むらの研究に必要な工業数学とその応用* (2)

会 員 川 端 季 雄**

— 目 次 —

1. は じ め に
2. 低次要素の伝達特性計算
 - (1) 0 次比例要素
 - (2) 1 次比例要素 (1 次比例要素の特性, 機械系モデル, エア マイクロの動特性など)
 - (3) 1 次微分要素
3. 変 動 の 測 度
 - (1) 離散的データの場合
 - (2) 連続的データの場合 (CV%, U% など)
 - (3) CV% と U% の関係について
 - (4) U%, CV% の計算と, そのための電子回路について
4. 不規則な連続的変動からの情報抽出
 - (1) 定常確率過程
 - (2) 自己相関関数
 - (3) 自己相関関数の計算法
 - (4) スペクトル密度関数

3. 変 動 の 測 度

測定したデータが不規則に変動するとき, その変動の度合を定量化することは重要である。以下においてはこうした問題を中心にしてデータの処理法について説明する。

(1) 離散的データの場合

繰返しの動作によって得た N 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ のそれぞれの値がばらついているとき, これらの平均値

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$= \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_N) \dots (34)$$

はこれらデータの中心的な値を示すものである。したがってこの中心の値 $\bar{x}$ から各データの値がどのようにばらついているかを示すのに $\bar{x}$ のまわりの各データの 2 次モ

ーメントの平均, すなわち

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_i - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right\} \dots (35)$$

が一般に使用される。そして σ^2 を分散 (variance) と称しているが, この分散は平均値 $\bar{x}$ からの偏差 $(x_i - \bar{x})$ が 2 乗されているので中心から離れた値をもつデータほど分散の値に大きく影響するわけで, ばらつきの測度として代表的な存在になっている。またデータの単位とばらつきの測度の単位を揃えるために σ^2 の平方根 σ を標準偏差 (standard deviation) と称して同じく変動の測度に用いられる。

ところで, いま 2 組の異なったデータの集りを考え, A 組は平均値 $\bar{x}_A$, 標準偏差 σ であったとし, 他の B 組は平均値 $\bar{x}_B$ で標準偏差は A 組と等しく σ であったとしよう。しかし $\bar{x}_A$ と $\bar{x}_B$ が異なる値をとる場合はたとえ σ が等しくともこの両組のそれぞれのデータのばらつきの大きさは異なるとすべきことが直観されると思う。たとえば糸の強力を測定し A の糸は $\bar{x}_A = 10 \text{ g}$, $\sigma = 5 \text{ g}$, B の糸は $\bar{x}_B = 100 \text{ g}$, $\sigma = 5 \text{ g}$ であるとすれば強力の均斉度はたしかに B の糸が優っている。このように平均値の異なる 2 組の, あるいはそれ以上の各組のばらつきの度合を比較するのに標準偏差 σ を平均値 $\bar{x}$ で除して無次元化する方法がとられている。すなわち

$$\text{変動係数 } (CV) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 (\%) \dots (36)$$

が定義されている。たとえば上述の糸の例では A の糸は

$$CV_A = \frac{5 \text{ g}}{10 \text{ g}} \times 100$$

$$= 50 \%$$

B の糸については

$$CV_B = \frac{5 \text{ g}}{100 \text{ g}} \times 100$$

* Industrial Mathematics and Its Use in Evaluating Irregularity of Textiles. (2)

** T. Kawabata, Member. 京都大学工学部

=5%

となり、Bの糸の均斉度が高いことを明示できる。

つぎに変動の測度のいま一つの表示法として平均偏差をとる方法がある。すなわち平均値からの各データ値の偏差の絶対値和をとる方法である。すなわち

$$\text{平均偏差} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| \quad \dots\dots\dots(37)$$

この表示は、ばらつきの度合の表示としてたしかに直観的に理解しやすい測度であり、計算も楽なようである。しかし統計学的な見地からするとさきの σ と比較して有用の度合は低く特別の場合を除いてあまり用いられないが、糸むらの場合にはつぎのべる $U\%$ として広く用いられている。すなわち σ に対する CV の意味と同様の意味で

$$\text{平均偏差率} = \frac{\text{平均偏差}}{\bar{x}} \times 100\% \quad \dots\dots\dots(38)$$

