針布形成針の撓み*

(昭和26年7月7日受理) 会 員 藤 野 清 久**

網 島 貞 男***

— 摘 要 —

研究目的

針布形成針の撓みに関し特に基布の影響を考慮に入れて、針頭の垂直及び水平変位を理論的に求め、併せてそれ等の変位量を荷重の函数で表わす簡単な理論式を導いた。

研究結果

針先に水平力 P (gr) が作用したとき、

針頭の垂直変位(針頭面からの出張りの大きさ)は

$$S = aP - bP^2 \quad (\text{mm})$$

又針頭の水平変位は

$$R = cP + dP^2 \quad (\text{mm})$$

で表わされる。係数 a, b, c, d に関しては針布の種類によって異なり、その例を示すと次表のようである。

針 布 の 種 類	係 数			
	a	b	c	d
1 1 0 ^S C W C	0.0100	0.00035	0.1109	-0.000094
1 0 0 ^S 6 P	0.0089	0.00020	0.0895	0.000055
2 6 ^S F 7 P	0.0510	0.00413	0.0705	0.001660

1. 緒 言

針布形成針の撓みに関しては既に多くの研究が発表されているが、その基布の影響を考慮に入れたものが少いようであるから、特にその点を考慮に入れて理論的に針頭の垂直及び水平変位を求めたものである。

2. 形成針の撓み

針布形成針の撓みについて理論的考察をするに当つて先ず次の仮定を設ける。

- (1) 形成針は各部共完全な弾性変形をする。
- (2) 基布はドラムその他に緊密に張付けられていて形成針の接着点(クラウンの部分)を固定点と考える。
- (3) 基布は完全弾性体と考える。

a) 基布が単一の材質でできている場合

基布は各種織物を層状に貼合したものであるが、最初は単一の材質より成っているものとする。第1図において、A B C Dを一つの形成針、Pを形成針の先端にかかる荷重、 x_A, x_B, x_C を夫々D点よりA, B, Cまでの

(第 1 図)

水平距離、CD間の陰影部分を基布とする。形成針を先ずAB, BC, CDの3つの部分に分けて考える。

(1) C Dの部分

仮定に従つて針のCD部分は基布の完全弾性体上に乗っているものとする。今弾性基礎における棒の撓み

* Deflection of the Needle of Card Clothing

** Kiyohisa Fujino, Member 京都大学工学部

*** Sadao Amijima, Member 同志社大学工学部

に關する一般式を導き出そうと思う。今 q の分布荷重を受ける mn なる断面一様な棒材がその全長にわたつて連続した弾性基礎の上にのつている場合、その棒材は棒の撓みに比例した反力を基礎から受けることとなる。即ち y なる撓みを生じたときは、その比例常数を k とすれば、 ky の反力を受けることとなる。(第2図参照) 今 E をヤン

(第 2 図)

グ係数、 I を断面二次モーメント、 M 、 Q を夫々その点にかかる曲げモーメント及び剪断力とすれば次の関係がある。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx}$$

次に棒材の微小部分の平衡条件を考えると(第2図b)

$$qdx + (Q + \frac{dQ}{dx} dx) - Q - kydx = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} = ky - q$$

これを前式に入れると

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q - ky$$

これが弾性基礎にある棒材の撓み曲線の一般式である。負荷のない部分については $q = 0$ となる。即ち

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky$$

今 $\sqrt{\frac{k}{4EI}} = \gamma$ とすればその一般解は

$$y = e^{\gamma x} (a \cos \gamma x + b \sin \gamma x) + e^{-\gamma x} (c \cos \gamma x + d \sin \gamma x) \quad (1)$$

となる。 a, b, c, d は積分常数で境界条件によつて定まる。さて形成針にもどつて、第1図においてA点に P の荷重がかかった場合のC点の撓みは、C点に P なる荷重と $P(x_A - x_C)$ なるモーメントが加わつた場合のC点の撓みと同等である。今第1図において $DB \rightarrow$ の方向

