被覆ロールの曲げについて*

会 員 中 島 条 男**
 “ 辻 尾 昇 三**

1. は し が き

被覆ロールの曲げの計算は、染色仕上工場の技術者にとっても、また染色仕上機械の設計者にとっても非常に重要な問題である。しかし、この問題はこれまで繊維関係の研究者はほとんど取り上げていなかった。わずかに¹⁾ Parish が被覆ロールの2次元変形の問題の研究の一環として、この問題に手を付けているにすぎない。製紙、プラスチック工業の分野をも含めて、それ以外の研究では、むしろ被覆層の存在を無視し、ロール芯をはりと考えて、はりの曲げ理論を適用し、当座を糊塗するにとどま^{2~5)}っている。もっとも Küster 社の開発した流体圧によってロール全長を加圧する型のマンゲルを利用すれば、理論的には一様分布荷重が保証される。しかし、現状ではこの種のロールは特殊なところでしか利用されおらず、依然として従来からの集中加圧力型のマンゲルが多数使用されている。

この問題はよく考えてみると、決して手の付けようのないような難問ではないのである。話はかわるが、電車や汽車はレール上を走っており、レールはいわゆる道床上にまくら木を中介として支えられている。列車が走ると、レールは移動荷重を受けてたわむ。このレールのたわみは普通のはりの曲げの理論だけでは計算できない。というのは道床がばねの働きをするからである。多くの人々の研究の結果、いわゆる弾性床上的のはりの曲げの理論が作られ、この問題が究明された⁶⁾。

被覆層の変形特性をもしばねの特性で近似できるならば、対象となる物体の形状は全くちがうけれども、道床上にあるレールの曲げと被覆層を有する加圧ロールの曲げとの間には、共通の基盤が存在するはずである。筆

者らの研究はこのような考えから出発した。

マンゲルにおけるロールの組み合わせは種々雑多である。最初からあまり複雑な場合を考えるよりも、なるべく簡単な場合から出発して、しだいに複雑な場合におよぶ方が賢明であろう。それゆえまず同じ被覆ロールどうしの接触で代表される場合を取り上げることにした。このような場合には、2本のロールのたわみ曲線が全く同じになるので、一方のロールのみを考えれば十分であり、計算が簡単になる。

2. 弾性床上的のはりの曲げ理論

被覆ロールの曲げの問題に入る前に、弾性床上的の曲げの問題を簡単に説明しておこう。第1図に示したような

(第1図) 弾性床上的のはり

座標系をとり、剪断力およびモーメントの符号を定める。外部から加わる荷重 $w(x)$ によって曲げ剛性 EI のはりはたわむが、たわむと同時に床の弾性の作用によりたわみ $y(x)$ に比例した反力 ky を生ずる。それゆえはりのたわみの式は次式で与えられる。ただしはりは一様断面とする。

$$EI(d^4 y/dx^4) = w(x) - ky \quad \dots\dots\dots (1)$$

この式の解を求めるために、まず

$$v^4 = k/EI \quad \dots\dots\dots (2)$$

* On Bending of Rubber-Covered Pressure Rollers.

** K. Nakajima, S. Tsujio, Members. 大阪府立大学 工学部

といて、同次方程式

$$d^4 y/dx^4 + \nu^4 y = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

の一般解を求める。(2), (3) の特性方程式は

$$s^4 + \nu^4 = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となり

$$s = \sqrt[4]{-1} \cdot \nu$$

n を整数とすれば

$$-1 = e^{(2n+1)\pi j}$$

とかけるから、 $\sqrt[4]{-1}$ の値は $e^{\frac{\pi j}{4}}, e^{\frac{3\pi j}{4}}, e^{\frac{5\pi j}{4}}, e^{\frac{7\pi j}{4}}$ の 4 つとなる。すなわち -1 の 4 乗根の 4 つの値は、第 2 図の複素平面において単位円上の A, B, C, D の 4 点であらわされる。

(第 2 図) $\sqrt[4]{-1}$ の複素平面上的表示

したがって (3) 式の一般解は

$$y = C_1 e^{\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}(1+j)x} + C_2 e^{\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}(-1+j)x} + C_3 e^{\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}(-1-j)x} + C_4 e^{\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}(1-j)x} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$C_1 \sim C_4$ は積分定数で、一般には複素数である。あるいはこれを実数表示すれば

$$y = e^{\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x} (A_1 \cos \frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x + B_1 \sin \frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x) + e^{-\frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x} (A_2 \cos \frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x + B_2 \sin \frac{\nu}{\sqrt[4]{2}}x) \quad \dots\dots\dots (6)$$

非同次式 (1) の一般解は、(6) 式に (1) 式の特解を加えることによって得られる。4 個の積分定数は 4 個の境界条件から決定される。

以上の議論に出てくる弾性床はとくに厚さに対する制限はない。道床を考えれば、厚さは無限大でもよい。また一定厚さの弾性層が剛体の床の上ののっており、その上にはりがおかれていてもかまわない。要は (1) 式の右辺の弾性復元力 $-k y$ を発生しさえすればよいのである。