が用いられており、次項のべる $U\%$ がそれである。

(2) 連続的データの場合

連続的に測定できる糸むら測定機の記録曲線のようにデータが連続的な曲線で得られる場合の曲線の変動の測度も前項(1)の場合と同じ考え方で求めることができる。

いま第12図に示したように変動曲線 $f(x)$ が

(第12図) 変動曲線 $f(x)$

与えられたとき、区間 $0 \sim X$ 間の平均値 $\bar{f}(x)$ は

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx \quad \dots\dots\dots(39)$$

となり、これは(1)項の(34)式に対応する。

また分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{1}{X} \int_0^X (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \quad \dots\dots\dots(40)$$

となり(35)式に対応する。したがって

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{f}(x)} \cdot 100\% \quad \dots\dots\dots(41)$$

となる。

同様に平均偏差も(37)式に対応して

$$\text{平均偏差} = \frac{1}{X} \int_0^X |f(x) - \bar{f}(x)| dx \quad \dots\dots\dots(42)$$

とかわり、ここで(42)式の積分は第13図の斜線の面

(第13図) 平均値 $\bar{f}(x)$ からの偏差

積になり、また平均偏差率は糸むらの場合、 $U(\%)$ と称せられて用いられていることはすでによく知られているとおりである。

$$U(\%) = \frac{\text{平均偏差}}{\bar{f}(x)} \cdot 100\% \quad \dots\dots\dots(43)$$

(3) $CV(\%)$ と $U(\%)$ の関係について

以上のべてきたように $CV(\%)$ は標準偏差 σ から、また $U\%$ は平均偏差からそれぞれ求めるのであるが両者の違いは2次モーメントと1次モーメントとの違いであるからデータのばらつきの分布が不明であると(この場合が多い)両者の間にはなんら関係がなく一方から他方を導くことはできない。すなわち本来両者はまったく別物なのである。しかし分布の形がはじめからわかっているものとなれば両者の間にある一定の対応がつき、一方を知って他方を推定することができるようになる。

いま $f(x)=y$ として、 y が平均値 $\bar{f}(x)=\bar{y}$ のまわりに標準偏差 σ の正規分布をすると仮定しよう。すなわち分布関数

$$P(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(44)$$

で表わされるとする。すなわち $P(y)$ は正規分布の確率密度を与える。いまこの分布にしたがう変動の $U(\%)$ を計算すると(42)、(43)式にしたがい

$$U(\%) = \frac{1}{\bar{y}} \int_0^X |y - \bar{y}| \cdot 100$$

であるから $P(y)$ を用いてつぎのように誘導できる。

$$\begin{aligned} U(\%) &= \frac{-2}{\bar{y}} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y}) \cdot P(y) dy \cdot 100 \\ &= \frac{-2}{\bar{y}} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y}) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma}\right)^2} dy \cdot 100 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(45)$$

を計算すればよい。 $\{(y-\bar{y})/\sigma\}^2 = Z$ とすると(45)式は

$$dZ = 2 \frac{y - \bar{y}}{\sigma^2} dy$$

として

$$\begin{aligned}
 U(\%) &= \frac{-2}{\bar{y}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{z}{\bar{y}}} dz \cdot 100 \\
 &= \frac{2\sigma}{\bar{y}\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{z}{\bar{y}}} \right)_{-\infty}^0 \cdot 100 \\
 &\doteq \frac{0.797886\sigma}{\bar{y}} \cdot 100 \dots\dots\dots(46)
 \end{aligned}$$

一方、 $CV(\%) = (\sigma/\bar{y}) \cdot 100$ であるからこれとの比をとると

$$\begin{aligned}
 \frac{CV(\%)}{U(\%)} &\doteq \frac{(\sigma/\bar{y}) \cdot 100}{(0.797886\sigma/\bar{y}) \cdot 100} \\
 &\doteq 1.25331 \dots\dots\dots(47)
 \end{aligned}$$

が得られる。すなわち $U(\%)$ を約 1.25 倍すれば $CV(\%)$ が得られることになる。もちろんデータの分布が正規分布にしたがわない場合は (47) 式の関係が成立しないことは当然である。もし近似的に正規分布にしたがうならば (47) 式の関係も近似的にしか成立しない。

(4) $U(\%)$, $CV(\%)$ の計算とそのための電子回路について

得られたデータがはじめから離散的であるならば (1) の方法によればよい。しかし連続的な曲線として得られている場合は、まず第 1 の方法として第 14 図に示したように曲線から離散的にデータを読み取り、(1) の方法にもちこむ方法がある。

