紡糸口金の孔配列に関する理論的考察*

(昭和36年4月4日受理)

小 貫

章**

神 谷 卓 郎

→ 摘

要 ←

目 的

アセテートの紡糸口金に多数の孔をうがつとき、孔の最適配列を実験的に確認するには困難が伴う。理論的考察をする一法として、幾何学的パラメータによって紡糸孔相互の妨害率を表現し、その数値によって配列の適否を判断することを試みた。

成 果

計算結果を経験的事実と比較して矛盾するところがない。紡糸孔の最適配列を推定するために、この計算方法が1つの示唆を与えるものと考えられる。

1. ま え が き

アセテートの紡糸に関する研究において、紡糸口金に多数の孔をうがつときの孔配列について2, 3の実験を行なった。紡糸孔を同心円の環状に等間隔に配列するとき、環の数、各環の半径、あるいは一環上の孔の個数のような幾何学的分布が、糸の表面より起る溶剤の蒸発に対して大きな影響をもつことは明らかである。しかし、一定の紡糸口金面に数100個の孔をうがつ配列は無数にあり、各配列についてその優劣を判定する実験精度も充分でない。実験的に最適配列を決定することは容易でない。理論的に求めた例もない。

この報文では気体分子論的な観点には触れず、1つの仮定の下に幾何学的パラメータを求め紡糸孔相互の蒸発妨害率を数的に表現した。全紡糸孔について妨害率を計算し、その最低値を与える配列を最適のものとする試みを報告する。本計算を通じて一貫して用いる記号は次のようである。

a : おのおのの単孔の半径

N : 孔の全数

$D_1, D_2, D_3, \dots, D_m$: 孔を配列した環の半径で外側より番号をつける

$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$: おのおのの環上の孔の数

$r_2 = D_2/D_1, \quad r_3 = D_3/D_2, \dots, r_i = D_i/D_{i-1}, \dots$

$r_m = D_m/D_{m-1}$

特に $r_2 = r_3 = r_4 = \dots = r$ のような配列を“比 r の等比配分”となづける。

κ : 蒸発妨害率 (後に定義する)

θ または θ : 蒸発妨害角 (後に定義する)

2. 基礎の仮定

(第 1 図)

点 P に半径 a の孔があり、ここから糸がでてくると、その表面から蒸発して空气中に移動してゆく溶剤分子の密度は、 P よりの距離 d にしたがって減少するが、この分子の存在は当然他の点 Q における蒸発速度に妨害をあたえるであろう。

いま PQ の距離を d とし、 Q からみて P の孔が張る角を θ とすると

$$\theta = 2 \sin^{-1} \frac{a}{d} \dots \dots \dots (1)$$

この θ を妨害角とよび、点 Q における孔の自由な 2π の角のうち、 θ だけは蒸発が妨害されていると仮定するのである。そしてこのときの妨害率 κ を

$$\kappa = \theta / 2\pi = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{a}{d} \dots \dots \dots (2)$$

と定義する。

* Theoretical Inquiry Into the Hole-Arrangement of Spinning Jets.

** A. Konuki, 熊本大学, T. Kamitani, 日室アセテール守山工場

Q にも半径 a の孔があるのだから、当然 d は $2a$ より小さくはなれない。

$\sin^{-1} 1/2 = \pi/6$ だから、もし 2 つの孔が密接していれば、両方とも $1/\pi \times \pi/6 = 1/6$ の妨害を受けているし、また両側に他の孔が密接している場合には、真中の孔は $1/3$ の妨害を受けていると考える。