3. 被覆ロールの曲げへの応用

弾性床の上の はりの曲げにおいて、上記のように剛体床の上にうすい弾性層をはさんで はりがおかれている

場合、まずこの はりを有限長さのロール芯でおきかえる。次にこの剛性床上の弾性層をロール芯にまきつけてしまい、余った部分は捨ててしまう。こうすると被覆ロールを剛体床の上においた場合が得られ、前節の理論をあてはめられることがわかる。

しかし実際のマングルでは、被覆ロールで剛体床をおすようなことは考えにくい。そこで剛体床の意義を考えてみよう。剛体床とはいうまでもなく変形しない床である。ということは、被覆ロールと相手の床との接触線が剛体床の表面そのものによってきまることを意味する。剛体床の表面が平面であれば、接触線は直線である。すなわち被覆ロールと剛体床との接触ということは、被覆ロールが何かある相手と接触した場合、その接触線が直線であるということでおきかえてよい。

このような相手として考えられるものに、非常に好都合なものがある。もし相手がいま考えている被覆ロールと完全に同じ被覆ロールであればどうであろうか。この場合は 2 本のロールが完全に同じであるから、荷重のかけ方も同一にさえすれば、事態は完全に対称 (2 本のロールに関して) となる。対称であれば当然の帰結として、その接触線は直線でなければならない。結局剛体床におかれた被覆ロールと 2 本の同じ被覆ロールの接触とは同じ取り扱いをしてよいことになる。

上記の考え方はさらに拡張できる。2 本の同じ被覆ロールのうち 1 本の被覆層をはがして、これを他の 1 本のロールの被覆層の上に巻き付けてしまっても、被覆層がロール芯の曲げに直接関与しないものとすれば、ロール芯の曲げの現象そのものは同じように考えることができる。すなわち被覆ロールと金属ロールとの組み合わせにおいて、被覆ロールのロール芯の曲げ剛性と金属ロールのそれとが等しければ、これを被覆層の厚さが半分の同じ被覆ロールの組み合わせでおきかえることができる。

また 3 本ロールの場合、中央が金属ロールで、他の 2 本が同じ被覆ロールであれば、対称の性質からして、中央の金属ロールはたわまない。したがって剛体床と同じことになり、さきに述べた弾性層をはさんでの はりと剛体床との接触の考えがそのままあてはまる。逆に 3 本ロールの中央が被覆ロールで、他の 2 本が同じ金属ロールの場合も、中央の被覆ロールのロール芯は たわまず、中央が金属ロールの場合と全く等価であることも明らかであろう。被覆ロールの曲げにおいては被覆層がロール全周に存在することは問題ではなく、接触部に存在することだけが現象を支配するのである。

なおこれまでは話はすべて布をはさんでない場合にか
ぎった。布の影響については後で考えることにする。

4. 基礎方程式の誘導

以上、考え方を中心に話をすすめてきた。この考え方
にたつて、被覆ロールの曲げの基礎方程式を導きたい。
ただし前に述べたように、2本のロールの接触が直線で
行なわれる場合、すなわち2本のロールのたわみ曲線
が同じである場合を取り上げる。このことを以下では上
下対称の場合と呼ぶことにし、これに対して、マングル
の中央に対して対称なことを左右対称と呼ぶことにす
る。上下対称という表現は垂直配置のマングルにしかあ
てはまらず、水平配置のものではむしろ前後対称と呼ぶ
べきであるが、簡単のためにこれも上下対称に含めるこ
とにする。

上記のように、これまでは考え方が中心だったため、
表現のややあいまいな個所もあった。それゆえここで基
礎方程式をみちびくための仮定を列記して、事態を明確
にしておく。

- (1) ロールを はりとみなし、曲げによる たわみの
みを考える。断面の変形および剪断力の影響な
どはすべて無視する。
- (2) 曲げを金属芯のみで受ける。金属芯は一樣断面
と仮定する。
- (3) 被覆の圧縮特性を線型ばねで近似する。
- (4) ロールは上下、左右ともに対称と仮定する。
- (5) ロールの軸受間距離と働き幅、布幅は同じと仮
定する (一部変更することあり)。
- (6) 重力の影響は考えない。

仮定(6)は仮定(4)の中に含まれるが、誤解を避
けるため特に掲げた。

さて全長 $2L$ の2本の同じゴム被覆ロールの両端に、
それぞれ P なる力が作用して釣り合いにある状態を第3
図に示した。金属芯を はりとみなし、その片側のみを考
えると、第4図のように被覆層の上から分布荷重 $w(x)$
を受けるはりが得られる。この場合力 P が外力であって

