ポットモータの機械的振動(第1報)*

—懸垂型ポットモータの護謄3脚の径間と ポットモータの重心との関係—

(昭和26年2月29日受理) 会 員 太 田 友 彌**

〃 林 卓 夫

〃 堺 俊 二***

— 摘 要 —

研 究 目 的

従来ポットモータの廻転軸の研究については多くの工学者によつて、研究され相当の成果を挙げつゝある。恐らくこれ等の研究もポットモータの外枠も含めたものゝ振動の研究へと進むものと思うが筆者等は逆の行き方をして、先づポットモータの外枠の振動特性を究め、次に中空軸を含めたもの、更に廻転軸を含めたもの、更にポットを着けたものと進めて、最後に全体としての振動を取扱つて、ポットモータの設計資料並びにポットの設計に必要な知識を與えんとするにある。この理論的解析に併行して実験も進めたい意向であるが、実験の方は研究費の点で行き詰つており打開の見込が薄いので、目下のところ理論的計算のみを進めている。

研 究 結 果

第1報の程度で未だ何等結論といったものは出ていない。然し、懸垂型ポットモータではその重心位置と三脚の開きとの間にはある限度があることが判つた。

1. は し が き

ポットモータの可撓軸の振動の研究は今日まで相当行われているが、ポットモータ全体としての振動の研究は筆者等の眼界の中には未だ入っていない。ポットモータ全体としての振動は、少くとも3つの自由度をもつ連成振動になり問題は相当複雑して来るが、そこまで取扱わなければポットモータの眞実の振動は判らない。現用のポットモータには周知のように2種ある。それは懸垂型(Suspension Type)と据附型(Standing Type)であるが、後者は所謂ロッキング(Rocking)の現象を伴うので、この方の考察は後廻しにして、暫く懸垂型のポットモータの振動を取扱う。そこで、その第一歩としてポットモータの枠(Frame)の固有振動から考究して、次いで中空軸を含んだ

ものゝ振動、更に可撓軸を含んだものゝ振動へと、簡単な振動から複雑な振動へと考察を進めて行く。

さて、枠の固有振動を支配するものはポットモータの全重量と護謄3脚の開きと3脚の高さである。脚の開きの大きさは直接振動の式に陽(explicit)に入つて来るが、脚の高さはポットモータの重心の高さに影響するだけで、陽には振動の式に入つて来ない。従つて、本報では脚の高さには触れずポットモータの重心の高さを取り上げて考察を進める。

2. ポットと可撓軸(Spindle)を除いた ポットモータの固有振動 (第1図参照)

今、枠(可撓軸と酸切り覆(mushroom))を除

* Mechanical rib rations for Potmotors

** T Ota, Membea T Hayasi 大阪大学工学部

*** S Sakai, 株式会社 芝浦製作所

いた部分〕を支持する護謨3脚の位置を第1図の平面図に示すようにA, B, C, とし、3角形ABCの重心Oを原点としてABに平行にz軸、これに直角にy軸、垂直にx軸を取る。そこで、杵の重心Gの護謨3脚の上面よりの高さを l とし、

(第 1 図)

正3角形ABCの一辺の長さを a とする。そして杵が振動している或る瞬間における護謨3脚の夫々の伸びを x_1, x_2, x_3 とすれば (この x_1, x_2, x_3 は護謨3脚が杵を静止の状態を支えて縮んでいる時の長さを零として、それから測つた長さである。)

(第 2 図)

3脚の中心でOは00'だけ (第2図参照)、即ち

$$00' = x_m = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \dots \quad (1)$$

鉛直に変位し、杵の中心軸は鉛直と ϕ だけ傾く。そこで、その中心軸即ちO'G'のxy面とxz面への夫々の射影がx軸となす角を β, γ , zy面への射影がy軸となす角を θ とすれば、

$$\tan \beta = \tan \phi \cos \theta$$

$$\tan \gamma = \tan \phi \sin \theta$$

今振動の振幅は小さいとして、上式は

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \phi \cos \theta \\ \gamma &\approx \phi \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

又一方

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2) \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

然るに

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right) \\ \gamma &= \frac{x_2 - x_1}{a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

であるから、(3)に(4)を代入して

$$\begin{aligned} \cos \phi &= 1 - \frac{1}{3a^2} \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + (x_1 - x_3)^2 \right\} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

