(内 容)

序

1. 基礎的事項

2. 固有振動

2.1 1自由度系の固有振動

2.2 多自由度系の固有振動

2.3 無限自由度系(連続体)の固有振動

2.2 多自由度系の固有振動

簡単のため第2.2図(a)に示す2自由度のばね—質量系の固有振動を考えよう。いま図に示すように2個のばねのばね定数を k_1, k_2 とし、2質量 m_1, m_2 のそれ

(第 2.2 図)

ぞれの釣り合い位置からの変位を x_1, x_2 とすれば、運動の方程式は

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

この解を

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha) \quad \dots(2.9)$$

とおいて(2.8)に代入し、両辺を $\sin(\omega t + \alpha)$ で割ると

$$\left. \begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2 &= 0 \\ -k_2 A_1 + (-m_2 \omega^2 + k_2) A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

上式からは

$$\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2, & -k_2 \\ -k_2, & -m_2 \omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

が成立する場合を除いて $A_1 = A_2 = 0$ となるが、このことは系が釣り合い状態にあって振動しないことを意味する。これに対し(2.11)が成立するときには A_1, A_2 が

0でない値を有する。即ち(2.11)を満足する ω の値に等しい円振動数のときにだけ、系は(2.9)で表わされる振動を行う。(2.11)はこの系の固有振動数を決定する方程式でこれを系の振動数方程式という。(2.11)の ω^2 に関する2根を ω_1^2, ω_2^2 ($\omega_1^2 < \omega_2^2$) とすると

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \right\} \quad \dots(2.12)$$

この2根を系の固有円振動数という。このとき(2.10)から A_1, A_2 を決定することはできないが、 A_1, A_2 の比を ω_1, ω_2 のそれぞれの値に対して(2.10)のいずれか1式より決定することができる。従って(2.8)の独立な特解は

$$x_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad x_2^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$x_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad x_2^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

の形をとり、ここに(2.10)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} &= \frac{-m_1 \omega_1^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_1^2 + k_2} > 0 \\ \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} &= \frac{-m_1 \omega_2^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + k_2} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

の関係があるから、 $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ のいずれか一方と α_1 及び $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ のいずれか一方と α_2 とが任意の定数となり、これらは初期条件によって決定される。(2.13), (2.14)で表わされる振動はそれぞれ独立な振動であって、いずれの場合にも質量 m_1, m_2 は同じ振動数と0または π の位相差をもった単振動となる。(2.15)によれば(2.13)の振動では m_1, m_2 が常に同方向に振動し、(2.14)では m_1, m_2 が反対方向に振動する。このような振動の様式は第2.2図(b)のようであるが、これを第2.2図(c)に示すように質量 m_1, m_2 の位置を縦軸に、そ

* Fundamentals of Vibration for Textile Machinery. (3)

** A. Watari, Member. 東京大学生産技術研究所

これらの振幅比 (例えば $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}$ を 1 として) を横軸にとりて示すと便利である. このような振動を系の**規準振動**といい, 小さな振動数 ω_1 の振動を**基本振動**または**1 次固有 (規準) 振動**, 大きな振動数 ω_2 の振動を**2 次固有 (規準) 振動**という. (2.8) の一般解は (2.13), (2.14) を加え合せて

$$\begin{cases} x_1 = A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ x_2 = A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (2.16)$$

ここですでに述べたように $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ のいずれか一方と $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ のいずれか一方及び α_1, α_2 は初期条件によって決定される.

(第 2.3 図)

次に第 2.3 図に示す糸で質点を吊した 3 自由度系の固有振動を考えよう. いま糸の張力を T とし 3 質量 m_1, m_2, m_3 の釣り合い位置よりの変位をそれぞれ y_1, y_2, y_3 とする. この場合も (2.8) と同様な運動方程式が導かれるがここでは別な方法を示そう. (2.8) は力の釣り合いを考えて求めたが, ここではそれぞれの質量の位置に作用する慣性力 $-m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2, -m_3\ddot{y}_3$ による糸の変位を考える. それには第 2.4 図に示す k なる点に作用

(第 2.4 図)