(第3図) 両端支持の2本の同じ被覆ロールの接触模型

(第4図) 両端支持の被覆ロールの等価力学系

分布荷重 $w(x)$ は未知反力である。図の座標系を用い、
剪断力は右上がりを正、曲げモーメントは上に つつを正
とする。ロール芯の曲げ剛性を EI 、被覆層の無負荷時
の厚さを $u(x)$ 、負荷時のそれを $z(x)$ 、はりのたわみ
を $y(x)$ 、 $z_L = z(L)$ とおく、厚さ $u(x)$ の被覆層のば
ね定数を はりのスパン方向の単位長さ当たり k/u とか
く (仮定(3))。

これらの記号を用いると、つぎの諸式が得られる。ま
ず はりの たわみと荷重との関係より

$$EI(d^4 y/dx^4) = w \quad \dots\dots\dots (7)$$

被覆層の変形と荷重との関係より

$$w = (k/u)(u - z) \quad \dots\dots\dots (8)$$

第4図に示されている幾何学的関係より

$$y = z - z_L \quad \dots\dots\dots (9)$$

これら3式より、未知関数 $y(x)$ 、 $z(x)$ 、 $w(x)$ を定
めればよい。

これら3式より y 、 w を消去すると

$$EI(d^4 z/dx^4) + (k/u)z = k \quad \dots\dots\dots (10)$$

この式を解いて $z(x)$ を求めれば、(8)、(9)式より
 $w(x)$ 、 $y(x)$ が求まる。このようにして問題は弾性床
上の はりの問題のたわみの式(1)と同じ形の式を解
くことに帰せられる。

5. 被覆層の厚さの一樣な場合の理論

5.1 一般解

以前に試みた解説⁷⁾では、(6)の形の解を用いたが、
ここでは原論文^{8~11)}における同じ形の解を用いることにす
る。

まず被覆層の厚さが一定であるから

$$u(x) = u_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおき、また

$$\xi = x/L \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\lambda^4 = (k/u_0)/(4EI/L^4) \quad \dots\dots\dots (13)$$

とおいて、(10)式を一部無次元化すると

$$d^4 z/d\xi^4 + 4\lambda^2 z = 4\lambda^4 u_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

この式と (13) 式とから、次のことがすぐにわかる。すなわちロール芯の曲げ剛性 EI/L^4 と被覆層のばね定数 k/u_0 とはそれぞれが独立に曲げに寄与するのではなくて、(13) 式の与える λ^4 というひとつの定数として寄与することになる。それゆえこの λ^4 という無次元数は、たとえば粘性流体力学におけるレイノルズ数のように、被覆ロールの曲げの現象を支配する重要な特性数である。

(14) の同次式は (3) 式と同じ形をしているから、その一般解は (6) 式と同様な式であらわされるが、ここでは次の形の解を用いた。まず

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\lambda\xi) &= (1/\sqrt{2}) (\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi \\ &\quad + \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \\ \psi_2(\lambda\xi) &= (1/\sqrt{2}) (\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi \\ &\quad - \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

とおき、 $\dot{\psi}_1(\lambda\xi) = d\psi_1(\lambda\xi)/d\xi$ をかくと

$$\begin{aligned} \psi_2^{IV}(\lambda\xi) &= -4\lambda^4 \psi_1(\lambda\xi), \\ \psi_1^{IV}(\lambda\xi) &= -4\lambda^4 \psi_2(\lambda\xi) \\ \psi_1^V(\lambda\xi) &= -4\lambda^4 \dot{\psi}_1(\lambda\xi), \\ \psi_2^V(\lambda\xi) &= -4\lambda^4 \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \end{aligned}$$

となる。すなわち $\psi_1(\lambda\xi)$, $\psi_2(\lambda\xi)$, $\dot{\psi}_1(\lambda\xi)$, $\dot{\psi}_2(\lambda\xi)$ はいずれも (14) の同次式の 1 次独立な特解である。したがって (14) 式の一般解は

$$z = u_0 + A\dot{\psi}_1(\lambda\xi) + B\dot{\psi}_2(\lambda\xi) + C\psi_1(\lambda\xi) + D\psi_2(\lambda\xi) \dots (16)$$

の形で与えられる。右辺第 1 項の u_0 は (14) 式の特解である。

$\psi_1(\lambda\xi)$, $\psi_2(\lambda\xi)$ は (15) 式より明らかのように、 ξ の奇関数、 $\dot{\psi}_1(\lambda\xi)$, $\dot{\psi}_2(\lambda\xi)$ は計算すればわかるが、いずれも偶関数である。また

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \dot{\psi}_2(0) = 0, \quad \dot{\psi}_1(0) = \sqrt{2}\lambda$$