そこで、今杵の振動方程式を作るのに Lagrange の方程式を利用することにする。即ち、その方程式は周知の如く次の通りである。

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad (6)$$

但し、

T = 運動のエネルギー

V = 位置のエネルギー

q_1 = 一般座標で今の場合 x_1, x_2, x_3

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

t = 時間

上式中のT, Vは夫々次式で與えられる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_m^2 + \frac{1}{2}I_M\dot{\phi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}I_m\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_h\omega^2 \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

$$V = (M+m)g \cdot x_m - l(1 - \cos \phi)(M+m)g \\ + \frac{1}{2}k \{ (x_1 + \xi)^2 + (x_2 + \xi)^2 + (x_3 + \xi)^2 \\ - 3\xi^2 \} + I_m \omega (\dot{\beta} \gamma + \dot{\gamma} \beta) \dots\dots\dots (8)$$

但し、 M = 廻転部分を全部除いたポットモータの
質量

I_M = 同上の 0 点を通る水平軸周りの慣性能率

(第 3 図)

m = 廻転部分の質量

I_m = 廻転部分の 0 点を通る水平軸周りの慣性能率

I_h = 廻転部分の廻転軸周りの慣性能率

k = 護謨 3 脚のバネ常数

ω = 廻転部の廻転角速度

ξ = 枠を静止状態で支えている時の護謨 3 脚の伸び (今の場合負の伸びである。)

上式 (8) の最後の項は廻転部分のチャイロ効果によるポテンシャルエネルギーである。

この (7)、(8) 式に附随して静止している時の釣合条件

$$3k\xi + (M+m)g = 0 \dots\dots\dots (9)$$

がある。

さて、(2) 式を一度時間で微分すれば

$$\dot{\beta} = \dot{\phi} \cos \phi$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi} \sin \phi$$

$$\therefore \dot{\phi}^2 = \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 = \left\{ \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) \right\}^2 \\ + \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a} \right)^2$$

これ等と (1)、(4)、(5)、(9) 式を (7)、(8) 式に代入して整理すれば

$$T = \frac{1}{18}(M+m)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 \\ + \frac{1}{2}(I_M + I_m) \left\{ \frac{4}{3a^2} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2}I_h \omega^2 \dots\dots\dots (10)$$

$$V = - \left(M+m \right) gl \cdot \frac{1}{3a^2} \left\{ (x_1 - x_2)^2 \right. \\ \left. + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right\} \\ + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ + I_m \omega \left\{ \frac{x_2 - x_1}{a} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) \right. \\ \left. + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a} \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right) \right\} \dots\dots\dots (11)$$

よつて (10)、(11) 式を (16) 式に代入して

$q_1 = x_1$ について

$$\frac{1}{q} (M+m) (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) + (I_M + I_m) \\ \left\{ \frac{2}{3a^2} \left(\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} - \ddot{x}_3 \right) - \frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{a^2} \right\} \\ - (M+m) \cdot gl \cdot \frac{2}{3a^2} \{ (x_1 - x_2) - (x_3 - x_1) \} \\ + kx_1 + \frac{1}{2}I_m \omega \left\{ -\frac{1}{a^2} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) \right. \\ \left. + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a^2 \sqrt{3}} \right\} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$q_2 = x_2$ について

$$\frac{1}{q} (M+m) (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) + (I_M + I_m) \\ \left\{ \frac{2}{3a^2} \left(\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} - \ddot{x}_3 \right) + \frac{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}{a^2} \right\} \\ - (M+m) gl \cdot \frac{2}{3a^2} \{ -(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \} \\ + kx_2 + \frac{1}{2}I_m \omega \left\{ \frac{2}{a^2 \sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) \right. \\ \left. + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a^2 \sqrt{3}} \right\} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$q_3 = x_3$ について

$$\frac{1}{q} (M+m) (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) \\ + (I_M + I_m) \left\{ -\frac{4}{3a^2} \left(\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} - \ddot{x}_3 \right) \right\} \\ - (M+m) gl \cdot \frac{2}{3a^2} \{ -(x_2 - x_3) + (x_3 - x_1) \} \\ + kx_3 + \frac{1}{2}I_m \omega \left\{ -\frac{2}{a^2 \sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) \right\} \\ = 0 \dots\dots\dots (14)$$

そこで今、(12)+(13)+(14) を作ると

$$\frac{1}{3}(M+m)(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) + k(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \quad \dots \quad (15)$$

又、(12)+(13)-2×(14)を作ると

$$\begin{aligned} & (I_M + I_m) \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} - \ddot{x}_3 \right) \\ & + k \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right) \\ & - (M+m)gl \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right) \\ & + I_m \omega \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a} = 0 \quad \dots \quad (16) \end{aligned}$$

又 (12)-(13) より

$$\begin{aligned} & (I_M + I_m) \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a} - (M+m)gl \frac{x_2 - x_1}{a} \\ & + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)a \\ & + I_m \omega \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} - \dot{x}_3 \right) = 0 \quad \dots \quad (17) \end{aligned}$$