に s, D より垂直下方に y をとれば

$$EI \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)_{s=sc} = P(x_A - x_C)$$

$$EI \left(\frac{d^3 y}{ds^3} \right)_{s=sc} = P \cos \theta$$

又形成針はD点において固定されていると考えると

$$s=0 \text{ において } y=0 \quad \left(\frac{dy}{ds} \right) = 0$$

これよりC点の撓み y_c 及び傾角 θ_c は次の如くなる。

$$y_c = \frac{2}{\Delta_1} \left\{ K (\cos h 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_1) + L (\sinh 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) \right\} \quad (2)$$

但し $\Delta_1 = 2 (\cosh 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_1 + 2)$

$$K = \frac{P(x_A - x_C)}{2\gamma^2 EI}$$

$$L = \frac{P \cos \theta}{2\gamma^3 EI}$$

$$\varphi_1 = \frac{\gamma x_C}{\cos \theta}$$

$$\theta_c = \frac{-2\gamma}{\Delta_1} \left\{ 2K (\sinh 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1) + L (\cosh 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_1) \right\} \quad (3)$$

(2) BC部分

θ_c によるB点の変位を y_{BC} とすれば

$$y_{BC} = \frac{x_B - x_C}{\cos \theta} \tan \theta_c \quad (4)$$

次にB点について考えると、A点に加わる荷重 P はB点に P の荷重及び $P(x_A - x_B)$ のモーメントが作用した場合に相同である。故にBC間に片持梁の理論を用いることによつてB点の y 方向の撓み y_B 及び傾角 θ_B は次の如くなる。

$$y_B = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P \cos (\theta + \theta_c)}{3} \left(\frac{x_B - x_C}{\cos \theta} \right)^3 + \frac{1}{2} P (x_A - x_B) \left(\frac{x_B - x_C}{\cos \theta} \right)^2 \right\} \quad (5)$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P \cos (\theta + \theta_c)}{2} \left(\frac{x_B - x_C}{\cos \theta} \right)^2 + P (x_A - x_B) \frac{x_B - x_C}{\cos \theta} \right\} \quad (6)$$

今(1)と(2)とを総合してB点の基布に対する水平及び垂直変位を求めると第3図から

垂直変位は

$$y_c \sin \theta + (y_B + y_{BC}) \sin (\theta_c + \theta) \quad (7)$$

水平変位は

$$y_c \cos \theta + (y_B + y_{BC}) \cos (\theta_c + \theta) \quad (8)$$

(3) ABの部分

もしAB間に何ら変形がないと仮定してもBが B_1 にまで変位するため、A点は A_1 点に到る。そのために今 B_1 よりBAに平行に $B_1 A_0$ を引き、 $AB = A_0 B_1$ とすれば、 $A_1 B_1$ は $A_0 B_1$ より $\theta_c + \theta_B$ だけ下方へ回転

(第 3 図)

していることになる。今 $A_1 A_0$ 間の垂直、水平距離を求めると夫々

$$\text{垂直距離 } (x_A - x_B) \left\{ \frac{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta)} - 1 \right\} \dots\dots (9)$$

$$\text{水平距離 } (x_A - x_B) \left\{ \frac{\sin(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta)} - \tan(\beta + \theta) \right\} \dots\dots (10)$$

実際A点はPなる荷重を受けているためにABは直線ではなく片持梁として撓む筈である。即ち $A_1 B_1$ は実際は撓んで $A_2 B_1$ となるためその垂直、水平変位は夫々

$$\left. \begin{aligned} \text{垂直変位 } \frac{P}{3EI} \frac{(x_A - x_B)^3 \sin(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)^2} \\ \text{水平変位 } \frac{-P(x_A - x_B)^3}{3EI} \frac{1}{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