の性質がある。(14) 式の解として (6) 式の形のものをを用いずに、(15) 式の形を用いたのは、これらの諸性質が計算に好都合であるからである。

5.2 両端支持の被覆ロール

これがもっともひろく用いられている型式のものである。左右対称の条件と関数 $\psi(\lambda\xi)$, $\dot{\psi}(\lambda\xi)$ の奇関数、偶関数の性質より、(14) 式の一般解中 $C = D = 0$ となり、(16) 式の代わりに

$$z = u_0 + A\dot{\psi}_1(\lambda\xi) + B\dot{\psi}_2(\lambda\xi) \dots (17)$$

を用いてよい。

2 個の積分定数 A , B は 2 個の境界条件によって定められる。境界条件はロール端の支持条件をあらわすもので、通常単純支持とか固定とかの条件が考えられるが、ここではもう少し現実のマンダに近しい条件を考える。

実際の機械は、ロール芯がすでにそうであるように、決して剛体ではなく、フレームおよび軸受部は弾性を有する。したがって完全な固定ということはない。また摩擦その他の影響で完全な単純支持もむづかしい。現実にはこれらの理想の場合の間になることが多い。そこでこの影響を取り入れるべく、はりの両端の傾斜が曲げモーメントに比例する場合を考える。すなわち境界条件は

$$\left. \begin{aligned} EI y''(L) &= -K y'(L) \\ EI y'''(L) &= P \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ただし $y' = dy(x)/dx$ である。(18) の第 2 式はロール端での加圧力と剪断力とが等しいという条件である。あるいはこれを無次元形に直し、(9) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}(1) + \alpha \dot{z}(1) &= 0 \\ \ddot{z}(1) &= 4\bar{y}\lambda^4 \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ただし

$$\alpha = KL/EI \quad \text{注2)} \dots (20)$$

$$\bar{y} = \bar{w}/(k/u_0) \dots (21)$$

$$\bar{w} = P/L \dots (22)$$

とおいた。 $\bar{w}$ は平均分布荷重であり、 $\bar{y}$ は $\bar{w}$ に対応する被覆層の圧縮量である。 α はフレームの剛性とロール芯断面の剛性との比で、さきに示した λ とならんで、被覆ロールの曲げにとって重要な特性数である。 $\alpha = 0$ とおくと (18) の第 1 式は $EI y'' = 0$ となり、単純支持の場合が得られ、 $\alpha = \infty$ とおくと $y' = 0$ となり、固定の場合が得られる。

(19) 式の境界条件に (16) 式の一般解を代入して積分定数を定め、こうして得られた (16) 式を (8), (9) 式に代入すれば、荷重分布およびたわみが求まる。結果を無次元形であらわせば

$$\begin{aligned} w/\bar{w} &= \{\psi_7(\lambda, \lambda\xi) + \alpha \psi_3(\lambda, \lambda\xi)\} / \{\psi_3(\lambda) \\ &\quad + \alpha \psi_5(\lambda)\} \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y/\bar{y} &= \{\{\psi_7(\lambda) - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\} + \alpha \{\psi_3(\lambda) \\ &\quad - \psi_3(\lambda, \lambda\xi)\}\} / \{\psi_3(\lambda) + \alpha \psi_5(\lambda)\} \dots (24) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \psi_3(\lambda, \lambda\xi) &= \psi_1(\lambda) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + \psi_2(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ \psi_7(\lambda, \lambda\xi) &= \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + \dot{\psi}_2(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ \psi_3(\lambda) &= \psi_3(\lambda, \lambda), \quad \psi_7(\lambda) = \psi_7(\lambda, \lambda) \\ \psi_5(\lambda) &= \psi_1^2(\lambda) + \psi_2^2(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

荷重分布の均斉の度合いを、量的に表示するには

$$w_{\min}/w_{\max}, \int_0^1 |(w/\bar{w}) - 1| d\xi, \\ \int_0^1 \{(w/\bar{w}) - 1\}^2 d\xi$$

などが考えられる。偏差の自乗平均は理論的な取り扱いをする時に便利である。しかし接触圧力が負になって、ロールのどこかに接触しない個所が発生しても、この値だけではわからない。偏差の絶対値の平均についても同様である。この点については、最小値と最大値の比はロールが接触しなくなると負数になってくれてわかりやすい。それゆえ特殊な場合を除いては、最小値と最大値との比を用い、これを荷重均斉率と名付ける。この場合荷重均斉率は

$$w_{\min}/w_{\max} = \sqrt{2} \lambda \{\dot{\psi}_1(\lambda) + \alpha \dot{\psi}_1(\lambda)\} / \{\dot{\psi}_7(\lambda) + \alpha \dot{\psi}_3(\lambda)\} \dots\dots\dots (26)$$

また最大たわみは

$$y_{\max}/\bar{y} = [\dot{\psi}_7(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda) + \alpha \{\dot{\psi}_3(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda)\}] / \{\dot{\psi}_3(\lambda) + \alpha \dot{\psi}_5(\lambda)\} \dots\dots\dots (27)$$