さて、いまここに全部で N 個の孔がある配列に従ってあるとき、1 個の孔に対し残りの $N-1$ 個の孔の妨害角の和を θ とすると、この θ をすべての孔について加え、それを $2\pi N$ で割ったものを“この配列における妨害率”ということに決める。すなわち

$$\kappa = \sum \theta / 2\pi N \quad \dots\dots\dots (3)$$

が妨害率の定義である。

実験と比較した結論を先にいえば、この κ が 0.3 前後に達すると溶剤の蒸発能率は著しく不良になることが認められる。そこで以下に考えるのは

- (i) ある配列に対し κ を容易に計算できる式をつくること
- (ii) いかなる配列が最小妨害率を与えるかを考えること

の 2 つである。(ii) を考えるときには、孔の総数 N および最外側の環の半径 D_1 は固定しておくのはいうまでもない。ただ一つここで注意しておくのは、孔の半径 a を真の半径と考えるよりも、なにかある蒸発現象を支配する有効半径と考えておいた方が便利である。

3. 単環および二重環のときの κ

(第 2 図)

第 2 図のごとく半径 D の環上に n 個の孔があるとき、その 1 つの孔 P に他の $n-1$ 個の孔 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ がおよぼす妨害角の総和は前節に示した通り

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \sin^{-1} \frac{a}{PQ_i}$$

簡単な計算から、この単環上の n 個の孔の全妨害角は

$$\theta = 2n \sum_{m=1}^{n-1} \sin^{-1} \frac{a}{2D \sin(\frac{\pi m}{n})} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これを便利な形に変えるため

$$a/2D = q, \quad \sin^{-1} \left(\frac{q}{\sin \pi x} \right) = f(x) \quad \dots\dots\dots (5)$$

とおくと

$$\theta = 2n \sum_{m=1}^{n-1} f\left(\frac{m}{n}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\doteq 2n^2 \int_{1/n}^{(n-1)/n} f(x) dx$$

$$= \frac{4n^2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi(1-1/n)} \sin^{-1} \left(\frac{q}{\sin x} \right) dx$$

n が大きくかつ q が充分小さいとして q^3 以下をすすれば、近似的に

$$\theta = \frac{2an^2}{\pi D} \log \frac{2n}{\pi} \quad \dots\dots\dots (7)$$

この θ は上の計算より明らかなように、単環の上のおのおのの孔がおたがいに妨害し合うものの総和であるので、“自己妨害角”と呼べるものである。これに対する“自己妨害率”は

$$\kappa = \frac{\theta}{2n\pi} = \frac{an}{\pi^2 D} \log \frac{2n}{\pi} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

次に単環上(半径 D)の n 個の孔が、単環内の 1 点 P (中心よりの距離 D') にもつ妨害角 θ を同様に求めると

$$\theta = 2 \sum_{m=0}^{n-1} \sin^{-1} \left\{ \frac{a}{\sqrt{D^2 + D'^2 - 2DD' \cos \frac{2\pi m}{n}}} \right\}$$

$$\doteq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2a}{D \left\{ 1 - 2\beta \cos \left(\frac{2\pi m}{n} \right) + \beta^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\text{ただし } \beta = \frac{D'}{D} < 1$$

すなわち

$$\frac{D\theta}{2a} \doteq \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ 1 + \beta P_1 \left(\cos \frac{2\pi m}{n} \right) + \beta^2 P_2 \left(\cos \frac{2\pi m}{n} \right) + \dots\dots\dots \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに $P_k(x)$ は第 k 次 Legendre 多式で

$$\sum_{m=0}^{n-1} P_k \left(\cos \frac{2\pi m}{n} \right) = 0, \quad k \text{ 奇数}$$

$$\left(\frac{k!}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^{2k}}, \quad k \text{ 偶数}$$

を用いると

$$\frac{D\theta}{2an} = \psi(\beta) \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{ただし } \psi(\beta) = 1 + \frac{(2!)^2}{(1!)^4 2^2} \beta^2 + \frac{(4!)^2}{(2!)^4 2^4} \beta^4 + \dots\dots\dots (11)$$

となる。一方、級数展開より明らかなように

$$\psi(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \varphi}} \dots\dots\dots (12)$$

