ラージ パッケージ用スピンドルの振動について*

(昭和31年4月28日受理)

会 員 松 本 庄 平**

中 条 芳 之 介

要 要

研 究 目 的

ラージ パッケージ用特殊スピンドルの振動を解析した。

研 究 結 果

(1) スピンドルの先端における振動たわみ、及び危険速度は次式であらわせる。

$$y = \frac{l_1 + l_2}{l_3} \cdot \frac{e \omega^2 M l_3^2 / I}{n^2 - \omega^2} \sin \omega t_1$$

$$n^2 = \frac{l_1 l_3 \beta - M g l_3}{I}$$

(2) 復原力 β はゴムの硬さ、締付け量に依存する。

(3) 固定軸、回転軸は剛性であり、振動に無関係である。

1. 緒 言

従来のスピンドルの振動はすでに論究され、それについて云々する余地は全くない。本論文において究明せんとするものは、極く最近製作されはじめた特殊な型のラージ パッケージ用スピンドルの振動についてである。もちろん振動が重視されるのは糸切れに関係があり、したがって使用され得るであろう回転範囲における振動が問題になる。この意味において、約1 000~12 000 r.p.m.間の振動を取り上げた。これ以上の回転数においては、振動そのものを論ずる場合は興味あるが、実用上さして必要ではない。

2. 理 論^{2~6)}

ステーションナリ スピンドルの構造は第1図に示す2種類あり、それぞれⅠ型、Ⅱ型スピンドルということにする。

スピンドルはナット①で台に締め付けられ、固定軸②にボール ペアリング③が備わり、回転軸④がこれに圧入され、止め金で脱け出ないようにしてある。小ナット⑤を締めると、固定軸は下端のボール ペアリングのインナ レースを下方に押し、次にディスタンス ピース⑥を押し、⑥はゴム ダンパ⑧を介してスピンドル ボス⑦のフランジを押圧する。したがって⑤を締めると、固定

軸はボスにゴム ダンパ⑧、⑨を介して固定されることになる。もちろんボスはナット①で台に固定されている。第1図より略図をかくと第2図になる。

* Studies on the Vibration of the Spindle for Large Package.

** S. Matsumoto, Y. Nakajo, Member. 京都工芸繊維大学

図において、固定点 a はスピンドルのゴム タンバの面上にあり、 b 点では l_4 が短くその点の振動の振動数が非常に高く無視して差し支えない。

また次の条件で運動方程式を考える。(第3図)

- 1) 固定軸、回転軸はそれぞれ幾何学的中心と重心とは一致している。
- 2) 回転軸の中心と固定軸の中心とは e だけ偏心している。
- 3) 遠心力の方向とスピンドルの

(第2図)

たわみの方向は

完全に一致する

以上を図で説明す

ると、第3図はスピンドルの任意の断面における中心の関係を示す。 O, O' は固定軸及び回転軸の静止位置、回転軸が

(第3図)

ω なる角速度で回転すると、ある瞬間において遠心力により、 O は O_1 に、 O' は O'_1 に移る。

(1) スピンドルの振動について

回転軸は剛性として第4図に示すごとく、スピンドルは偏心 e のため、ある瞬間 bO は bO' のごとく、 b 点を支点として θ だけたわんだ状態で回転する。

回転軸の重心を G 、固定軸は質量がなく c 点に復原力が作用するとして、 G の b 点のまわりの運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} - l_3 M g \sin \theta + \frac{l_1}{l_3} \beta y_1 l_3 = e \omega^2 M \sin \omega t_1 l_3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし I : b 点における回転軸の慣性モーメント ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$) (第5図参照)

M : 回転軸の全質量 (kg)

g : 重力の加速度 (cm/sec^2)

β : 固定軸の c 点の復原力 (kg/sec^2)

θ は非常に小さい故に $\sin \theta \approx \theta$ 、また $\theta l_3 = y_1$ 。よって

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{l_1 l_3 \beta - M g l_3}{I} \cdot y_1 = \frac{e \omega^2 M l_3^2}{I} \sin \omega t_1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式の一般解は

$$y_1 = A \cos n t_1 + B \sin n t_1 + \frac{e \omega^2 M l_3^2 / I}{n^2 - \omega^2} \sin \omega t_1$$

