (2)，(3) 式と同様に次式で表わされる。

$$Y' = N_B Z \{1 - F(q')\} \dots\dots\dots (14)$$

$$G' = Z \{1 - F(q')\} \dots\dots\dots (15)$$

また切断伸度が ε_{bi} である繊維は束中において次の見かけの切断伸度 ε'_{bi} を持つ。

$$\varepsilon'_{bi} = \varepsilon_{bi} + \Delta w_{0i}/w_0$$

したがって ε'_{bi} ， ε_{bi} ， $\Delta w_{0i}/w_0$ の分散をそれぞれ

$\sigma_{e'}^0, \sigma_e^0, \sigma_w^0$ とすれば

$$\sigma_{e'}^0 = \sigma_e^0 + \sigma_w^0$$

しかるに Δw_0 は一様分布をしているとの仮定により

$$\sigma_w^0 = (\Delta w_0)^2/3 w_0^2$$

ϵ_{bt} の分散 σ_e^0 は与えられているので

$$\sigma_{e'}^0 = \sigma_e^0 + (\Delta w_0)^2/3 w_0^2 \dots\dots\dots (16)$$

したがって、繊維束の強力を最大ならしめる切断伸度を q'_b とすれば (8) 式より

$$q'_b = m + t'_b \sigma_{e'} \dots\dots\dots (17)$$

ただし t'_b は (6), (7) 式より次式で求め得る。

$$m/\sigma_{e'} + a_i/b_i c_{e'} = H(t'_b) \dots\dots\dots (18)$$

このときの繊維束の切断強力を Y'_b , 束中の繊維 1 本当たりの平均切断強力を G'_b とすれば (9), (10) 式と同様に

$$Y'_b = N_B (a_i + b_i q'_b) \{1 - F(q'_b)\} \dots\dots\dots (19)$$

$$G'_b = (a_i + b_i q'_b) \{1 - F(q'_b)\} \dots\dots\dots (20)$$

繊維束中の繊維切断強伸度の効率をそれぞれ $\eta'_1 z'_1$ とすれば (11), (12) 式と同様に

$$\eta'_1 = \{1 - F(t'_b)\}^2 / 1 - F(t'_b) - t'_b f(t'_b) \dots\dots\dots (21)$$

$$z'_1 = 1 + t'_b \sigma_{e'}/m \dots\dots\dots (22)$$

5. 最適より係数以前の糸の強伸度

5・1 切断繊維とすべり繊維

繊維性質にむらがない場合の切断繊維とすべり繊維については第 1 報にて繊維長 L と critical length l_{ci} が与えられれば容易に求め得ることを述べたが、繊維性質にむらがある場合について次に述べる。

個々の繊維の繊維長を L_{i0} , 周長を γ_i , 単位面積当たりの強さを δ_i とすれば、仮定により L_{i0} は γ_i および δ_i とは独立であるから $\gamma_i \times \delta_i$ の値が同一である繊維の繊維長分布は糸中の全繊維の繊維長分布と同一である。しかして $\gamma_i \times \delta_i$ が同一である繊維は同一の糸中の圧力 $\bar{p}$ の下ではすべて等しい critical length l_{ci} を持つことは第 1 報 (12) 式より定数 α, β, γ は繊維性質にむらがある場合には α', β', γ' になるとすれば、次のように示される。

$$l_{ci} = 2 T_{bi} / \beta' \gamma' \mu \bar{p} \gamma_i = \gamma_i \delta_i / 2 \pi \beta' \gamma' \mu \bar{p} \dots\dots (23)$$

いま紡績糸内の繊維は完全に均斉に配列しているとし張力が零のときに長さが L_{i0} の繊維は糸の切断時に L_i になるとすれば、その配列状態は第 1 図に表わされる。この図はまた近似的に $\gamma_i \times \delta_i$ の値が同一である繊維の糸中での配列状態をも表わす。

AA: 任意の断面 L_i : 繊維の長さ
 x_i : 両毛房における長さ L_i の繊維数

(第 1 図)