する単位力による j なる点のたわみ即ち**インフルエンス数** $g_{jk}(=g_{kj})$ を用いると, 例えば 1 の点の変位 y_1 は $-m_1\ddot{y}_1$ による $-g_{11}m_1\ddot{y}_1, -m_2\ddot{y}_2$ による $-g_{12}m_2\ddot{y}_2, -m_3\ddot{y}_3$ による $-g_{13}m_3\ddot{y}_3$ との和となるから

$$\begin{cases} y_1 = -g_{11}m_1\ddot{y}_1 - g_{12}m_2\ddot{y}_2 - g_{13}m_3\ddot{y}_3 \\ y_2 = -g_{21}m_1\ddot{y}_1 - g_{22}m_2\ddot{y}_2 - g_{23}m_3\ddot{y}_3 \\ y_3 = -g_{31}m_1\ddot{y}_1 - g_{32}m_2\ddot{y}_2 - g_{33}m_3\ddot{y}_3 \end{cases} \quad \dots\dots(2.17)$$

前と同様に

* $\dot{y} = dy/dt, \ddot{y} = d^2y/dt^2$ 以下この記号を用いる

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha), y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha), \\ y_3 = A_3 \sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \quad \dots\dots(2.18)$$

とおいて, (2.17) に代入して整理すると

$$\begin{cases} (g_{11}m_1\omega^2 - 1)A_1 + g_{12}m_2\omega^2 A_2 + g_{13}m_3\omega^2 A_3 = 0 \\ g_{21}m_1\omega^2 A_1 + (g_{22}m_2\omega^2 - 1)A_2 + g_{23}m_3\omega^2 A_3 = 0 \\ g_{31}m_1\omega^2 A_1 + g_{32}m_2\omega^2 A_2 + (g_{33}m_3\omega^2 - 1)A_3 = 0 \end{cases} \quad \dots\dots(2.19)$$

従って (2.19) より A_1, A_2, A_3 を消去することにより振動数方程式は

$$\begin{vmatrix} g_{11}m_1\omega^2 - 1 & g_{12}m_2\omega^2 & g_{13}m_3\omega^2 \\ g_{21}m_1\omega^2 & g_{22}m_2\omega^2 - 1 & g_{23}m_3\omega^2 \\ g_{31}m_1\omega^2 & g_{32}m_2\omega^2 & g_{33}m_3\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots(2.20)$$

上式は ω^2 に関する 3 次方程式になるから, これを解けば 3 個の固有円振動数が求まり, またその値に応じて 3 個の規準振動の様式が求まる. 第 2.3 図では

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{33} &= \frac{3}{4} \frac{l}{T}, \quad g_{22} = \frac{l}{T}, \\ g_{13} = g_{31} &= \frac{1}{4} \frac{l}{T}, \quad g_{12} = g_{21} = g_{32} = g_{23} = \frac{1}{2} \frac{l}{T} \end{aligned}$$

であるが, とくに $m_1 = m_2 = m_3 = m$ の場合には $4T/(ml\omega^2) = \tau$ において (2.20) を変形すると

$$\begin{vmatrix} 3 - \tau & 2 & 1 \\ 2 & 4 - \tau & 2 \\ 1 & 2 & 3 - \tau \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を展開すると

$$(\tau - 2)(\tau - 4 + 2\sqrt{2})(\tau - 4 - 2\sqrt{2}) = 0$$

これより

$$\tau = 2, 4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}$$

従って (2.19) より

$$\tau_1 = 4 + 2\sqrt{2}, \quad \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{T}{ml},$$

$$A_1^{(1)} : A_2^{(1)} : A_3^{(1)} = 1 : \sqrt{2} : 1$$

$$\tau_2 = 2, \quad \omega_2^2 = 2T/ml, \quad A_1^{(2)} : A_2^{(2)} : A_3^{(2)} = 1 : 0 : -1$$

$$\tau_3 = 4 - 2\sqrt{2}, \quad \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})T/ml,$$

$$A_1^{(3)} : A_2^{(3)} : A_3^{(3)} = 1 : -\sqrt{2} : 1$$

となり, 規準振動の様式を示すと第 2.5 図のようになる.