となり、第1種完全タ円積分の表¹⁾を用いれば $\psi(\beta)$ の値は容易に求めることができる。

もし半径 D' の内環に n' 個の孔があるなら、外環の内環におよぼす総妨害角は

$$\theta = \frac{2ann'}{D} \psi \left(\frac{D'}{D} \right) \dots\dots\dots (13)$$

同様に上の場合、内環が外環におよぼす妨害角の和は

$$\begin{aligned} \theta' &= \sum_{m'=0}^{n'-1} n' 2 \sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{D^2 - 2DD' \cos \left(\frac{2\pi}{n'} m' \right) + D'^2}} \\ &= \frac{2an}{D} \sum_{m'=0}^{n'-1} \left\{ 1 + \beta P_1 \left(\cos \frac{2\pi}{n'} m' \right) + \right. \\ &\quad \left. \beta^2 P_2 \left(\cos \frac{2\pi}{n'} m' \right) + \dots \right\} = \frac{2ann'}{D} \psi \left(\frac{D'}{D} \right) \end{aligned}$$

となって (13) 式と全く同じになる。

以上の結果を総合すれ

ば

“内環(半径 D' 孔数 n')

と外環(半径 D 孔数 n)

があるときには

(第 3 図)

$$\begin{aligned} \text{妨害率 } \kappa &= \frac{1}{2\pi(n'+n)} \left[\text{自己妨害角} + \text{相互妨害角} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi(n'+n)} \left\{ \frac{2an^2}{\pi D} \log \frac{2n}{\pi} + \frac{2an'^2}{\pi D'} \right. \\ &\quad \left. + \log \frac{2n'}{\pi} + \frac{4ann'}{D} \psi \left(\frac{D'}{D} \right) \right\} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \psi(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \varphi}}$$

で与えられる。

さらに今度は m 列の環があるとしよう。これらの半径は外側より $D_1 D_2 \dots D_m$ で、おのおの環上の孔数は $n_1 n_2 \dots n_m$ とする。

いま第 i 環の自己妨害角を θ_{ii} 、第 ij 両環の相互妨害角を θ_{ij} としよう。もちろん

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ii} &= \frac{2an_i^2}{\pi D_i} \log \frac{2n_i}{\pi} \\ \theta_{ij} &= \frac{2an_i n_j}{D_i} \psi \left(\frac{D_j}{D_i} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

(ただし $D_i > D_j$)

したがって、全妨害角 θ は

$$\theta = \sum_{i=1}^m \theta_{ii} + \sum_{i \neq j} \theta_{ij} = \sum_{i=1}^m \theta_{ii} + 2 \sum_{i < j} \theta_{ij} \dots\dots\dots (16)$$

$$\kappa = \frac{\theta}{2\pi N} \quad \text{でここに } \sum_{i=1}^m n_i = N$$

である。

4. 等 比 配 分

実際に近い例に対し上の計算の結果を適用するために、2, 3 のもっともらしい仮定を試みる。すなわち

(i) 環の半径の級数は等比級数である。すなわち等比配分であるとする。

このときは

$$D_2 = D_1 r, \quad D_3 = D_1 r^2, \dots, D_m = D_1 r^{m-1} \dots\dots\dots (17)$$

(ii) おのおの環上の孔の数 n_i はその環の半径に比例する。すなわち

$$n_i = N \frac{D_i}{\sum_{j=1}^m D_j} = N \frac{(1-r)}{(1-r^m)} r^{i-1} \quad (i=1 \dots m) \dots\dots\dots (18)$$