(第 14 図) サンプルング

この方法で読みの間隔 Δx をできるだけ小さくするのがもちろん望ましいが、計算手数が激増するので困ることになる。厳密にいうとその曲線が含んでいる最短波長成分の $\frac{1}{2}$ 波長を Δx にとればよいのであるが、最短波長を知るためにはさらに複雑な計算が要求され、結局自己矛盾に陥ることになる。そこで、ほぼすべての波をとらえうる程度に細かくということになろう。もちろん 1 次のモーメントを求める平均偏差の場合は第 11 図の斜線の面積をプランメータ、あるいは他の適当な方法で計量するという途がある。

しかし実際には高速計測のためにも電子回路を利用して計算するのが適当なように思われる。2 章でのべた伝達回路の計算結果を応用しながら簡単に計算原理を説明してみよう。

まず比較的簡単な $U\%$ の計算からのべる。

(42), (43) 式からわかるようにまず

$$\frac{1}{X} \int_0^X |f(x) - \bar{f}(x)| dx \dots\dots\dots(48)$$

を求めなくてはならない。しかし市販の測定機をみるとこの (48) 式の計算は式のとおりに厳密に行なわれていないようで、たとえばアナログコンピュータで演算するような、積分とその平均値演算操作は行なっていない。どのような方法であるかをつぎに解析してみると、まず計算にあたってつぎの仮定を設ける必要がある。その第 1 は糸むらがある特定の波長以上の大きなむらを含んでいないこと、第 2 はむらが定常不規則 (むらの性格が変動しないこと) な性質を有するという仮定である。このような仮定に合うむら曲線 $f(t)$ がいま与えられたとしよう。ここで変数に時間 t をとっているのは測定機からのむらの検出値が時間的変動として与えられるからで測定糸速を v とすると糸長 x に対して

$$x = vt \dots\dots\dots(49)$$

の関係が成立することは明らかである。

さて、 $f(t)$ は時刻 t において検出点を通過する糸の断面太さを表わすものとする、まず

$$f(t) - \bar{f}(t) \dots\dots\dots(50)$$

を求めなければならない。ここで仮定から $f(t)$ は角周波数 ω_0 以下の低周波成分を含んでいないと考えると $f(t)$ はつぎのように表わせる。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \bar{f}(t) + \{ \omega_0 \text{ 以上の角周波数のむら成分} \} \\
 &\dots\dots\dots(51)
 \end{aligned}$$

このような信号 $f(t)$ をたとえば第 2 章の (3) でのべた 1 次微分要素に通し、かつその要素の時定数 T を ω_0 以上の波が減衰しないように選んでおくとその出力は ω_0 以上の角周波数のむら成分のみになり、(51) 式から

$$f(t) - \bar{f}(t) \dots\dots\dots(52)$$

が得られる。この関係を第 15 図に示した。

つぎにこの出力 $f(t) - \bar{f}(t)$ を全波整流する。すなわち第 16 図のごとく負側の波も正側に反転させるわけである。すなわち $|f(t) - \bar{f}(t)|$ を作る。

この全波整流波をつぎに第 2 章 (2) でのべた 1 次比例要素に入れるのであるが、この場合の時定数も第 13 図の回路の時定数と同程度あるいはそれ以上に選んでお

(第15図) $(f(t) - \overline{f(t)})$ の作成

(第16図) $|f(t) - \overline{f(t)}|$ の作成

(第17図) $|f(t) - \overline{f(t)}|$ の作成

くと、すでに説明したようにこの場合は微分要素と逆に ω_0 成分以上の高い周波数成分を減衰させてしまうので整流波は平均化される。(第17図)

こうして平均偏差が算出されたのであるが、この値をその糸の平均太さで除して100倍すれば $U(\%)$ が得られる。現状では平均太さの算出とその除算はそれほど正確に行なわれていないようで半自動的操作によっている。

つぎに $CV(\%)$ の計算は定義からわかるように偏差の2乗を計算しなければならない。電子回路でこの2乗計算装置を設けた測定機は実用的に使用されているのかどうか不明であるほど、 $U\%$ が広く採用されているようである。これは2乗計算の電子回路が $U(\%)$ 計算回路に比較すればかなり複雑になるからであろう。しかし2乗計算回路はさして困難なものではない。その回路にも多くの種類があるが、大別すると3極管などの $E_g - I_p$ 特性の曲りを利用したり、あるいはダイオードを組合せて2次曲線の特性を持たせたりする非線形回路を設ける方法と、パルスの波高を入力信号で変調する方法がある。前者の一例を第18図に示したが、この場合は