で与えられ、これもまた荷重分布の均斉の度合いを示すひとつの尺度である。

(24), (25), (26), (27)の諸式の示すように、これらの式の右辺には加圧力そのものは入っていない。

5.3 中央支持の被覆ロール

両端支持のロールでは、荷重分布は中央が小さくなるが、これと逆の傾向を示すものに中央支持のロールがある¹²⁾。第5図の座標系を用い、中央に作用する加圧力は

(第5図) 中央支持の被覆ロールの等価力学系

りに対しては剪断力として作用することと左右対称の性質とより、(14)式の一般解は(16)式だけでは不十分で

$$\left. \begin{aligned} z &= u_0 + A \dot{\psi}_1(\lambda \xi) + B \dot{\psi}_2(\lambda \xi) \\ &\quad + C \dot{\psi}_1(\lambda \xi) + D \dot{\psi}_2(\lambda \xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ z &= u_0 + A \dot{\psi}_1(\lambda \xi) + B \dot{\psi}_2(\lambda \xi) \\ &\quad - C \dot{\psi}_1(\lambda \xi) - D \dot{\psi}_2(\lambda \xi) \quad -1 \leq \xi \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

と書かねばならない。

4個の積分定数をきめるための境界条件として、次の4個の条件が考えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI y''(L) &= 0 \\ EI y'''(L) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ EI y'''(0_+) &= -P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

第1, 2式は両端で曲げモーメントおよび剪断力が0ということを示し、第3式は中央で傾斜が水平ということを示し、第4式の $y'''(0_+)$ というのは(28)式の第1式を用いて $y'''(0)$ を計算せよという意味で、剪断力の加圧点における飛躍と加圧力が等しいことをあらわしている。第3式は普通は固定の条件である。しかし左右対称の条件からすれば、たとえ単純支持であっても、この条件が必要である。支持点の傾斜が曲げモーメントに比例するという条件は考えなくてよい。

(28)式を(29)式に代入し、4個の積分定数をきめ、 z を(8), (9)式へ代入すれば、 $\xi \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} w/\bar{w} &= \sqrt{2} \lambda [\dot{\psi}_3(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda \xi) - \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_4(\lambda, \lambda \xi) \\ &\quad + (1/2 \lambda^2) \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_7(\lambda, \lambda \xi)] / \dot{\psi}_3(\lambda) \dots\dots (30) \\ y/\bar{y} &= \sqrt{2} \lambda [\dot{\psi}_3(\lambda) \{\dot{\psi}_2(\lambda) - \dot{\psi}_2(\lambda \xi)\} \\ &\quad - \dot{\psi}_1(\lambda) \{\dot{\psi}_4(\lambda) - \dot{\psi}_4(\lambda, \lambda \xi)\} \\ &\quad + (1/2 \lambda^2) \dot{\psi}_1(\lambda) \{\dot{\psi}_7(\lambda) \\ &\quad - \dot{\psi}_7(\lambda, \lambda \xi)\}] / \dot{\psi}_3(\lambda) \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_4(\lambda, \lambda \xi) &= \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda \xi) - \dot{\psi}_2(\lambda) \dot{\psi}_1(\lambda \xi) \\ \dot{\psi}_4(\lambda) &= \dot{\psi}_4(\lambda, \lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

荷動均斉率、最大たわみは

$$\begin{aligned} w_{\min}/w_{\max} &= \{\dot{\psi}_3(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda) - \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_4(\lambda) \\ &\quad + (1/2 \lambda^2) \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_7(\lambda)\} / \sqrt{2} \lambda \\ &\quad \{\dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda) + (1/2 \lambda^2) \dot{\psi}_1^2(\lambda)\} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\max}/\bar{y} &= \sqrt{2} \lambda [\dot{\psi}_3(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda) - \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_4(\lambda) \\ &\quad + \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_2(\lambda)] + (1/2 \lambda^2) \dot{\psi}_1^2(\lambda) \{\dot{\psi}_7(\lambda) \\ &\quad - \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda)\} / \dot{\psi}_3(\lambda) \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

で与えられる。

5.4 計算結果と考察

まず荷重分布の計算結果の若干を示したい。第6図に両端単純支持の被覆ロールの荷重分布とたわみ曲線とを示した。この図より明かなように、両端で分布荷重の値がもっとも大きく、中央でもっとも小さくなり、しかも特性数 λ の影響を受けることが大きい。 λ があまり大きくなると、中央に張力が作用することになり、ロール

(第6図) 両端単純支持ロールの荷重分布とたわみ

の接触が妨げられる。

この間の事情を明示するために、(26)、(33)式の荷重均斉率と(27)、(34)式の最大たわみを図示したのが第7図である。これらの図をみると、荷重均斉率も最大たわみも、2種の特性数 λ および α によって著しく変わることがわかる。

(第7図) 荷重均斉率と最大たわみ

λ が小さい間は荷重均斉率は1に近く、最大たわみもほとんど0に近いが、 λ がある値をこえると、荷重均斉率は急に低下し、最大たわみは急に増大する。なお被覆層は圧縮しか伝達できないから、荷重均斉率は正のみ考える。