すると (15), (16) 式から

$$\theta = \frac{2aN^2}{\pi D_1} H_m(r) \{A_m(r) + 2\pi B_m(r)\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{ここに } H_m(r) = \frac{(1-r)^2}{(1-r^m)^2}$$

$$\begin{aligned} A_m(r) &= \log \left\{ \frac{2N(1-r)}{\pi(1-r^m)} \right\} \frac{1-r^m}{1-r} + \log r \\ &\quad \frac{r}{(1-r)^2} \left\{ 1 - mr^{m-1} + (m-1)r^m \right\} \end{aligned}$$

$$B_m(r) = \sum_{i=1}^{m-1} r^i \frac{1-r^{m-i}}{1-r} \psi(r^i)$$

で r がわかればどれも計算できる関数である。

さらに

$$S_m(r) = H_m(r) \{A_m(r) + 2\pi B_m(r)\}$$

とおきこれに対する κ の値を κ_m とおくと

$$\kappa_m = \frac{\theta}{2\pi N} = \frac{\sigma N}{\pi^2 D_1} S_m(r)$$

で計算できる。 $A_m(r)$ のみは N を含んでいることに注意する。

これらの値は第1, 2, 3表に与えてある。ただし第2, 3表では

$$N = 300, 400, 500$$

の3つの場合に対し計算した。 κ_m を求めるのに必要な a, D_1 はほぼ実用的な数値を導入してある。

(第 1 表) $\psi(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2 \sin^2 \varphi}}$

r	$\psi(r)$	$\Delta \psi(r)$	r	$\psi(r)$	$\Delta \psi(r)$	r	$\psi(r)$	$\Delta \psi(r)$
0.00	1.0000	0	0.34	1.0310	19	0.68	1.1609	66
0.01	1.0000	1	0.35	1.0329	20	0.69	1.1678	69
0.02	1.0001	1	0.36	1.0350	21	0.70	1.1750	72
0.03	1.0002	2	0.37	1.0371	21	0.71	1.1826	76
0.04	1.0004	2	0.38	1.0394	23	0.72	1.1905	79
0.05	1.0006	3	0.39	1.0417	23	0.73	1.1988	83
0.06	1.0009	3	0.40	1.0441	24	0.74	1.2075	87
0.07	1.0012	4	0.41	1.0465	24	0.75	1.2166	91
0.08	1.0016	4	0.42	1.0491	26	0.76	1.2262	96
0.09	1.0020	5	0.43	1.0518	27	0.77	1.2363	101
0.10	1.0025	5	0.44	1.0545	27	0.78	1.2470	107
0.11	1.0031	6	0.45	1.0574	29	0.79	1.2583	113
0.12	1.0036	7	0.46	1.0603	29	0.80	1.2703	120
0.13	1.0043	7	0.47	1.0634	31	0.81	1.2830	136
0.14	1.0050	7	0.48	1.0665	31	0.82	1.2966	145
0.15	1.0057	8	0.49	1.0698	33	0.83	1.3110	156
0.16	1.0065	9	0.50	1.0732	34	0.84	1.3266	167
0.17	1.0074	9	0.51	1.0767	35	0.85	1.3433	180
0.18	1.0083	9	0.52	1.0803	36	0.86	1.3613	197
0.19	1.0092	10	0.53	1.0841	38	0.87	1.3809	214
0.20	1.0102	11	0.54	1.0880	39	0.88	1.4023	235
0.21	1.0113	11	0.55	1.0920	40	0.89	1.4259	256
0.22	1.0124	12	0.56	1.0962	42	0.90	1.4518	292
0.23	1.0136	13	0.57	1.1006	43	0.91	1.4811	330
0.24	1.0149	13	0.58	1.1051	45	0.92	1.5141	379
0.25	1.0162	14	0.59	1.1097	47	0.93	1.5520	442
0.26	1.0176	14	0.60	1.1146	48	0.94	1.5962	530
0.27	1.0190	15	0.61	1.1196	50	0.95	1.6492	657
0.28	1.0205	16	0.62	1.1248	52	0.96	1.7149	859
0.29	1.0221	16	0.63	1.1303	54	0.97	1.8008	1 229
0.30	1.0237	16	0.64	1.1359	56	0.98	1.9237	2 138
0.31	1.0254	17	0.65	1.1418	59	0.99	2.1375	
0.32	1.0272	18	0.66	1.1479	61			
0.33	1.0290	18	0.67	1.1542	64			