強制振動のみを取ると

(第4図)

(第5図)

$$y_1 = \frac{e \omega^2 M l_3^2 / I}{n^2 - \omega^2} \sin \omega t_1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$n^2 = \frac{l_1 l_3 \beta - M g l_3}{I} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$I = M \left(\frac{R^2 + r^2 + L_1^2 / 3}{4} + l_3^2 \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし R : 回転軸の外半径 (cm)

r : " 内半径 (cm)

L_1 : " 全長 (cm)

よって O 点の振動式は (3) 式より

$$y = \frac{l_1 + l_2}{l_3} \cdot \frac{e \omega^2 M l_3^2 / I}{n^2 - \omega^2} \sin \omega t_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式がスピンドルの振動をあらわすもので、 $n^2 = \omega^2$ のときが危険速度である。ところが (6) 式を解くに当って β の値の決定が問題である。スピンドルが a 点で

(第6図)

ゴム タンバを介して固定であるから、材料力学による反力を用いられない。よって第6図のごとくに実測による復原力を求めねばならない。

その結果

$$\beta = 28194.92 \text{ kg}/\text{sec}^2 \text{ (I型)}$$

$$= 18907.24 \text{ kg}/\text{sec}^2 \text{ (II型)}$$

(4) 式より危険速度は

$$n = 411 \text{ rad}/\text{sec} \text{ (3 925 r.p.m.)} \quad \dots\dots \text{ I 型}$$

$$= 228 \text{ rad}/\text{sec} \text{ (2 177 r.p.m.)} \quad \dots\dots \text{ II 型}$$

となり(6)式は実験結果とよく一致する。

β は振動に重大な役割をもっていると考えられる。今 β は固定軸の縦弾性に無関係で、ゴムだけによるものとする。

$$\beta = kx$$

であらわせる。ただし k :ばね常数 $\text{kg/cm} \cdot \text{sec}^2$, x :変位 cm である。また実験によると

$$k = f(s, h)$$

ただし s :締付け量, h :ゴムの硬さ(Duro. No.)
すなわち、ばね常数は締付け量とゴムの硬さに関係がある。かつゴム自身も共振点があり、これもまた硬さ、締付け量に関係する。筆者は実験において、締付け量により振動が変ってくることは確認しているが、 k, s, h の定量的な関係、及びゴムの共振がスピンドルの振動に及ぼす影響に関しては、今論及できない。

(2) 回転軸の剛性について

回転軸の振動系は第7図となる。軸は均一な中空軸とする。

cb に対しては

$$y_1 = [A_1 \cos m_1 x + B_1 \sin m_1 x + C_1 \cosh m_1 x + D_1 \sinh m_1 x] \sin p_1 t_1 \quad (7)$$

cO に対しては

$$y_2 = [A_2 \cos m_1 x + B_2 \sin m_1 x + C_2 \cosh m_1 x + D_2 \sinh m_1 x] \sin p_1 t_1 \quad (8)$$

b, c, O 点の境界条件より振動数を定める式が求まり、

$l_2 = al_1$ として級数に展開して解を求めると

$$m_1 l_1 = 2.650(\text{一次}), 9.920(\text{二次}) \dots \text{I型} \\ = 1.794(\text{一次}), 3.581(\text{二次}) \dots \text{II型}$$

となる。また

$$m_1^4 = \frac{\gamma_1 p_1^2}{E_1 I_1}$$

γ_1 : 回転軸の単位長さの質量 (kg/cm)

E_1 : 回転軸の縦弾性係数 ($\text{kg/cm} \cdot \text{sec}^2$)

I_1 : 回転軸の断面二次モーメント (cm^4)

より円振動数 p_1 は

$$p_1 = 4.885(\text{一次}), 68.451(\text{二次}) \dots \text{I型} \\ = 5.929(\text{一次}), 23.651(\text{二次}) \dots \text{II型}$$

(8) 式は境界条件より

$$y_2 = B_2 [\sin m_1 x - k_1 (\cos m_1 x - \cosh m_1 x) - k_2 \sinh m_1 x] \sin p_1 t_1 \quad (9)$$