荷重均斉率と最大たわみはまた α の影響も受ける。直観的にわかるように、両端固定の場合がもっともたわみにくく荷重均斉率も1に近い。中央支持は両端単純支持よりも若干性能がよい。材料力学によれば、両端単純支持のはりの中央に集中荷重が作用する場合と、そ

の半分のスパンの片持りの先端に集中荷重が作用する場合は、力学的には完全に等価であるが、集中荷重のかわりに分布荷重が作用する場合は等価ではない。それゆえ中央支持ロールと両端単純支持ロールとを組み合わせた場合に均圧効果は得られるが、完全な一様分布荷重とはならない。なお一様分布荷重を受ける上記と同様な2種のはりでは、片持りの方が両端単純支持のよりも最大たわみは小さい。

また荷重むらはたわみと関係があり、たわみが大きくなると荷重むらも大きくなる。このことは第7図で最大たわみが大きくなると、荷重均斉率が低下していることから理解される。したがって、しいて最大たわみを示さなくても、荷重均斉率のみで現象をほぼ記述することができる。

なお荷重均斉率と偏差の絶対値平均、自乗平均との比較を参考まで、単純支持の場合について、第8図に示しておく。この図の示すように、荷重均斉率がもっとも敏感に荷重むらを指示している。偏差の自乗平均は λ の小さいところではむしろ鈍感である。

(第8図) 両端支持の被覆ロールの荷重むらの評価

以上を要約すると、ここで取り上げたような構造のマンガルでは、荷重むらは必然的に発生するが、ロール芯の剛性、フレームなどの剛性を大きくすることにより、これを減少させることができるという平凡な結論となる。

6. 一様分布荷重を与える被覆層の厚さ分布

以上明らかになったように、両端支持、中央支持のロールでは、 $\lambda \rightarrow 0$ の極限の場合でなければ、完全な一様分布荷重は得られない。したがって、その実現のためには、他の手段を用いねばならない。このために一般に用

いられているものに、被覆層の厚さをロールの長さ方向に変化させる方法がある。

6.1 理論解

前節では、被覆ロールの曲げの基礎方程式(7)~(9) 式中 $u(x)$ を与えて、 $y(x)$ 、 $z(x)$ 、 $w(x)$ を求めた。逆に $w(x)$ を与えて、 $y(x)$ 、 $z(x)$ 、 $u(x)$ を求めることもできる。こうすればいわゆるクラウンの理論解が得られる。

まず一様分布荷重の条件より

$w(x)=w_{des}=\overline{w}$ (35)

これを(7)式に代入すると

$EI(d^4 y/dx^4)=w_{des}$ (36)

この式は一様分布荷重をうける普通の はりの たわみの式に他ならない。したがってこれまでいわれてきたように、一様分布荷重による たわみ曲線にしたがって、被覆層を ふくらませばよいことになる。しかし、もう少し考察を進める必要がある。

微分方程式(36) から $y(x)$ を求める場合の境界条件は(18)式とは若干ことなり

$$\left. \begin{aligned} EI y''(L) &= -Ky'(L) \\ y(L) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (37)}$$

剪断力の条件のかわりに たわみの条件が入っているのは、微分方程式が z でなく y に対する式で書かれていることと w をまず与えたことによる。

微分方程式(36)を境界条件(37)式のもとで解くと
 $y/y_0=\{(1-\xi^2)(5-\xi^2)+\alpha(1-\xi^2)^2\}/(1+\alpha)$ (38)

ただし

$y_0=w_{des} L^4/24 EI$ (39)

は両端固定の はりに一様分布荷重が作用したときの最大たわみである。

(8)、(9)式と(38)式とより

$$\begin{aligned} (u-u_L)/y_0 &= r\{(1-\xi^2)(5-\xi^2) \\ &+ \alpha(1-\xi^2)^2\}/(1+\alpha) \end{aligned} \text{ (40)}$$

ただし

$r=1/\{1-(w_{des}/k)\}$ (41)

w_{des}/k は、ロールが一様分布荷重をつけたときに、軸方向の単位幅、単位厚さの被覆層に生ずる圧縮ひずみをあらわす。したがって r の逆数は、被覆層が圧縮されたとき、もとの厚さの何パーセントまで圧縮されるかをあらわす。また ふくらみの最大は

$(u-u_L)_{max}/2L=(y_0/2L)r(1+\alpha)/(1+\alpha)$ (42)

で与えられる。

同様な計算を中央支持ロールに対して行なった結果のみを示すと

$(u-u_L)/y_0=r(3-6\xi^2+4|\xi^3|-\xi^4)$ (43)

$(u-u_L)_{max}/2L=(y_0/2L)(3r)$ (44)