となる。

結局(1)、(2)、(3)の部分の変位全部を加え合せば負荷PによるA点の変位となる。即ち垂直変位を(DよりAの方へ向つて正とす) Sとすれば

$$\begin{aligned} S = (x_A - x_B) \left\{ \frac{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta)} - 1 \right\} \\ + \frac{P}{3EI} \frac{(x_A - x_B)^3 \sin(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)^2} \\ - \left\{ y_C \sin \theta + (y_{BC} + y_B) \sin(\theta + \theta_C) \right\} \dots\dots (12) \end{aligned}$$

又水平変位を(変位の増加する方向に向つて正) Rとすれば

$$\begin{aligned} R = (x_A - x_B) \left\{ \frac{\sin(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta)} - \tan(\beta + \theta) \right\} \\ - \frac{P}{3EI} \frac{(x_A - x_B)^3}{\cos(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)} \\ + y_C \cos \theta + (y_{BC} + y_B) \cos(\theta + \theta_C) \dots\dots (13) \end{aligned}$$

b) 基布が二つの異つた材質からできている場合

次に基布が二重の層、即ち二つの異つた材質の層で構成されている場合について考えて見る。(第4図)図においてECの部分はCD部分とは異つた材質からなっているものとする。ABCDEの座標的關係位置標示は第3図の場合と同様にとるものとする。今CD間の基布の撓み反力の撓み量に対する比例常数を前と同様に k_1 とし、EC間のそれを k_2 とし、

(第 4 図)

$$\sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}} = \gamma_1 \quad \sqrt[4]{\frac{k_2}{4EI}} = \gamma_2 \text{ と表わせれば}$$

CD間において、そのy方向の変位を y_1 とすれば

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\gamma_1 s} (a_1 \cos \gamma_1 s + b_1 \sin \gamma_1 s) \\ + e^{\gamma_1 s} (c_1 \cos \gamma_1 s + d_1 \sin \gamma_1 s) \dots\dots (14) \end{aligned}$$

EC間において、同様にy方向の変位を y_2 とすれば

$$\begin{aligned} y_2 = e^{\gamma_2 s} (a_2 \cos \gamma_2 s + b_2 \sin \gamma_2 s) \\ + e^{\gamma_2 s} (c_2 \cos \gamma_2 s + d_2 \sin \gamma_2 s) \dots\dots (15) \end{aligned}$$

なる関係式が成立する。ここにおいて、 $a_1 b_1 c_1 d_1, a_2 b_2 c_2 d_2$ は夫々常数で、これらの値は、E, C, D点における境界条件によつて決定されるものであるが、実際CE部分に当る第二の基布がある場合と、無い場合とによるC点の撓みの差違は比較的小さいと考えられるから、 $a_1 b_1 c_1 d_1$ を上の連立式から決定する繁雑さを省き、先の(2)式をそのまま用いることとする。 $a_2 b_2 c_2 d_2$ はCEにおける境界条件によつて決定する。即ちC点において

$$y_1 = y_2 \quad \left(\frac{dy_1}{ds} \right) = \left(\frac{dy_2}{ds} \right)$$