ただし k_1, k_2 は $m_1 l_2$ の関数で境界条件より容易に求まる。

回転軸は固定軸のまわりを偏心 e をもって回転するから、 $e\omega^2 \gamma_1 \sin \omega t_1$ の外力を一様に受ける。故に Oc のたわみを求める振動方程式は

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \gamma_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ = e\omega^2 \gamma_1 [\sin m_1 x - k_1 (\cos m_1 x - \cosh m_1 x) - k_2 \sinh m_1 x] \sin \omega t_1 \quad (10)$$

この特解は

$$y_3 = \frac{e\omega^2}{p_1^2 - \omega^2} [\sin m_1 x - k_1 (\cos m_1 x - \cosh m_1 x) - k_2 \sinh m_1 x] \sin \omega t_1 \quad (11)$$

(10) は強制振動を示す式で、

(11) 式により一次の p_1 でも非常に大きいので、 y_3 は実験範囲の ω に対しては非常に小さい。故に回転軸自身は完全なる剛性である。

(3) 固定軸の剛性について

今第8図のごとく、I型、II型ともある位置 d 点を固定点とすることができ、 β は軸の弾性によるものと仮定すれば(これは(1)節においてゴムによるとしたが)

$$\beta = \frac{3E_2 I_2}{l'^3} \quad (12)$$

とおける。これと

$$m_2 l' = 1.87510 \text{ (一次)}$$

$$m_2^4 = \frac{\gamma_2 p_2^2}{E_2 I_2}$$

$$D = 1.05 \text{ cm (I型)} \quad 1.20 \text{ cm (II型)}$$

ただし γ_2 : 固定軸の単位長さの質量 (kg/cm)

E_2 : 固定軸の縦弾性係数 ($\text{kg/cm} \cdot \text{sec}^2$)

I_2 : 〃 断面二次モーメント (cm^4)

とより、 l', p_2 を求めると

	l' (cm)	固定軸全長 (cm)	p_2 (rad/sec)
I 型	23.9	30.68	854 (8 155r.p.m.)
II 型	32.7	23.65	—

II型は(12)式の仮定は成立しない。すなわち、固定軸は剛性で、復原力 β はゴムに依存すると言える。I型では d 点は、第1図⑥の上部ゴムダンパ面上にあることになり、第2図の a 点と一致する。

故に、I型の固定軸がスピンドルの振動に関係あるか

否かを検討する必要がある。一端固定，他端自由の丸棒のたわみ振動において，一般座標 q_i を考えると

$$y_4 = \sum_{i=1}^{\infty} q_i [\cos m_2 x - \cosh m_2 x + \frac{B}{A} (\sin m_2 x - \sinh m_2 x)] = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(u_1) \dots \dots \dots (13)$$

位置のエネルギー V ，運動のエネルギー T にラグランジュの運動方程式を適用し，微分方程式を求め，その解に外力 p_0

$$p_0 = e\omega^2 M_1 [\cos m_2 l' - \cosh m_2 l' + B/A (\sin m_2 l' - \sinh m_2 l')] \sin \omega t_1 \dots \dots \dots (14)$$

ただし M_1 ： c 点において固定軸に作用する回転軸の一部質量

を代入し，(13) 式よりたわみ振動式が求まる。

その強制振動のみを取ると

$$y_5 = ce\omega^2 M_1 [\cos m_2 l' - \cosh m_2 l' + \frac{B}{A} (\sin m_2 l' - \sinh m_2 l')] \frac{\sin \omega t_1}{p_2^2 - \omega^2} [\cos m_2 x - \cosh m_2 x + \frac{B}{A} (\sin m_2 x - \sinh m_2 x)] \dots \dots \dots (15)$$

ただし

$$c = \frac{1}{\gamma_2 \int_0^l (u_1)^2 dx + M(u_1)^2}$$

$u_{1l} = u_1$ の x に l を代入したもの

Ⅰ型は 8 155 r.p.m. で共振することを (15) 式は示している。しかし実験では，この位置では振動は安定である故に，固定軸も剛性とすべきである。したがって振動に無関係である。復原力 β はⅠ型，Ⅱ型ともゴムによると結論される。