この図において紡績糸の任意の断面 AA における内力は AA 線上における各繊維の内力の総和である。断面 AA における糸の内力に影響を及ぼす繊維は第 1 図において斜線を付した繊維のみである。また単繊維の内力の分布は第 1 報にて述べた通り繊維の中央に対称であるので、内力に関係する長さにのみ着目すれば第 1 図の 2 重斜線の部分のみを考慮すればよい。これを配列し変えれば第 2 図となる。

(第 2 図)

いま $\gamma_i \times \delta_i$ の値が同一の繊維について着目すれば、 l_{ci} は同一であるので第 2 図の斜線の部分の繊維は切断し残りの繊維は滑脱するはずである。明らかに第 2 図の繊維よりできるダイアグラムは片毛房ステープルダイアグラムの縦軸を $1/2$ に縮小したものであり、これを繊維張力ダイアグラムと称する。このダイアグラムにおいて $L = l_{ci}$ の横座標が l_{ci} が同一である繊維について切断繊維の本数比 λ_i を与える。これは片毛房ステープルダイアグラムにおいて $L = 2 l_{ci}$ の横座標に等しい。これを第 3 図に示す。

いま、繊維張力ダイアグラムを $X = f(L)$ にて示せば $\lambda_i = f(l_{ci})$ である。したがって糸断面中のすべての繊維に対する繊維切断率の平均値 $\bar{\lambda}$ は通常次のように表わされる。

$$\bar{\lambda} = E \{ f(l_{ci}) \}$$

(1) 片毛房ステープル ダイアグラム
(2) 繊維張力ダイアグラム
(第 3 図)

$f(l_{ei})$ は l_{ei} の一次関数ではないが繊維切断率 $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲では近似的に一次関数と見なしてさしつかえない。したがって $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲、すなわち最適より係数の近傍においては次式が成立する。

$$\bar{\lambda} = E \{ f(l_{ei}) \} \approx f(\bar{l}_{ei}) \quad (24)$$

$$\bar{l}_{ei} = \bar{y}_i \bar{\delta}_i / 2 \pi \beta' \gamma' \mu \bar{p} \quad (25)$$

上式は、また糸の切断時における片毛房ダイアグラムにおいて $L = 2\bar{l}_{ei}$ の横座標が $\bar{\lambda}$ を与えることを示すがこれを第 4 図に示した。また通常の片毛房ダイアグラム

(第 4 図)

の $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲の近似的な一次関数は第 4 図に示すように、このダイアグラムが横軸と交る点において、このダイアグラムに引いた接線にて示し得る。

この接線と縦軸との交点は切断伸度を受けている糸中の全繊維の平均繊維長を示す。したがってこの平均繊維長を $\bar{L}$ にて示せば第 4 図より明らかに

$$\bar{\lambda} \approx 1 - 2\bar{l}_{ei}/\bar{L} \quad (26)$$

上式は第 1 報 (13) 式と同形であり $\bar{\lambda}$, $\bar{l}_{ei}$ および $\bar{L}$ 間の関係は $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲では繊維性質にむらがない場合と同様であることを示す。

なお繊維張力ダイアグラム $X=f(L)$ を求めるに必要な糸の切断時の片毛房ステープル ダイアグラムと通常得られる繊維張力が零の場合の片毛房ステープル ダイアグラムとの関係は非常に複雑であるが、各繊維の切断伸度を一様に次節 (28) 式に示す $\overline{q_b'}$ であるとして、この両ステープル ダイアグラムの縦軸間に $1:(1+\overline{q_b'})$ の関係があるとする。

5・2 糸の切断時における繊維の平均切断強伸度
繊維性質にむらがある場合も糸中の繊維は第 1 報第 3・3 節に述べたように、第 5 図に示す等脚台形型の張力分布型をとると考えられるが、 L_i および l_{ei} が各繊維により異なるために張力分布型である台形はいずれの繊維に対しても同一であるとは限らない。しかし各繊維が糸中で一様に引揃えられているときは、糸がひずみを受けるにしたがい、いずれの繊維も中央部分 ($L_i - 2l_{ei}$) は同一のひずみを受けるとする。この仮定により切断繊維の糸の切断面上にある部分は第 1, 2 図より明らかに

(第 5 図)