(第 2 表) $S_m(r)$

$N=300$

$r \backslash m$	$S_2(r)$	$S_3(r)$	$S_4(r)$	$S_5(r)$	$S_6(r)$
0.60	4.51	4.52	4.66	4.82	4.98
0.65	4.49	4.47	4.60	4.76	4.92
0.70	4.48	4.44	4.54	4.69	4.84
0.75	4.48	4.41	4.49	4.61	4.75
0.80	4.51	4.41	4.45	4.55	4.66
0.85	4.56	4.44	4.45	4.53	4.58
0.90	4.67	4.55	4.52	4.53	4.57
0.95	4.93	4.83	4.79	4.76	4.75

$N=400$

$r \backslash m$	$S_2(r)$	$S_3(r)$	$S_4(r)$	$S_5(r)$	$S_6(r)$	$S_7(r)$	$S_8(r)$
0.60	4.70	4.67	4.80	4.95	5.10	5.21	5.31
0.65	4.67	4.62	4.73	4.88	5.03	5.17	5.28
0.70	4.65	4.57	4.66	4.79	4.94	5.08	5.21
0.75	4.65	4.54	4.60	4.71	4.84	4.98	5.11
0.80	4.67	4.53	4.55	4.63	4.74	4.85	4.97
0.85	4.72	4.56	4.54	4.58	4.65	4.74	4.83
0.90	4.83	4.66	4.61	4.61	4.63	4.68	4.73
0.95	5.08	4.94	4.87	4.83	4.81	4.80	4.79

$N=500$

$r \backslash m$	$S_2(r)$	$S_3(r)$	$S_4(r)$	$S_5(r)$	$S_6(r)$
0.60	4.83	4.78	4.90	5.05	5.19
0.65	4.80	4.72	4.82	4.96	5.11
0.70	4.78	4.67	4.74	4.87	5.02
0.75	4.78	4.63	4.67	4.78	4.91
0.80	4.79	4.61	4.62	4.69	4.79
0.85	4.84	4.64	4.61	4.64	4.70
0.90	4.94	4.74	4.67	4.66	4.68
0.95	5.19	5.01	4.92	4.87	4.85

(第 3 表) κ $N=300$ $a=0.035$ $D_1=34$

$r \backslash m$	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6
0.60	0.141	0.141	0.146	0.151	0.156
0.65	0.141	0.140	0.144	0.149	0.154
0.70	0.140	0.139	0.142	0.147	0.152
0.75	0.140	0.138	0.140	0.144	0.149
0.80	0.141	0.138	0.139	0.142	0.146
0.85	0.143	0.139	0.139	0.141	0.143
0.90	0.146	0.142	0.141	0.142	0.143
0.95	0.154	0.152	0.150	0.149	0.149

 $N=400$ $a=0.035$ $D_1=34$

$r \backslash m$	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8
0.60	0.198	0.197	0.202	0.209	0.215	0.220	0.224
0.65	0.197	0.195	0.199	0.206	0.212	0.218	0.222
0.70	0.196	0.193	0.196	0.202	0.208	0.214	0.220
0.75	0.196	0.191	0.194	0.199	0.204	0.210	0.215
0.80	0.197	0.191	0.192	0.195	0.200	0.205	0.210
0.85	0.199	0.192	0.191	0.193	0.196	0.200	0.204
0.90	0.204	0.196	0.194	0.194	0.195	0.197	0.199
0.95	0.214	0.208	0.205	0.203	0.203	0.202	0.202

 $N=500$ $a=0.035$ $D_1=34$

$r \backslash m$	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6
0.60	0.252	0.249	0.256	0.263	0.271
0.65	0.250	0.246	0.252	0.259	0.267
0.70	0.249	0.244	0.247	0.254	0.262
0.75	0.249	0.242	0.244	0.249	0.256
0.80	0.250	0.241	0.241	0.245	0.250
0.85	0.252	0.242	0.240	0.242	0.245
0.90	0.258	0.247	0.244	0.243	0.244
0.95	0.271	0.261	0.257	0.254	0.253