(第18図) 真空管の $E_g - I_p$ 特性を利用した2乗計算

説明の要がないと思う。後者の場合には第19図のように3角波のパルス列を作りその高さを入力信号 x で変調すると出力信号の3角波群の面積 y は

$$y = kx^2 \dots\dots\dots (53)$$

k : 比例定数

(第19図) 3角パルスを利用した2乗計算

となって2乗演算が行なわれる。前者の方法はもちろんとして後者の方法も機械的な2乗演算法に比較すればはるかに高速度の演算が可能である。

以上計算方法を説明してきたが、たとえば一般に採用されている $U(\%)$ の計算において前述した2つの仮定に注意してほしいと思う。もちろんこの仮定が成立しなくとも $U(\%)$ らしい測定値が得られるが、その値の評価というか解釈はかなりむづかしい問題になる。しかしすでに説明してきたような伝達特性の理解とつぎにのべるむらの性格に関する知識によってこの問題もさして困難なものではなくなるであろう。

4. 不規則な連続的変動からの情報抽出

前章においては、たとえばデータ $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ の変動の測度として分散や平均偏差を計算したが、その計算過程においてデータの並び順序は別にどうでもよかった。しかしこれらのデータの並び順序にまで考察を展開しなければならない場合が実は非常に多い。

たとえば、ある連続工程によって生産される製品の品質変動はなにに原因するのであろうかという疑問に対しては時間的な変動状態をくわしく調べる必要がある。さらにこうした変動がその製品を用いた2次製品にどのように影響するかという問題を考える際にもまたこの調査の必要が生じてくるであろう。むらを自動制御の対象として考える際にはなおさらである。

(1) 定常確率過程

第20図に示したような不規則な波において、たとえば $t=t_0$ における値 $f(t_0)$ が t に無関係なある一定の

(第20図) 不規則波

確率的な性質にしたがって生起すると考えられるとき、この確率過程は定常であるという。そしてこのような変動を定常不規則というように表現する。またこのような定常確率過程からの、たとえば等間隔サンプリングによる標本 $f(t_1), f(t_2), f(t_3), \dots$ は定常時系列である。

(2) 自己相関関数

さて、まずこの定常時系列を例にとってみよう。いま簡単のため定常時系列 $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_N$ はその平均値 $\bar{f}=0$ とする。すなわち f_i の基線を $\bar{f}$ にとるわけである。そして第21図のようにプロットすると図のよ

(第21図) 自己相関関数の算出

うに比較的なめらかな曲線上にならんだ場合を考える。この事実はたとえば f_5 と f_4 、または f_5 と f_6 の間の相関が比較的高いことを意味していると考えてよいであろう。 f_5 と f_3 、 f_5 と f_1 のそれぞれの間の相関は前2者の場合に比較すると若干低下することになり、さらに f_5 の位置(時刻)から非常に離れた f の値との間の相関は不規則な波であるからほとんどゼロになるであろうということが一応想像できる。すなわち不規則な波の性格をとらえるのに上述の性質をくわしく調べることは一つの有効な方法であると考えられよう。

いま時系列 $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_N$ においてまず隣り同志の間の相関をみるためには

$$R_1 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} f_i \cdot f_{i+1} \quad \dots\dots\dots (54)$$

を求めればよい。また k だけ離れたデータ間の相関は

$$R_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} f_i \cdot f_{i+k} \quad \dots\dots\dots (55)$$

となる。とくに $k=0$ の場合は

$$R_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \cdot f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^2 \quad \dots\dots\dots (56)$$

であるから、前章でのべた分散の計算にほかならない。

こうして $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対応して $R_0, R_1, R_2, \dots$ が得られるが、横軸に $k \cdot \Delta t$ を、たて軸に R をとるとたとえば第22図が得られる。定常時系列であれば左右対象になるはずであるから普通は $k \geq 0$ の場合のみを計算すればよい。こうして得られる関数 $R(\tau)$ を自己相関関数と称する。ただし $\tau = k \cdot \Delta t$ すなわち τ は

(第22図) 自己相関関数の例

ずらし時間で、 $R(\tau)$ は時間 τ だけ離れた値の間の相関を示している。

第20図の場合のように連続な曲線 $f(t)$ に対して、厳密には自己相関関数は

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot f(t+\tau) dt \quad \dots\dots\dots (57)$$