ずれも繊維の中央部分 ($L_i - 2l_{ei}$) であるので、いずれも同一のひずみを受けていると考えられる。また繊維の切断はいずれも糸の切断面上にて生ずるとすれば、切断繊維の示す平均切断強伸度は第 4 節に述べた繊維束の場合と類似しており、(10) および (8) 式の G_b および q_b で示される。なお (23) 式より明らかのように、切断繊維には単位面積当たりの強力 δ_i の小さな繊維が多く含まれる可能性があると考えられるが、このために生ずる G_b および q_b の誤差は繊維切断率 $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲では無視し得る。なおすべり繊維の摩擦力については $\bar{\lambda}$ が 1 に近い範囲では糸強力に及ぼす影響は小さいので、すべり繊維の平均切断強伸度を切断繊維と同様に G_b , q_b と見なし、第 1 報 第 4 節に述べたと同様にすべり繊維の 1 本当たりの平均摩擦力を $G_b/2$ とすれば、糸の切断時における糸の切断面上の各繊維部分の示す張力の平均値 $\overline{G_{bs}}$ は

$$\overline{G_{bs}} = \bar{\lambda} G_b + (1 - \bar{\lambda}) G_b/2 = (1 + \bar{\lambda}) G_b/2 \quad (27)$$

なお繊維の張力分布型は台形であるため、同一繊維内においても各部分において張力およびひずみを異にするが、任意の繊維の糸切断時における平均切断強力および伸度を $\overline{T_{bi}}$, $\overline{\epsilon_{bi}}$ とし、 $\overline{T_{bi}}$ および $\overline{\epsilon_{bi}}$ の全繊維についての平均値を $\overline{G_b}$, $\overline{q_b}$ にて示せば、繊維中央部の伸度は q_b であるから第 1 報 (17) 式より任意の繊維について

$$\overline{\epsilon_{bi}} \approx q_b (1 + \lambda_i) / 2$$

したがって全繊維に対する平均値は

$$\overline{q_b} = q_b (1 + \lambda) / 2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

また各繊維が q_b のひずみを受けたときの張力を T_i とすれば第1報 (14) 式より任意の繊維について

$$\overline{T_{bi}} = T_i (1 + \lambda_i) / 2$$

λ_i は繊維の切断強度 T_{bi} とは密接な相関関係を有するが、 T_i とは独立であると見なし得るので

$$\overline{G_b} = E(T_i) E(1 + \lambda_i) / 2 = G_b (1 + \lambda) / 2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

(27), (29) 式より $\overline{G_{bs}} = \overline{G_b}$ であり、これは第1報第4節に述べた通り繊維性質にむらがない場合と同様であり、また (28), (29) 式と第1報 (17), (14) 式との比較により糸中の繊維全長が糸切断時に示す平均切断強伸度は (8), (10) 式より得られる q_b および G_b を繊維の切断強伸度と見なせば、繊維性質にむらがない場合と同様の関係式にて示されることを知り得る。

以上は各繊維が糸中で一様に引揃えられているときであるが、実際の糸においては糸中の繊維は一様に引揃えられていない。この場合は q_b および G_b の代りに (17) (20) 式より得られる q'_b および G'_b を用いるべきである。したがって (27), (28), (29) 式はそれぞれ次のようになる。

$$\overline{G'_{bs}} = (1 + \lambda) G'_b / 2 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\overline{q'_b} = (1 + \lambda) q'_b / 2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\overline{G'_b} = (1 + \lambda) G'_b / 2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

なお繊維性質にむらがない場合の最適より係数は繊維切断率が 95% のときのより係数として求め得ると第1報に仮定したが、混紡糸のように糸を構成する繊維が2種以上あり、繊維性質のむらがないとはいえずと考えるものに対しては別途の考察を必要とし、最適より係数における繊維切断率が 95% 以下になりうることは容易に考える⁶⁾。しかし特に混紡をしない通常の紡績糸に対しては繊維性質にむらがない場合と同様に $\lambda = 0.95$ に対するより係数が最適より係数であると近似して、このときの G'_{bs} , q'_b および G'_b をそれぞれ次式にて示す。

$$\overline{G'_{bs}} = 0.975 G'_b \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\overline{q'_b} = 0.975 q'_b \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\overline{G'_b} = 0.975 G'_b \quad \dots\dots\dots (35)$$