6.2 計算結果と考察

ロール芯の たわみ曲線の式(38)が、一様分布荷重による はりの たわみの式と一致することは当然である。たわみの式(38)と ふくらみの式(40)とを比較すると、 r がかかっているかないかのちがいで、形状は全く同一である。 r^{-1} の意味は前記のとおりであるから、(38)式の右辺に r をかけるということは、被覆層の圧縮状態の厚さから、もとの自然状態の厚さを算出することに他ならない。このことは被覆層の変形特性を線型ばねと仮定したことから生ずる当然の帰結でもある。

ふくらみの曲線の式の左辺には u_L が未定々数のままに残っている。すなわち一様分布荷重の条件を支配するのは、被覆層の厚さの絶対値ではなくて、むしろその分布である。したがって都合なことに、厚さの絶対値は最大圧力とかニップ幅とかいった2次元的条件から決定することができる。ただしこのことはまた被覆層の変形特性を線型ばねと仮定したことにも関係している。すなわち圧縮ひずみ w_{des}/k が与えられると、単位長さ当たりの荷重は圧縮ひずみに比例し、厚さの絶対値とは無関係であるからである。

厚さ分布を $(u-u_L)/(u-u_L)_{max}$ の形で各種の支持条件に対して示したのが第9図である。省略したが、中央支持ロールの実際の ふくらみは中央で最小となる。 α が1よりも小さくなると、厚さ分布曲線は単純支持のそれとほとんど一致する。

(第9図) 一様分布荷重を与える被覆層の厚さ分布

両端単純支持の場合、被覆層の中央をどれだけ ふくらませばよいかを、無次元形で示したのが第10図である。(42)式より明らかなように、この量は r 、いいかえ

(第 10 図) 一様分布荷重を与える被覆層のふくらみの最大値

れば w_{des}/k の影響を受ける。 $w_{des}/k = 1$ というのは、被覆層を 100% 圧縮したことになり、これがひとつの極限となる。第 11 図によると、被覆層の圧縮ひずみの増大とともに、ふくらみの最大値は増加する。この値はまた支持条件にも関係し、単純支持に近いほど、大きな値を必要とする。

(第 11 図) 設計荷重以外で使用した場合の荷重分布

最後に特に強調せねばならないのは、この方法はある設計荷重に対してのみ有効である点である。設計荷重以外の荷重で使用すると、決して一様分布荷重は得られない。設計荷重以外の荷重で用いた場合の荷重均斉率の近似計算結果の一例を第 11 図に示した。この図の示すように、 $\bar{w} = w_{des}$ の場合の荷重均斉率は極値ではないから、設計荷重から少しでもずれると、そのずれにほぼ比例して荷重均斉率が変化する。

7. ロール間に被処理層をはさんだ場合

以上被覆ロールどうしを押しつけた場合についての議論した。しかし第 3 図の接触模型は、2 本の金属ロール間に厚さ $2u_0$ の被処理層をはさんだ場合の模型と考え

ることもできる。そうすると、このような場合については前節の議論がただちに適用できる。

それではロール間に布をはさんだらうなるであろうか。従来の研究では布の存在はロールの 2 次元変形にはほとんど影響しないとされている。しかし曲げについてはどうであろうか。この点を明らかにするには、布の変形特性もまた線型ばねであらわされると仮定して、理論をたてればよい。

このようにして被覆層も、間にはさんだ被処理層も、ともに線型ばねであらわしたから、これらの層が重なることは、ばねを直列につないだことに他ならない。もちろん上下対称の条件を考え、被処理層を半分の厚さのものを 2 枚重ねたものとする。各層のばね定数に添字 1, 2 をつけて被覆層と被処理層とを区別すれば、これから両者の総合ばね定数 k/u が

$$(k/u)^{-1} = (k_1/u_1)^{-1} + (k_2/u_2)^{-1} \quad \dots\dots\dots (45)$$

で与えられることは周知のとおりである。それゆえばね定数 k_2/u_2 、厚さ $2u_2$ の被処理層をはさんだ場合は、被覆ロールの被覆層のばね定数が k/u に、厚さが $u = u_1 + u_2$ になった場合と同じである。あるいは $\lambda^4 = (k_1/u_1)/(4EI/L^4)$ が $\lambda_1^4 = (k/u)/(4EI/L^4)$ にかわったと考えてもよい。しかも一般に

$$\lambda < \lambda_1 \quad \dots\dots\dots (46)$$

以上要するに、被処理層をはさめば、総合ばね定数したがって無次元特性数 λ は必ず低下し、前節の結果の示すように、荷重むらをむしろ減少させる。布をマングルにかける場合は $k_2 \gg k_1$ 、 $u_2 \ll u_1$ と考えられるから、 $\lambda/\lambda_1 \approx 1$ で、荷重むらは若干減少はするが、ほとんど影響されないものと思われる。