3. 実験装置

第 9 図は実験装置を示す。

実験中，電池の電圧の低下は殆んどなく，したがってその影響はない。

また振動式変換器により矩形波 (60 cycle) を発生せしめ，これをオシログラフに入れ(第 9 図①の位置)，次に直流増幅器の入力側に入れ(第 9 図②の位置)，電気回路に過渡現象やその他の障害の混在を除去し，もって信頼度を高めた。

更に入力負荷を変動し， B 電源側より見た電圧 (250V) が一定なるかどうかを測定した。ところが A ， B 定電圧調整器を用いているにもかかわらず，その電圧変動は 6%，すなわち $\pm 15V$ であった。すなわち光電管にスリットを通った全光量を投入すると 235V となり，閉塞すると 265V となる。結局この実験装置は， B 電源の $\pm 15V$ の変動を許したものである。

無負荷の場合にはできるだけ先端近くに投影して記録した。負荷ある場合は第 10 図のごとく正確に研磨した薄肉円筒①を，スピンドル頂面に回転軸と心を合せてセメダ

(第 10 図)

インで付着せしめ，紙管②をスピンドル頂面で切断し，円筒基部に投光して記録をとった。

4. 実験結果及び考察

第 2 章の各式の計算は第 1 表の諸元を用いた。

第 11, 12 図はⅠ型及びⅡ型スピンドルの無負荷の場合の共振曲線を示す。実線は実験結果を示し，鎖線は $e = 0.004 \text{ cm}$ と仮定して (6) 式による y の値を 2 倍した理論共振曲線である。全体として見ると，理論と実験とは非常によく一致しているといえる。

(1) 危険速度について

危険速度はⅠ型，Ⅱ型において，前者では実験値 3 900 r.p.m.，理論値 3 925 r.p.m.，後者では実験値 2 250 r.p.m.，理論値 2 177 r.p.m. で，誤差は数%で一致している。(6) 式の示すごとく危険速度は，軸受間隔 l_1 ，重心の位置 l_3 ，復原力 β ，回転軸の下端軸受における慣性モーメント I に左右される。復原力 β はゴム

(第11図) 無負荷Ⅰ型スピンドル共振曲線

(第12図) 無負荷Ⅱ型スピンドル共振曲線

に依存し、したがって締付けナットの締める強さに大きく左右されるわけである。ナットの締め工合をゆるめると β が少なくなり、もちろん危険速度は低くあらわれる。

(2) スピンドルの振動たわみについて

振動たわみ y は危険速度近傍を除いては、偏心 e と $(l_1 + l_2)/l_3(k+1)$ ——ただし $k = \frac{(R^2 + r^2 + L_1^2/3)/4}{l_3^2}$ ——

(第 1 3 図)

(第 1 表)

スピ ン ド ル の 型	固 定 軸		回 転 軸									
	縦弾性係数 E_2 (kg/cm·sec ²)	密 度 (kg/cm ³)	縦弾性係数 E_1 (kg/cm·sec ²)	密 度 (kg/cm ³)	全質量 M (kg)	c 点に 集中す ると考 えられる 質量 M_1 (kg)	l_1 (cm)	l_2 (cm)	l_3 (cm)	L_1 (cm)	R (cm)	r (cm)
Ⅰ 型	$2.2 \times 980 \times 10^6$	0.00785	$0.81 \times 980 \times 10^6$	0.00714	0.2345	0.0962	21.15	3.10	8.23292	25.85	0.913	0.67
Ⅱ 型			$2.2 \times 980 \times 10^6$	0.00785	0.3374	—	13.89	11.10	8.14100	25.70	1.065	0.80

に左右される。実験結果(第11, 12図)に示すごとく e は y に大きく影響することはいうまでもなく明らかである。今、後者と y との関係を、 l_3 だけ変えることができ、他の諸元はそのままにし得ると仮定して図示すれば第13図になる。

y 曲線は共振位置を除いて、Ⅱ型はⅠ型より変位は大きい。この原因はもちろんⅡ型の e が大きいことによる。しかし、それぞれの偏心が同一であるとする、第13図でわかるように、Ⅱ型は本質的にⅠ型よりたわみ量は多いのである。この二つの理由により、Ⅱ型の振動たわみは、実験値のごとく大きくあらわれるのは当然である。