E点において

$$EI \left(\frac{d^2 y_2}{ds^2} \right) = \frac{P(x_A - x_E)}{\cos \theta}$$

$$EI \left(\frac{d^3 y_2}{ds^3} \right) = P \cos \theta$$

なる4つの式より決定する。今一列として、E点がB点に一致した場合のB点のy方向の撓み y_{B2} 及びその傾角 θ_{B2} を求めると次の如くである。

$$\begin{aligned} \Delta_2 y_{B2} = 8y_C \cosh \gamma_2 (s_B - s_C) \cos \gamma_2 (s_B - s_C) \\ + 4 \frac{\theta_C}{\gamma_2} \left\{ \sin \gamma_2 (s_B - s_C) \cosh \gamma_2 (s_B - s_C) \right. \\ \left. + \cos \gamma_2 (s_B - s_C) \sinh \gamma_2 (s_B - s_C) \right\} \\ + 2A_2 \left\{ e^{2\gamma_2 (s_B - s_C)} + \cos \gamma_2 s_B \sin \gamma_2 s_C \right. \\ \left. \left\{ \cos \gamma_2 (s_B - s_C) + \sin \gamma_2 (s_B + s_C) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos^2 \gamma_2 (s_B - s_C) \} + 2B_2 \sin 2\gamma_2 (s_B - s_C) \dots (16) \\
 \Delta_2 \frac{\theta_{B2}}{\gamma_2} = & 8\gamma_C \left\{ \cos \gamma_2 (s_B - s_C) \sinh \gamma_2 (s_B - s_C) \right. \\
 & \left. - \sin \gamma_2 (s_B - s_C) \cosh \gamma_2 (s_B - s_C) \right\} \\
 & + 8 \frac{\theta_C}{\gamma_2} \cos \gamma_2 (s_B - s_C) \cosh \gamma_2 (s_B - s_C) \\
 & + A_2 \left\{ 3 \sin 2\gamma_2 (s_B + s_C) \right. \\
 & + 2 \sin^2 \gamma_2 s_C (\cos 2\gamma_2 s_B - \sin 2\gamma_2 s_B) \\
 & + \frac{1}{2} \sin 2\gamma_2 s_B \} + B_2 \left\{ 2 \cos 2\gamma_2 (s_B - s_C) \right. \\
 & \left. - 2e^{2\gamma_2 (s_B - s_C)} \right\} \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

但し $\Delta_2 = 2 \left\{ \cosh^2 \gamma_2 (s_B - s_C) + \cos 2\gamma_2 (s_B - s_C) + 2 \right\}$

$$A_2 = \frac{P(x_A - x_B)}{2EI \gamma_2^2}$$

$$B_2 = \frac{P \cos \theta}{2EI \gamma_2^2}$$

この場合のA点の垂直及び水平変位は(9)、(10)、(11)等を用いることによつて次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 S = & (x_A - x_B) \left\{ \frac{\cos(\beta + \theta + \theta_{B2})}{\cos(\beta + \theta)} - 1 \right\} \\
 & + \frac{P(x_A - x_B)^3}{3EI} \frac{\sin(\beta + \theta + \theta_{B2})}{\cos(\beta + \theta + \theta_{B2})^2} - y_{B2} \sin \theta \dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R = & (x_A - x_B) \left\{ \frac{\sin(\beta + \theta + \theta_{B2})}{\cos(\beta + \theta)} - \tan(\beta + \theta) \right\} \\
 & - \frac{P(x_A - x_B)^3}{3EI} \frac{1}{\cos(\beta + \theta + \theta_{B2})} + y_{B2} \cos \theta \dots (19)
 \end{aligned}$$

3. 数値例解

資料 a. 110^s CWC について (第5図a)

(第5図 a.) 110^s CWC

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = 76^\circ \quad \beta = 151^\circ \quad \theta = 14^\circ$$

$$EI = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 \quad k_1 = 1.7 \text{ kg/mm}^2$$

$$\varphi_1 = 1.32 \quad \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}} = 0.64$$

$$\frac{\sin(\beta + \theta + \theta_C + \theta_B)}{\cos(\beta + \theta)} - \tan(\beta + \theta)$$

$$= (\theta_C + \theta_B) - \frac{(\theta_C + \theta_B)^2}{2!} \tan(\beta + \theta)$$

とする。(θ_C+θ_B は極めて小さい値である) P (gr) に対する変位は、

$$\text{垂直変位 } S = 0.0100P - 0.00035P^2 \text{ (mm)}$$

$$\text{水平変位 } R = 0.1109P - 0.000094P^2 \text{ (mm)}$$

資料 b. 100^s 6Ply について、(第5図b)

(第5図 b.) 100^s 6Ply

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = 73^\circ \quad \beta = 149^\circ \quad \theta = 17^\circ$$

$$EI = 2.65 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 \quad k_1 = 1.98 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}} = 0.66 \quad \varphi_1 = 1.36$$

$$\text{垂直変位 } S = 0.0089P - 0.0002P^2 \text{ (mm)}$$

$$\text{水平変位 } R = 0.0875P + 0.000055P^2 \text{ (mm)}$$

資料 c. 26^s F7P について、(第5図c)