と定義されている。

自己相関関数の意義は以上のようなのであるが、特殊な場合として波の波形が正弦波や矩形波のような場合の $R(\tau)$ を示すと第23図のごとくである。

いまたとえば第24図のように定常不規則な変動 $f_1(t)$

(第23図) 特別な波形の自己相関関数

(第24図) 不規則波と規則波の重量

と規則的な $f_2(t)$ が混じった和の変動 $f_1(t) + f_2(t)$ が
あるとき、 $f_1(t) + f_2(t)$ の波からは $f_2(t)$ の存在がわ
からないとする。この場合 $R(\tau)$ を調べてみると

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{f_1(t) + f_2(t)\} \{f_1(t+\tau) + f_2(t+\tau)\} dt \quad \dots\dots\dots (58)$$

すなわち

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{f_1(t) \cdot f_1(t+\tau) + f_2(t) \cdot f_2(t+\tau) + f_1(t) f_2(t+\tau) + f_2(t) f_1(t+\tau)\} dt \quad \dots\dots\dots (59)$$

となり積分記号内の第3、4項は $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の相
互相関項であるが両者の間の連帯性がまったくないと
し、この項が無視できるものとする (59) 式は

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{f_1(t) \cdot f_1(t+\tau) + f_2(t) \cdot f_2(t+\tau)\} dt \quad \dots\dots\dots (60)$$

となる。すなわち $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の各自己相関関数を
 $R_1(\tau)$ 、 $R_2(\tau)$ とすれば

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) \quad \dots\dots\dots (61)$$

になる。いま $R_1(\tau)$ が第25図のようであるならば
 $R(\tau)$ は第26図のようになり $f_2(t)$ の存在がただちに
わかることになる。

(第25図) $f_1(t)$ の自己相関関数

(第26図) $f_1(t) + f_2(t)$ の自己相関関数

いまむらの研究の場合を考えるとスライパあるいは糸
むらのむら曲線の波形は一般には不規則な形状をとり、
このむらの波形からむらの性格を補足するためには以上
のべてきた解析手法も有力な手段の一つである。たとえ
ばきわめて良好に紡績が行なわれ、人工的なむらがまっ

たくない場合は自己相関関数の形状はランダム スライ
パのそれを示すであろうし、周期的な人工的要因のむら
があるならば、たとえば第23図に示したような形状が
ランダム スライパの自己相関関数に第26図のように加
算されるであろうと思われる。また人工的なむらでも、
いわゆるドラフトによって生じるドラフトむらの場合は
ランダム スライパの自己相関関数が変形された形で現
われてくる。

こうした解析手法が実際の工程管理に具体的にどのよ
うに生かすべきであるかは、ここは別の立場から論ず
べきことであるので詳しくは触れないが、この問題はま
た今後に発展が期待される新しいテーマでもある。なお
自己相関関数は最後でものべるようにスペクトル密度関
数の算出に利用されることが多い。

(3) 自己相関関数の計算法

自己相関関数 $R(\tau)$ を具体的に計算するにはかなりの
手数を必要とすることは定義式からもわかるであろうと
思う。

まず (57) 式のように区間を無限大にとることが不可
能である。したがって有限区間の計算データから無限大
の場合の値を推定するしか仕方がない。しかし有限区間
内の計算で推定精度を上げるためには区間長をかなりひ
ろげる必要がある。したがって計算は機械的、または電子
的な計算機を用いるのがよいと思う。自己相関関数の計
算にはもちろん IBM のようなデジタル電子計算機を用
いるのもよく、また相関計算専用のリレー式計算機も
市販されている。しかしこのような方法による場合は、
たとえば糸むらのような連続曲線から標本値を読み取ら
ねばならない。もっともアナログーデジタル変換器が
あればこの必要はなくなる。一方、アナログ方式の電子
計算機による計算方法がある。たとえば録音用の磁気テ
ープに信号をパルス化して読み取らせ、そのテープから
2個の検出ヘッドを用いてヘッド間の距離をずらせて
(すなわち τ を変えて) それぞれのヘッドで検出した2
つの信号を掛算回路に入れるという方法などである。

しかしこのような電子計算機にたよらなくとも、もち
ろん計算はできるわけでその方法をつぎにのべてみよ
う。

(第27図) サンプルング