5・3 繊維切断率と糸の切断強伸度との関係

繊維の切断伸度を q'_b と見なし試長の影響を無視すれば q'_b と糸の切断伸度 e_b との関係式として第1報第3・6節に述べた関係式がそのまま適用できる。したがって糸の切断時における外周繊維のより角度を θ'_{R1b} , ひずみを

受けない糸の外周繊維のより角度を θ'_{R10} とすれば次の諸式が成立する。

$$e_b = q'_b (1 + \lambda) / 2 \cos \theta'_{R10} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\cos \theta'_{R10} = \cos \theta'_{R1b} \times \{1 + \sqrt{1 - \{2 \sec \theta'_{R1b} - q'_b (1 + \lambda)\} q'_b (1 + \lambda)}\} / \{2 - q'_b (1 + \lambda) \cos \theta'_{R1b}\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

上式より θ'_{R1b} と λ の関係を求めれば糸の切断伸度を求め得る。

糸の切断強度 F_b についても繊維の切断強度を G'_b と見なし試長の影響を無視すれば、第1報第4節に述べた関係式がそのまま適用できる。したがって糸の切断時における糸断面中の繊維 N 本の糸軸に対する傾斜の平均値を $\cos \theta'_{r1b}$ とすれば次の諸式が成立する。

$$\begin{aligned} F_b &= N \overline{G'_b} \overline{\cos \theta'_{r1b}} = \{N \lambda \overline{G'_b} \\ &\quad + N(1 - \lambda) \overline{G'_b} / 2\} \overline{\cos \theta'_{r1b}} \\ &= (\text{切断繊維強度} + \text{すべり繊維摩擦力}) \overline{\cos \theta'_{r1b}} \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

$$\overline{\cos \theta'_{r1b}} = (-\log \cos \theta'_{R1b}) \cos \theta'_{R1b} / 1 - \cos \theta'_{R1b} \quad \dots\dots\dots (39)$$

上式より θ'_{R1b} と λ の関係を求めれば、糸の切断強度を求めうる。

5・4 より係数と糸の強伸度との関係

第1, 2図より明らかな通り $l_{cl} > l_i / 2$ の繊維は切断の可能性はなく、 $l_{cl} \leq l_i / 2$ の繊維のみ切断の可能性を持つが、この確率は明らかに $(1 - 2 l_{cl} / l_i)$ である。一般に最適より係数の近傍、すなわち λ が1に近い範囲ではあらゆる繊維について $l_{cl} \leq l_i / 2$ と見なししてさしつかえないので

$$\lambda \approx 1 - 2 E (l_{cl} / l_i) \quad \dots\dots\dots (40)$$

また各繊維の断面積 A_i の平均値を $\overline{A}$ とすれば第1報 (9) 式より切断時の糸中の圧力の平均値 $\overline{p}$ は

$$\begin{aligned} \overline{p} &\approx \alpha' \overline{G'_b} F(\theta'_{R1b}) / 2 \overline{A} \\ F(\theta'_{R1b}) &= 1 + 2 \log (\cos \theta'_{R1b}) / \tan^2 \theta'_{R1b} \end{aligned}$$

したがって (23) 式より

$$l_{cl} = \gamma_i \delta_i \overline{A} / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu \overline{G'_b} F(\theta'_{R1b})$$

γ_i, δ_i, L_i は独立なるゆえ

$$\begin{aligned} E(l_{cl} / l_i) &= E(\gamma_i) E(\delta_i) E(1 / L_i) \overline{A} \\ &\quad / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu \overline{G'_b} F(\theta'_{R1b}) \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