(3) 振動波形について

第14図は一例として、Ⅰ型スピンドルの 6430 r.p.m. における波形を示している。この形状は 5400 r.p.m. 以上ではすべて類似の波形で、理論波形とかなり一致して

いる。すなわち定状波形に近い。

第15図はⅡ型スピンドルの 6510 r.p.m. の波形であ

(第14図) 無負荷Ⅰ型スピンドル振動波形

(第15図) 無負荷Ⅱ型スピンドル振動波形

る。Ⅱ型においては 4000 r.p.m. 以上ではすべてこれと類似の波形である。この場合、実験波形と理論波形とはやや一致しない。これはもちろん攪乱がⅠ型に比べて、著しく大きくあらわれているためである。このようにⅡ型の攪乱が大きいことが、その振動たわみの多い第3の理由である。

(4) 荷重のある場合

スピンドルに糸を巻きつけた紙管を取りつけた場合の共振曲線は第16図(Ⅰ型)、第17図(Ⅱ型)である。

糸巻紙管の全質量は 0.1010 kg (Ⅰ型)、0.1165 kg (Ⅱ型)で、したがって回転全質量はⅠ型では $M =$

(第16図) 負荷Ⅰ型スピンドル共振曲線
(偏心著しい場合)

(第17図) 負荷Ⅱ型スピンドル共振曲線
(偏心著しい場合)

0.3355 kg, Ⅱ型では 0.4539 kg, 重心の位置 $l_3 = 10.28100$ cm (Ⅰ型), 9.83272 (Ⅱ型) となり, 危険速度に関して, 理論と実験値は全く一致する。すなわちⅠ型では実験値 3100 r.p.m., 理論値 3197 r.p.m., Ⅱ型ではそれぞれ 1780 r.p.m. と 1843 r.p.m. である。

γ は回転軸の全質量の数値そのものには無関係であり, l_3 に関係する。よって l_3 が荷重のかかることにより増大すると, 第13図において, 振動たわみ γ は, e が無負荷と負荷のあるときと同一であるならば, 危険速度

近傍を除いて, 理論的には小さくなるべきである。しかるに第16, 17図でわかるごとく, 実験結果は全く相反する結果を示している。このことは, 紙管に糸を巻き取るときの不手際のため, スピンドルの無負荷の場合の偏心 e に, 紙管と糸との重量偏心が累積した結果, 全偏心が異常に増大したためである。

5. 結 論

理論及び実験結果より次の結論を得た。

- (6) 式はスピンドルの振動たわみをよくあらわしている。
- (4) 式により危険速度は求められる。
- 復原力 B はゴム(硬さ, 締付け量)に依存する。
- Ⅱ型がⅠ型に比べ振動たわみが大きい理由は次の3点にある。
 - e の影響が著しい。
 - e を同一と仮定すると理論的にもⅡ型は振動たわみが大きい。
 - Ⅱ型はⅠ型に比べ固有振動あるいは他の何らかの原因による攪乱が著しく大きい。
- スピンドルに負荷のある場合は, 理論的に振動たわみ (e を一定として) は, 無負荷に比べて小さくなる筈である。しかし實際上たわみが大きくなるのは, 紙管及び糸層の偏心重量が累積し, 全体の偏心が大きくなるためである。
- 固定軸及び回転軸は剛性大きく振動に無関係である。

(付記) 次報でゴムの硬さ, 締付け量と振動との関係を明らかにする。

終りにスピンドルの提供を受けた日本スピンドルに厚く感謝する。

文 献

- 亙理厚: 精紡機スピンドルの高速化に関する諸問題, 機学誌, 54, 389, P. 217.
- Timosenko: 工業振動学 (昭16)
- 妹沢克雄: 振動学 (昭7)
- D. Laugharne Thornton: Mechanics applied to Vibrations and Balancing. (1939)
- Timosenko: Strength of Material. (1930)
- 湯浅亀一: 材料力学 (昭24)
- 西原, 榎木, 関口: 組合せ防振ゴムの特性について, 機械学会論文集, 95, P. 495.