以上の三式を得る。これ等の式は、式の形を見れば判るように夫々 x 軸方向の運動、 y, z 軸周りの運動の方程式を表わしている。Lagrangeの式を煩すまでもなく少し注意してやれば直ちに書き下せる式である。

さて、(15), (16), (17) 式を連立的に解くのに

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{\lambda t} \\ x_2 &= Be^{\lambda t} \\ x_3 &= Ce^{\lambda t} \end{aligned}$$

と置く。然る時は上式は夫々

$$\frac{1}{3}(M+m)(A+B+C)\lambda^2 + k(A+B+C) = 0 \quad \dots \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & I \frac{2}{a\sqrt{3}} \left\{ \frac{\lambda^2(A+B)}{2} - \lambda^2 C \right\} \\ & + k \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \\ & - (M+m)gl \frac{2}{a\sqrt{3}} \left(\frac{A+B}{2} - C \right) \\ & + I_m \omega \frac{\lambda(B-A)}{2} = 0 \quad \dots \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & I \frac{\lambda^2(B-A)}{a} - (M+m)gl \frac{B-A}{a} \\ & + \frac{1}{2} k(B-A)a + I_m \omega \frac{2}{a\sqrt{3}} \left\{ \frac{\lambda(A+B)}{2} - C \right\} \\ & = 0 \quad \dots \quad (20) \end{aligned}$$

但し、

$$I = I_M + I_m$$

上式より A, B, C を消去すれば

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(M+m)\lambda^2 + k & \frac{1}{3}(M+m)\lambda^2 + k & -\frac{1}{3}(M+m)\lambda^2 + k \\ I \frac{\lambda^2}{a\sqrt{3}} + \frac{ka}{2\sqrt{3}} - (M+m) \frac{gl}{a\sqrt{3}} & I \frac{\lambda^2}{a\sqrt{3}} + \frac{ka}{2\sqrt{3}} - (M+m) \frac{gl}{a\sqrt{3}} & -I \frac{2\lambda^2}{a\sqrt{3}} - \frac{ka}{\sqrt{3}} \\ -I_m \omega \frac{\lambda}{a} & +I_m \omega \frac{\lambda}{a} & + (M+m) \frac{2gl}{a\sqrt{3}} \\ -I \frac{\lambda^2}{a} - \frac{ka}{2} + (M+m) \frac{gl}{a} & I \frac{\lambda^2}{a} - (M+m) \frac{gl}{a} & -I_m \omega \frac{2\lambda}{a\sqrt{3}} \\ +I_m \omega \frac{\lambda}{a\sqrt{3}} & + \frac{1}{2} ka + I_m \omega \frac{\lambda}{a\sqrt{3}} & \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を展開すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3}(M+m)\lambda^2 + k \right\} \left\{ 2I_m \omega \frac{\lambda}{a} \left\{ I \frac{\lambda^2}{a} - (M+m) \frac{gl}{a} + \frac{ka}{2} - I_m \omega \frac{\sqrt{3}\lambda}{a} \right\} \right. \\ & - \left\{ 2I \frac{\lambda^2}{a} - 2(M+m) \frac{gl}{a} + k \right\} \left\{ -I \frac{\sqrt{3}}{a} \lambda^2 - \frac{ka \cdot \sqrt{3}}{2} + (M+m) \frac{gl \cdot \sqrt{3}}{a} \right. \\ & \left. \left. + I_m \omega \frac{\lambda}{a} \right\} \right\} = 0 \quad \dots \quad (21) \end{aligned}$$

或は上式は

$$\frac{1}{3}(M+m)\lambda^2 + k = 0 \quad \dots \quad (22)$$

又は

$$I_2 \lambda^4 + \{Ika - Im^2 \omega^2 - 2I(M+m)gl\} \lambda^2 - (M+m)ka^2 gl + (M+m)^2 g^2 l^2 + \frac{k^2 a^4}{4} = 0 \quad (22)'$$

今上式で、

$$\frac{ka^2}{I} = \alpha, \quad \frac{I_m}{I} = \mu, \quad \frac{(M+m)gl}{I} = \nu$$

と置けば (22)' 式は

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{-(\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2) \pm \sqrt{(\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2)^2 - 4(\nu - \frac{\alpha}{2})^2}}{2} \\ &= \frac{-(\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2) \pm \mu \omega \sqrt{\mu^2 \omega^2 + 4\nu - 2\alpha}}{2} \end{aligned}$$

現用のポットモーターでは大体

$$\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2 > 0$$

$$\alpha - 2\nu - \frac{\mu^2 \omega^2}{2} > 0$$

であるから、

$$\lambda_3, \lambda_1, \lambda_5, \lambda_6 = \pm 1 \sqrt{\frac{\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2 \mp i \frac{\mu \omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha - 2\nu - \frac{\mu^2 \omega^2}{2}}}{2}}$$