5. 等比配分のときの結果の吟味と

結論

孔の総数 300, 400, 500 の 3 つの場合に対して単孔の大きさ $a=0.035$, $D_1=34$ としたときの κ_m の値が第 3 表である。これからの結果を要約すれば次の通りである。

(1) 環の数 m を固定すれば, κ の最小は, $r=0.60$ と 0.95 の間で起る。

(2) m を変化させたとき κ の最小値は

$N=300$ のとき $m=3$, r は 0.75 と 0.80 の間
 $N=400$ のとき $m=3$, r は 0.75 と 0.80 の間で起る
 $N=500$ のとき $m=4$, r は 0.85 の間

(3) 妨害率を大きく支配しているものは, aN/D の因子である。

(4) 環数を増すことは κ を大きくして効果がない。

(5) 最小の κ を与える配分の環数 m は N とともに緩かに増大する気味がある。

(6) 等比配分以外の配分で, もっと κ が小さくなる可能性を吟味する必要があるのはもちろんであるが, これは次節の結果が示すごとく $m=3$ のときは任意の配分の最小値が等比配分のときの最小値と完全に一致しているので, 最小の κ を求めるには, 少なくとも $m=3$ なら等比配分を考えれば充分であるといえる。

6. 3 列環において任意配分との比較

前章の終りにのべた疑問を解消するため, D_1 を固定し内部の環の半径 D_2 , D_3 を自由に動かしたときの κ の最小を求めてみる。(16) 式において $m=3$ とすると, やはり

$$\frac{n_1}{D_1} = \frac{n_2}{D_2} = \frac{n_3}{D_3} = \frac{2\pi}{b} \quad b \text{ は単孔間の距離}$$

において

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{4a}{b} \left\{ n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2 + n_3 \log n_3 \right\} \\ & - \frac{4aN}{b} \log \frac{\pi}{2} + \frac{8a\pi}{b} \left\{ n_2 \psi \left(\frac{n_2}{n_1} \right) + n_3 \psi \left(\frac{n_3}{n_2} \right) \right. \\ & \left. + n_3 \psi \left(\frac{n_3}{n_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

となるが

$$D_2 = D_1 r_2 \quad D_3 = D_2 r_3 = D_1 r_2 r_3 \dots \dots \dots (20)$$

とおくと $n_1 = N(1+r_2+r_2r_3)$, $n_2 = n_1 r_2$, $n_3 = n_1 r_2 r_3$

となる。いま

$$1 + r_2 + r_2 r_3 = s \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{1}{2\pi Ms} \log_{10} \frac{2N}{\pi s} = U \quad \text{ただし } M = \log_{10} e \dots \dots \dots (22)$$

$$Z = \frac{r_2}{s^2} \left[\psi(r_2) + r_3 \psi(r_2 r_3) + r_3 \psi(r_3) \right] \dots \dots \dots (23)$$

とおくと

$$\Theta = \frac{4aN^2}{D_1} (U+Z) \dots \dots \dots (24)$$

$$\kappa = \frac{2aN}{\pi D_1} (U+Z) \dots \dots \dots (25)$$

となる。いま独立変数を r_2 , r_3 とする代りに s と r_2 をとってみると, U は s のみの関数だから, s をまず固定して r_2 のみ動かして Z の最小値を求め, 更に s を少しずつ動かして Θ および κ の最小値の最小を求めてみる。

結果は $s=2.45$ すなわち $r_2=0.87$, $r_3=0.67$ で最小が起り, そのときの妨害率は $N=400$ に対し $\kappa=0.191$ であって, これは第 3 表の値と完全に一致する。すなわち, 等比配分の最小はあらゆる配分の最小値と一致しているわけである。

文 献

- 1) たとえば 林 桂一: 高等関数表