(第 2.5 図)

まったく同形の運動方程式に支配されるが、(2.29) とそれらの対応を示すと第 2.3 表のようになる。(2.29) の一般解は

$$y=f_1(ct-x)+f_2(ct+x)$$

の形で与えられ、 $f_1(ct-x)$ は c なる速度で x 方向に進む波動を表わし、 $f_2(ct+x)$ は x の負の方向に進行する波動を表わす。即ち c は糸を伝わる横波の速度である。(2.29) から固有振動の解を求めるには第 2.2 節で

扱ったと同様に糸がある固有円振動数でまたある様式で単振動すると考え

$$y(x,t)=Y(x)\sin(\omega t+\alpha)\cdots\cdots\cdots(2.30)$$

とおく。ここに $Y(x)$ は座標 x だけの函数で規準振動の様式を決定するもので規準函数という。(2.30) を(2.29) に代入すると $-\omega^2 Y=c^2 Y''$ となるから*

$$* Y'=dY/dx, Y''=d^2Y/dx^2$$

(第 2.2 表) 多自由度系の固有円振動数例

k =直線ばね定数[kg/cm], m =質量[kgs²/cm], K =回転ばね定数[kg cm/rad], I =慣性モーメント[kgs²cm]

No.	振 動 系	固 有 円 振 動 数
1		$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \right\}$
2		$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_2^2}{m_1 m_2}} \right\}$
3		$\omega_1^2 = \frac{K(I_1+I_2)}{I_1 I_2}$
4		$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{K_1}{I_1} + \frac{K_2}{I_3} + \frac{K_1+K_2}{I_2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{K_1}{I_1} + \frac{K_2}{I_3} + \frac{K_1+K_2}{I_2} \right)^2 - 4 \frac{K_1 K_2}{I_1 I_2 I_3} (I_1+I_2+I_3)} \right\}$
5		$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left\{ \frac{T}{m_1} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + \frac{T}{m_2} \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{T}{m_1} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) - \frac{T}{m_2} \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right\}^2 + 4 \frac{T^2}{m_1 m_2} \frac{1}{l_2^2}} \right\}$ T =糸の張力

$Y'' + \frac{\omega^2}{c^2} Y = 0 \dots\dots\dots(2.31)$

この式の解は

$Y = C \sin(\omega x/c) + D \cos(\omega x/c) \dots\dots\dots(2.32)$

ここに C, D は積分定数で両端の状態即ち境界条件によって定められる。第2.6図のように糸の両端固定の場合は、境界条件は

$Y(0) = Y(l) = 0 \dots\dots\dots(2.33)$

この条件を (2.32) に用いると

$C \sin(\omega l/c) = 0, D = 0$

$C = 0$ では振動が起らないから、振動するためには

(第2.3表) 糸の横振動、棒の縦及び振り振動、気柱の振動

	糸の横振動	棒の縦振動	棒の振り振動	気柱の振動
振動系
記号	T = 糸の張力 ρ_1 = 糸の線密度	E = ヤング係数 A = 断面積 ρ = 密度	G = 横弾性係数 J_P = 極断面2次モーメント ρ = 密度	K = 体積弾性係数 A = 断面積 ρ = 密度
x 断面の変位 y	糸の横変位	棒の縦変位	棒の振り角	気柱の縦変位
単位長当質量 (慣性モーメント)	ρ_1	ρA	ρJ_P	ρA
x 断面に作用する力 (モーメント)	$T \frac{\partial y}{\partial x}$	$EA \frac{\partial y}{\partial x}$	$GJ_P \frac{\partial y}{\partial x}$	$KA \frac{\partial y}{\partial x}$
波 動 速 度 c	$\sqrt{T/\rho_1}$	$\sqrt{E/\rho}$	$\sqrt{G/\rho}$	$\sqrt{K/\rho}$
運 動 方 程 式	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$			
一 般 解	$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, y_i = Y_i(x) (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t), Y_i(x) = C_i \sin \frac{\omega_i}{c} x + D_i \cos \frac{\omega_i}{c} x$			
境 界 条 件	両 端 固 定	両 端 自 由	一 端 固 定 他 端 自 由	
	$Y(0) = Y(l) = 0$	$Y'(0) = Y'(l) = 0$	$Y(0) = Y'(l) = 0$	
固 有 円 振 動 数	$\omega_i = i \pi \frac{c}{l}$	$\omega_i = i \pi \frac{c}{l}$	$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2} \frac{c}{l}$	
規 準 函 数	$Y_i = C_i \sin i \pi \frac{x}{l}$	$Y_i = D_i \cos i \pi \frac{x}{l}$	$Y_i = C_i \sin \frac{(2i-1)\pi}{2} \frac{x}{l}$	
振 動 様 式
棒
気 柱

註 $K = \kappa p$ (断熱変化), κ = 定圧比熱と定積比熱との比, p = 圧力

$\sin(\omega l/c) = 0 \dots\dots\dots(2.34)$

上式は糸の両端固定の場合の振動数方程式で、これを解けば固有円振動数 ω_i は

$\omega_i = i \pi c/l \ (i=1,2,\dots) \dots\dots\dots(2.35)$

このときの固有振動数は $\omega_i/2\pi = ic/(2l)$ となるが、これは単位時間に波動が糸の両端間を往復する回数の整数倍に等しい。(2.35)の成立するとき規準函数