第5・1節にて述べた通り、糸の切断時に各繊維は一様に q'_b のひずみを受けているとすれば

$$L_i = l_{i0} (1 + q'_b)$$

$$\therefore E(1/L_i) = E(1/L_{i0}) / (1 + \bar{q}_b)$$

また両毛房およびしのステープル ダイアグラムにおける平均繊維長を $\bar{L}_{i0}$, $\bar{L}_0$, また両毛房における長さ L_{i0} の繊維数を x_i , 長さ Q_s のしにおける長さ L_{i0} の繊維数を z_i とすれば $x_i = z_i L_{i0} / Q_s$ ⁵⁾

$$\therefore E(1/L_{i0}) = \Sigma(z_i L_{i0} / L_{i0} Q_s) / \Sigma x_i \\ = \Sigma z_i / \Sigma z_i L_{i0} = 1 / \bar{L}_0 \dots \dots \dots (42)$$

したがって第5・1節の(26)式は(40), (42)式からも得られる。

また(32), (20), (21)式より

$$\bar{G}_b' = (1 + \bar{\lambda}) \bar{A} E(\delta_i) \eta_1' / 2 \dots \dots \dots (43)$$

(41), (42), (43)式より

$$E(l_{0i} / L_i) = 2 \bar{y} / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu F(\theta_{R1b}') \eta_1' (1 + \bar{\lambda}) \cdot \\ \bar{L}_0 (1 + \bar{q}_b)$$

(40)より

$$\bar{\lambda} = 1 - 4 \bar{y} / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu F(\theta_{R1b}') \eta_1' (1 + \bar{\lambda}) \bar{L}_0 (1 + \bar{q}_b) \\ \therefore F(\theta_{R1b}') = 4 \bar{y} / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu \eta_1' [1 - (\bar{\lambda})^2] \bar{L}_0 (1 + \bar{q}_b)$$

第1報第5・1節に述べたように繊維切断率 $\bar{\lambda}$ に実験定数 ν を考えれば

$$F(\theta_{R1b}') = 4 \bar{y} / \pi \alpha' \beta' \gamma' \mu \eta_1' [1 - (\nu \bar{\lambda})^2] \bar{L}_0 (1 + \bar{q}_b)$$

上式より $\bar{\lambda}$ の繊維切断率を生ずるに必要な θ_{R1b}' を求め得るが、繊維性質にむらがない場合に $\lambda = \bar{\lambda}$ の繊維切断率を生ずるに必要な θ_{R1b} と θ_{R1b}' との関係を次に求める。

第1報(33)式より

$$F(\theta_{R1b}) = 16 A / \alpha \beta \gamma L_0 \mu y [1 - (\nu \lambda)^2] (1 + \bar{\varepsilon}_b)$$

繊維断面を円とすれば $A = \gamma^2 / 4 \pi$, また

$$y = \bar{y}, L_0 = \bar{L}_0, \varepsilon_b = m, \lambda = \bar{\lambda}$$

とすれば

$$F(\theta_{R1b}') = F(\theta_{R1b}) \alpha \beta \gamma (1 + \bar{\varepsilon}_b) / \alpha' \beta' \gamma' (1 + \bar{q}_b) \eta_1'$$

なお

$$\bar{\varepsilon}_b = (1 + \bar{\lambda}) \varepsilon_b / 2$$

$$\bar{q}_b' = (1 + \bar{\lambda}) m z_1' / 2 = (1 + \bar{\lambda}) \varepsilon_b z_1' / 2$$

$$\therefore (1 + \bar{\varepsilon}_b) / (1 + \bar{q}_b') = 1 + \bar{\varepsilon}_b - \bar{q}_b' = 1 + (1 + \bar{\lambda}) \cdot$$

$$\varepsilon_b (1 - z_1' / 2) = 1 - (1 + \bar{\lambda}) \varepsilon_b' \sigma_e' / 2$$

$$\therefore F(\theta_{R1b}') = F(\theta_{R1b}) \alpha \beta \gamma \{1 - (1 + \bar{\lambda}) \varepsilon_b' \sigma_e' / 2\} / \\ \alpha' \beta' \gamma' \eta_1' \dots \dots \dots (44)$$

なお糸断面中の繊維の充実度 α , 糸中の圧力に関する定数 β , 糸中の繊維の有効接触比 γ の変化は無視しうるとし, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ とすれば

$$F(\theta_{R1b}') = F(\theta_{R1b}) \{1 - (1 + \bar{\lambda}) \varepsilon_b' \sigma_e' / 2\} / \eta_1' \dots (45)$$