(第5図 c.) 26^s F7Ply

基布が二重になっているものの一例である。この場合第二の基布フェルトの先端は上図に見る如く針の屈曲点(腰)をこえて端部の方に少々出ているが、その量は僅かであるからフェルトの先端が屈曲点に一致していると計算する。

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = 75^\circ \quad \beta = 144.5^\circ \quad \theta = 15^\circ$$

$$EI = 2.8 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 \quad k_1 = 1.4 \text{ kg/mm}^2 \quad k_2 = 0.0037 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}} = \gamma_1 = 0.595 \quad \sqrt[4]{\frac{k_2}{4EI}} = \gamma_2 = 0.16 \quad \varphi_1 = 1.23$$

$$\text{垂直変位 } S = 0.051P - 0.00413P^2 \text{ (mm)}$$

$$\text{水平変位 } R = 0.0705P + 0.00166P^2 \text{ (mm)}$$

以上の関係式よりPに適当な値を与えることによつて、その垂直、水平変位 S, R を求めることができる。これらの資料についてSとRとの関係を第6図に示した。

(第6図)

次にその最大値を求めてみる。今針布針の間隔を 1.1 mm とすれば、針は水平変位 R が 1.1 mm に達すると次の針にぶつつかつて次の針の反力を受けるため、それ以上は撓み難くなると考えられる。この想定から水平変位は 1.1 mm を最大とする。垂直変位の最大値は $ds/dP=0$ となるとき P の値を S に入れることによつて求められるが、 R が 1.1 mm より大きくなるときは前記の条件から $R=1.1$ mm のときの P を S に入れた値を以つて S_{max} と考える。即ち言換えると、 $ds/dP=0$ のときの P を R に入れ、 $R<1.1$ mm のときは、そのままの値を以て S_{max} とし、 $R>1.1$ mm のときは、 $R=1.1$ mm に相当する P の値を S に入れて S_{max} とする。如上の条件に従つて最大値を表わすと次表の如くなる。

第1表 最大の変位

	110 ^s CWC	100 ^s 6P	26 ^s F7P
S_{max}	0.065mm	0.080mm	0.157mm
R_{max}	1.1 mm	1.1 mm	0.498mm

数値計算の場合、 EI , k_1 , k_2 等の値は総て実測によつた。なお以上 3 例の寸法の実測図を第 5 図に示した。

4. 結 論

針布形成針の撓みについて特に基布の弾性抵抗を考慮に入れて理論的に求めた。その結果針頭の変位に関して垂直変位 S と水平変位 R とは

a) 基布が単一材質でできていると考えられる場合には、それぞれ (12), (13) 式で

b) 基布が異つた 2 種の材質の層からできている場合にはそれぞれ (18), (19) 式で表わされる。

又実例として 110^s CWC、100^s 6Ply、26^s F7Ply に理論式を適用して簡単化した結果、水平荷重 P (gr) に対する分変位はそれぞれ

$$S = aP - bP^2 \quad (\text{mm})$$

$$R = cP + dP^2 \quad (\text{mm})$$

で表わすことができ、係数 a , b , c , d は次表に示す値である。 S と R の関係を第 6 図に示した。

針布の種類	係 数			
	a	b	c	d
110 ^s CWC	0.0100	0.00035	0.1109	-0.000094
100 ^s 6 P	0.0089	0.00020	0.0875	0.000055
26 ^s F7 P	0.0510	0.00413	0.0705	0.001660

なお又分変位の最大値は第 1 表に示した通りである。本研究に資料を提供していただいた金井重要工業株式会社北村氏に感謝申上げる。

参考文献

- 1) 北村義一郎、針布 β 角について、本誌 1, 2.
 - 2) 馬 渡 明、紡毛針布の弾性、本誌 2, 1.
 - 3) 今 西 正 一、針布先端硬化について、本誌 4, 1.
- 脚註: 1) Timosenko, Applied Elast.