$Y_i = C_i \sin(\omega_i x/c) = C_i \sin(i \pi x/l), (i=1,2,\dots) \dots\dots\dots(2.36)$

が存在し、これによって i 次規準振動の振動様式を定めることができる。第2.7図は1次から3次までの規準振動の様式を示すもので、1次振動では振幅の0になる節点が2個あり、それより次数を増すごとに節点の数を1個ずつ増してゆく。(2.30), (2.35), (2.36)より第 i 次規準振動は

$$y_i = Y_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) = \sin \frac{i\pi x}{l} \left[C_i \sin \left(\frac{i\pi c}{l} t + \alpha_i \right) \right] \dots\dots\dots (2.37)$$

或は $A_i = C_i \cos \alpha_i$, $B_i = C_i \sin \alpha_i$ とおけば

$$y_i = \sin \frac{i\pi x}{l} \left(A_i \sin \frac{i\pi c}{l} t + B_i \cos \frac{i\pi c}{l} t \right) \quad (2.38)$$

で表わされるから、(2.29) の一般解はこれらの解を加え合わせて

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left(A_i \sin \frac{i\pi c}{l} t + B_i \cos \frac{i\pi c}{l} t \right) \dots\dots\dots (2.39)$$

ここに A_i, B_i は初期条件によって定められるが、いま初期条件として $t=0$ で $y=f(x), \partial y/\partial t=g(x)$ とはじ

めの変位と速度分布が与えられるときは、これらを (2.39) に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin(i\pi x/l) &= f(x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi c/l) A_i \sin(i\pi x/l) &= g(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.40)$$

(2.40)は $f(x), g(x)$ を x に関するフーリエ級数で表わしたものに外ならないから、その係数 $B_i, (i\pi c/l) A_i$ は

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx, \\ \frac{i\pi c}{l} A_i &= \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx \quad (2.41) \end{aligned}$$

から求めることができる。次にはりの横(曲げ)振動について第2.4表に示す。

(第2.4表) はりの横(曲げ)振動

振動系	<div><div> </div><div>$y=x$ 断面のはりのたわみ E=ヤング係数 ρ=密度 A=はりの断面積 J=はりの断面2次モーメント</div></div>		
運動方程式	$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0$ <p>断面一様な場合は $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad c^2 = \frac{EJ}{\rho A}$</p>		
一般解	$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)$ $\beta_i^4 = \omega_i^2/c^2, \quad Y_i(x) = C_1 \cosh \beta_i x + C_2 \sinh \beta_i x + C_3 \cos \beta_i x + C_4 \sin \beta_i x$		
固有円振動数	$\omega_i = \frac{\nu_i^2}{l^2} c = \frac{\nu_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, \quad \nu_i^2 = \beta_i^2 l^2$		
境界条件	一端固定他端自由	両端ピン支持	両端自由
	$Y(0) = Y'(0) = Y''(l) = Y'''(l) = 0$	$Y(0) = Y''(0) = Y(l) = Y''(l) = 0$	$Y''(0) = Y'''(0) = Y''(l) = Y'''(l) = 0$
振動数方程式と解 ν_1, ν_2, ν_3	$1 + \cosh \nu \cos \nu = 0$ 1.875, 4.694, 7.855	$\sin \nu = 0$ $\pi, 2\pi, 3\pi$	$1 - \cosh \nu \cos \nu = 0$ 4.730, 7.853, 10.996
振動様式
境界条件	両端固定支持	一端固定他端ピン支持	一端ピン支持他端自由
	$Y(0) = Y'(0) = Y(l) = Y'(l) = 0$	$Y(0) = Y'(0) = Y(l) = Y''(l) = 0$	$Y(0) = Y''(0) = Y''(l) = Y'''(l) = 0$
振動数方程式と解 ν_1, ν_2, ν_3	$1 - \cosh \nu \cos \nu = 0$ 4.730, 7.853, 10.996	$\cosh \nu \sin \nu - \sinh \nu \cos \nu = 0$ 3.927, 7.069, 10.210	$\cosh \nu \sin \nu - \sinh \nu \cos \nu = 0$ 3.927, 7.069, 10.210
振動様式