上式より明らかな通り繊維性質にむらがある糸は、これら性質の算術平均値を繊維性質とするむらのない繊維からなる糸に比べ、同一の繊維切断率を生ずるにより大きな $F(\theta_{R1b}')$ を必要とし、したがってより大きな切断より角度 θ_{R1b}' , すなわちより係数を必要とする。

なおこのときのより係数 K は(37)式より θ_{R10}' を知れば第1報(37)式と同様に次式より求めうる。

$$K = 9.33 \tan \theta_{R10}' / \sqrt{v_1} \dots \dots \dots (46)$$

また(45)式より θ_{R1b}' と $\bar{\lambda}$ の関係を知れば(36), (38)式より糸の切断伸度を知りうるので、より係数と糸の強伸度との関係を求めうる。

なお最適より係数 K_m に対する糸の切断時における外周繊維のより角度 θ_{R2b}' , ひずみを受けないときの外周繊維のより角度 θ_{R20}' および糸の切断強伸度 F_{bm} , e_{bm} は第5・2節に述べたように $\bar{\lambda} = 0.95$ とすれば上述の関係式より求め得る。

6. 最適より係数以後のより係数における糸の強伸度

第2報第3・2節において繊維性質にむらのない繊維にて構成される紡績糸に最適より係数をこえてさらにより数を与えた場合に、同一繊維内の糸の内外層に存在する部分にひずみの差を生じ、このひずみの差が大きくなればなるほど糸中の繊維の平均の切断強伸度は最適より係数の場合に比べてますます低下し、これが最適より係数をこえると繊維の糸軸に対する傾斜がますます増大することと相まって糸の切断強力が低下する原因であり、また糸の切断伸度も一般的に見て低下の傾向を示す原因であることを述べたが、繊維性質にむらがある場合もこれと類似の状態が考えられる。したがって、糸の切断伸度 e_b は糸がひずみを受けないときの外周繊維のより角度を θ_{R30}' とし、繊維の切断強伸度をそれぞれ G_b' , q_b' と見なせば、第2報(35), (36), (37)式より近似的に次の3式中の最小の値を採用することにより得られると考えられる。

$$e_b = 0.975 \{[(1 + q_b')^2 / (1 - k_3')^2 \cos^2 \theta_{R20}' - \tan^2 \theta_{R30}']^{1/2} - 1\} \dots \dots \dots (47)$$

$$e_b = 0.975 (q_b' + k_3') / (1 - k_3') \dots \dots \dots (48)$$

$$e_b = 0.975 \{[(1 + q_b')^2 (1 - k_3')^2 \tau - 2 k_3']^{1/2} / (\tau - 2 k_3' - \tau k_3')^{1/2} - 1\} \dots \dots \dots (49)$$

上式中の k_3' , τ は第2報(23), (22), (21)式より次式にて示される。

$$k_3' = 1 - [(2 + B^2) \{F(\theta_{R30}') - 1\} + B^2 \cos^2 \theta_{R30}'] /$$

$[3\{F(\theta'_{R30})-1\}+\cos^2\theta_{R30}] \dots\dots\dots (50)$

$\tau=2(1-B^2)\{F(\theta'_{R30})-1\}/[(2+B^2)\cdot$

$\{F(\theta'_{R30})-1\}+B^2\cos^2\theta'_{R30}] \dots\dots\dots (51)$

$B=\tan\theta'_{R20}/\tan\theta'_{R30} \dots\dots\dots (52)$

$F(\theta'_{R30})=1+2\log(\cos\theta'_{R30})/\tan^2\theta'_{R30}$

糸の切断強力 F_b は、糸の切断時における糸中の繊維の糸軸に対する傾斜の平均値を $\overline{\cos\theta'_{r3b}}$ とすれば第2報(49)、(50)式より