或は

$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{-\frac{\alpha - 2\nu}{2} + \frac{\mu^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - 2\nu)^2 - 3(\alpha - 2\nu) \frac{\mu^2 \omega^2}{2} + 3 \frac{\mu^4 \omega^4}{2}}}{2}} \\ &\pm i \sqrt{\frac{\frac{\alpha - 2\nu}{2} - \frac{\mu^2 \omega^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - 2\nu)^2 - 3(\alpha - 2\nu) \frac{\mu^2 \omega^2}{2} + 3 \frac{\mu^4 \omega^4}{4}}}{2}} \\ &\equiv \pm p \pm iq \quad (25) \end{aligned}$$

よつて、(24), (25) より

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\lambda_1 t + a_1) + A_2 e^{pt} \cos(qt + a_2) \\ &\quad + A_3 e^{-pt} \cos(qt + a_3) \\ x_2 &= B_1 \cos(\lambda_1 t + b_1) + B_2 e^{pt} \cos(qt + b_2) \\ &\quad + B_3 e^{-pt} \cos(qt + b_3) \\ x_3 &= C_1 \cos(\lambda_1 t + c_1) + C_2 e^{pt} \cos(qt + c_2) \\ &\quad + C_3 e^{-pt} \cos(qt + c_3) \quad (26) \end{aligned}$$

ここで、 $A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3, B_1, b_1, B_2, b_2, B_3, b_3, C_1, c_1, C_2, c_2, C_3, c_3$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{q}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2} + \sqrt{(\alpha - 2\nu)^2 - 3(\alpha - 2\nu) \frac{\mu^2 \omega^2}{2} + 3 \frac{\mu^4 \omega^4}{4}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{ka^2}{I} - \frac{2(M+m)gl}{I} - \frac{I_m^2 \omega^2}{I^2}} + \sqrt{\frac{ka^2}{I} - \frac{2(M+m)gl}{I} - \frac{3}{2} \left(\frac{ka^2}{I} - \frac{2(M+m)gl}{I} \right) \frac{I_m^2 \omega^2}{I^2} + \frac{3}{4} \frac{I_m^4 \omega^4}{I^4}} \quad (28) \end{aligned}$$

今特別の場合として中空軸が廻転していない時を考えると、

$$\omega = 0$$

故に (28) より

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (\alpha - 2\nu - \mu^2 \omega^2) \lambda^2 + (\nu - \frac{1}{2} \alpha^2) \\ = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

となる。以上 (22), (23) 式が棒の振動方程式である。(23) 式の λ^4, λ^2 の係数並びに常数項が夫々正であるから、この振動は安定である。

(22) 式より

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i \sqrt{\frac{3k}{M+m}} \quad (24)$$

(23) 式より

は積分常数で初期条件によつて決定されるもの。

以上の結果から見ると、廻転部分が廻転しておれば、 $p \neq 0$ であるから、上下動以外の振動は減衰する。反之 $p = 0$ の時には上下動、横揺、縦揺の振動が残ることが判る。又棒の振動数には次の二種のものがある。即ち (24), (25) より

$$n_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{M+m}} \quad (27)$$

$$n_2 \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ka^2}{2I} - \frac{(M+m)gl}{I}} \quad \dots \dots (29)$$

即ち、中空軸が廻転していると枠の振動数は(28)式より判るように中空軸が廻転していない時のそれよりも増大することが判る。

$$n_2 \Big|_{\omega=0} \text{の値を大きくするには} \\ l \rightarrow 0$$

即ち、枠の重心を護謨3脚の上平面の近くにおくようにする。更に大きくするには、

$$l < 0$$

とすれば良い。

逆に枠の振動数を少くしたい時には、 a 即ち護謨3脚の開きを小さくして、 l を大きくすれば良い。然しそれには限度がある。即ち(29)式が零となる時、即ち

$$\frac{ka^2}{2I} = \frac{(M+m)gl}{I}$$

或は $ka^2 = 2(M+m)gl$

の時が限度である。普通は当然

$$ka^2 > 2(M+m)gl$$

でなければならない。

3. 結 び

ボットモータの機械的振動の研究の第一歩として懸垂型ボットモータの枠の固有振動を取扱った。その結果、枠には2種類の振動数があることが判つた。その一つは上下動でその振動数は護謨3脚のバネ常数のみに関係して、ボットモータの重心の高さ及び脚の開きには無関係のもの、他の一つは横揺でその振動数は護謨3脚の開き及び重心の高さ、3脚のバネ常数等総てに関係するものである。以上の結果は今後の研究の一資料となるもので、これだけでは設計資料にもならない。終りに本研究は文部省科学研究費の援助に依るところが多いことを附記する。