$F_b=N(0.975\overline{a_t}+\overline{b_t}e_b\cos\theta'_{R30})\cdot$

$\{1-F(e_b\cos\theta'_{R30})\}\overline{\cos\theta'_{r3b}} \dots\dots\dots (53)$

なお糸の切断時における外周繊維のより角度 θ'_{R3b} は第1報(23)式より得られ、したがって $\overline{\cos\theta'_{r3b}}$ は第1報(28)式より求め得る。また θ'_{R30} に対するより係数は前節と同様に得られる。

7. 計算結果

7・1 繊維束中の繊維の強伸度

繊維の強伸度曲線に関する定数 $\overline{a_t}$, $\overline{b_t}$ および切断伸度の平均値 m , 標準偏差 σ_e を知って t_b を求めるに必要な $H(t)$ 曲線を(7)式より求めて第6図に片対数グラフにて示した。

また第7図に t_b に対する一様に引揃えられた繊維束中の繊維切断強力効率 η_1 を(11)式より求めて鎖線にて示し、また繊維切断伸度の効率 z_1 を $\sigma_e/m=0.1, 0.2, 0.3$ のおのおのに対し(12)式より求めて実線にて示した。

(第 6 図)

(第 7 図)

以上の第6、7図および(6)式より $\overline{a_t}$, $\overline{b_t}$, m , σ_e が与えられれば η_1 および z_1 を求めうるが第8、9図に $\overline{a_t}/\overline{b_t}=5.00, 3.00, 1.00, 0.20, 0.00, -0.02$, $\sigma_e/m=0.1, 0.2, 0.3$ のおのおのに対し η_1 および z_1 が m によりいかに変化するかを示した。第8図より明らかな通り η_1 の m の増加に対する変化の状態は $\overline{a_t}/\overline{b_t}$ が負のときは漸時増加し、零のときは一定で変化なく、正のときは漸時減少する。また同一の $\overline{a_t}/\overline{b_t}$ の値に対しては σ_e/m が大きいほど η_1 は小さく、同一の σ_e/m の値に対しては $\overline{a_t}/\overline{b_t}$ が小さいほど η_1 は小さい。第9図より

(第 8 図)

(第 9 図)

(第 10 図)

z_1 の m の増加に対する変化の状態は $\bar{a}_i/\bar{b}_i$ が負のときは漸時減少し、零のときは一定で変化なく、正のときは漸時増加する。同一の $\bar{a}_i/\bar{b}_i$ の値に対しては $\bar{a}_i/\bar{b}_i \geq 0$ のときは σ_ϵ/m が大きいほど z_1 は小さく、同一の σ_ϵ/m の値に対しては $\bar{a}_i/\bar{b}_i$ が小さいほど z_1 は大きい。

なお一様に引揃えられない繊維束中の繊維の切断強伸度の効率 η'_1 , z'_1 は (16) 式より σ'_ϵ を求めれば η'_1 , z_1 と全く同様に求め得る。

7・2 切断より角度と繊維切断率との関係

$F(\theta'_{R1b})/F(\theta_{R1b})$ の値を $(1+\bar{\lambda})\sigma'_\epsilon/2 = 0.09, 0.05,$

0.01 のおのおのに対し (45) 式より求めて第 10 図に示した。したがって繊維性質にむらがない場合の $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}$ に対する $F(\theta_{R1b})$ を第 1 報 (36) 式より求めれば繊維性質にむらがある場合の $F(\theta'_{R1b})$ は t'_b および σ'_ϵ を知れば容易に求められ、最適より係数以前の繊維切断率 $\bar{\lambda}$ に対する外周繊維の糸の切断時におけるより角度 θ'_{R1b} は第 1 報 (7) 式より求め得る。

なお最適より係数における糸の切断時における外周繊維のより角度 θ'_{R2b} は $\bar{\lambda}=0.95$ として容易に求め得られる。最適より係数以後においては見かけの繊維切断率を考え、これは常に最適より係数における繊維切断率に等しいとしたのは第 2 報に述べたと全く同様である。

7・3 紡績糸の強伸度

繊維の切断強伸度をそれぞれ $G'_b = \sigma_B \eta'_1$, $q'_b = m z'_1$ と考え、繊維切断率 $\bar{\lambda}$ に対する糸の切断時における外周繊維のより角度 θ'_{R1b} を求めれば最適より係数以前の糸の強伸度は第 1 報に述べた繊維性質にむらがない場合と全く同様に求めうることを第 5・3 節にて述べたが、この際必要である η'_1 , z'_1 および $F(\theta'_{R1b})$ と繊維の諸性質との関係はすでに第 8, 9, 10 図に示した。なお最適より係数における糸の強伸度は $\bar{\lambda} = 0.95$ に対する値として求め得る。

最適より係数以後の糸の強伸度も繊維の切断強伸度をそれぞれ $G'_b = \sigma_B \eta'_1$, $q'_b = m z'_1$ とすれば第 2 報に述べた繊維性質にむらがない場合と全く同様であり、したがって第 2 報第 5・2 節および第 5・3 節にて示した糸の強伸度に関する計算結果はそのまま適用できる。

8. 結 論

1) 集束試験により得られる繊維の平均切断強伸度を G'_b , q'_b , 各繊維の切断強伸度の算術平均値を σ_B , m とすれば次の関係がある。

$$G'_b = \eta'_1 \sigma_B, \quad q'_b = z'_1 m \quad \eta'_1 < 1, \quad z'_1 < 1$$

なお η'_1 , z'_1 は次式により定められる。

$$\eta'_1 = \{1 - F(t'_b)\}^2 / 1 - F(t'_b) - t'_b f(t'_b)$$

$$z'_1 = 1 + t'_b \sigma'_\epsilon / m$$

上式中に用いた記号は次の通りである。

$$F(t'_b) = \int_{-\infty}^{t'_b} e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}, \quad f(t'_b) = e^{-(t'_b)^2/2} / \sqrt{2\pi}$$

σ'_ϵ : 繊維の切断伸度むらがあり、また束中で繊維が一様に引揃えられていないことによる束中の繊維の見かけの切断伸度の標準偏差

m : 繊維の切断伸度の算術平均値

なお t'_b は繊維の切断点近傍の強伸度曲線に関する定数を $\bar{a}_t, \bar{b}_t$ とすれば次式より求め得る。

$$m/\sigma'_e + \bar{a}_t/\bar{b}_t \sigma'_e \\ = \sqrt{2\pi} \left(1 - \int_{-\infty}^{t'_b} e^{-y^2/2} dy / \sqrt{2\pi}\right) / e^{-(t'_b)^2/2} - t'_b$$

2) 最適より係数以前において繊維性質にむらがある場合に繊維切断率 $\bar{\lambda}$ を生ずるに必要な糸の切断時における外周繊維のより角度 θ'_{R1b} と、その算術平均値を繊維性質とするむらのない繊維からなる糸が $\lambda = \bar{\lambda}$ の繊維切断率を生ずるに必要な θ_{R1b} との間には近似的に次の関係があり $\theta'_{R1b} > \theta_{R1b}$ である。

$$F(\theta'_{R1b}) = F(\theta_{R1b}) \{1 - (1 + \bar{\lambda}) t'_b \sigma'_e / 2\} / \eta_1$$

$$\text{ただし } F(\theta) = 1 + 2 \log(\cos \theta) / \tan^2 \theta$$

なお特に混紡をしない通常の紡績糸に対しては繊維性質にむらがない場合と同様に $\bar{\lambda} = 0.95$ のときに最適よ

り係数に達するとして、最適より係数における糸切断時の外周繊維のより角度 θ'_{R2b} を上式より求める。

3) 糸の切断強伸度は、繊維の切断強伸度をそれぞれ G'_b, q'_b とすれば、繊維性質に全くむらがない場合と同様に取扱い得る。

参考文献

- 1) 久間; 本誌, 13, 5 (昭35-5)
- 2) 久間; 本誌, 13, 8 (昭35-8)
- 3) M. M. Platt, W. G. Klein, W. J. Hamburger; Tet. Res. J. (1952-10)
- 4) 山口, 大柳, 森; 本誌, 10, 12 (昭32-12)
- 5) 久間; 本誌, 6, 5 (昭28-5)
- 6) 真後, 久間; 本誌, 11, 7 (昭33-7)
- 7) R. R. Sullivan; J. Appl. Phys., 13, 157~167 (1942-3)