このような議論では、被覆層も被処理層も力学的には全く同じように扱ってよい。それゆえ上下対称であるかぎり、被覆層、被処理層ともに数層になっても、総合ばね定数

$$(k/u)^{-1} = \sum_{i=1}^n (k_i/u_i)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (47)$$

総合厚さ

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad \dots\dots\dots (48)$$

の一層の被覆層のみの場合へ帰着させることができ、総合無次元数

$$\lambda^{-4} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-4} \quad \dots\dots\dots (49)$$

で、現象を表現することができる。また λ は λ_i 中もっとも小さい値よりも小さくなる、

8. ロール端の軸部の影響

以上の議論では簡単のために両端の軸部の存在を無視した。しかし現実の被覆ロールではロール芯の端に軸が固定され、ロール芯の端より若干の距離へだった位置で軸受により支持されている。したがってロールの軸受間距離と働き幅とが等しいという仮定をはずす必要がある。しかも軸部の曲げ剛性はロール芯のそれに比べてはるかに小さいのが普通である。それゆえ軸部の存在はロール芯のたわみを増大し、荷重むらを大きくすることに役立つ。ではその程度はどれくらいかということが問題となる。

この場合ははりの断面積の2次モーメントが芯部と軸部とでちがうため、ちょうど段付軸の曲げの場合に相当する。すなわち(7)式の微分方程式を芯部と軸部とで別々にたて、軸部では(8)式のかわりに $w=0$ とおいて、それぞれ解を求め、これまでの境界条件のほかに、芯部と軸部との境界では、たわみ、傾斜、曲げモーメント、剪断力が連続という条件を加えて積分定数を定める。

以上の方針で計算した結果の一部を示そう。まずロール芯の端から軸受部の中心までの長さとしてロール芯の全長の半分との比を δ で、芯部の断面積の2次モーメントと軸部のそれとの比を β であらわすことにする。

両端単純支持の場合の荷重均斉率は β に無関係である。すなわち軸部の径が大きくても小さくても荷重均斉率は同じである。しかし軸部の長さは荷重均斉率に影響する。第12図にこの間の事情を示す。 λ が0.6くらいからこの影響があらわれてくる。

(第12図) 両端単純支持の場合の荷重均斉率

両端固定の場合の荷重均斉率は β の影響を受ける。第13図は $\beta=10$ の場合で、両端単純支持の場合に比べて、軸部の長さの影響は著しく、 $\delta=0.2$ くらいでは両端の

(第13図) 両端固定, $\beta=10$ の場合の荷重均斉率

支持方法のちがいの影響は比較的小さい。 $\beta=10^3$ の場合を第14図に示したが、軸部が非常にほそいと、 $\delta \approx 0$ では荷重均斉率は急にわるくなり、両端単純支持の場合の値とほとんどちがわない。 $\beta > 10^2$ では $\beta=10^3$ の場合と大差ない結果が得られる。

(第14図) 両端固定, $\beta=10^3$ の場合の荷重均斉率

特に $\beta=1$ という場合を考えてみよう。この場合は、全長 $2L(1+\delta)$ のロールをその両端で支持し、被覆層を $2L$ の部分にのみ巻いてある場合に相当する。これは全長 $2L(1+\delta)$ の被覆ロールに幅 $2L$ の布を通した場合と関連があるので、両端固定の場合の荷重均斉率を第15図に示しておく。

(第15図) 両端固定, $\beta=1$ の場合の荷重均斉率

以上要約すると次のようになる。たとえ両端の軸受部が固定に近い支持方法になっていても、ロール端の軸部の曲げ剛性が低いと、両端単純支持の場合に近づく。しかも軸部が長いと、荷重均斉率は急激に低下し、条件によっては軸部のない両端単純支持の場合よりもわるくなる。それゆえ、軸部を極力みじかくすることがのぞまれる。両端単純支持の場合はこの影響は比較的小さい。

9. 被処理層の弾性が端部のみ異なる場合—
布の耳の影響

前節ではロール芯の端部に軸の部分がついていることによる断面積の2次モーメントの変化の影響を考えたので、ひきつづいて各種の弾性が端部のみ異なることの影響について計算結果を説明しておこう。ただしここでふたたびロールの軸受間距離、ロール幅と布幅とは等しいという仮定を復活する。

この場合もロールの全長を端部と中央部とにわけて考え、それぞれ異なった総合ばね定数を用いて微分方程式をたて、前節同様にして境界条件を用いて2領域をつないでやると、解が定まる。

いま被覆層のばね定数を k_1/u_1 、被処理層の中央部のばね定数を k_2/u_2 、端部のそれを k'_2/u_2 とし、被処理層の中央部の幅と全幅との比を σ であらわす。なお簡単のために両端支持のロールのみを取り上げる。

まず単純支持の場合を考え、被処理層をはさまない時に95%という荷重均斉率を与える λ の値は、第7図より0.6であることが知られるから、 $\lambda = 0.6$ についての計算結果を以下に示す。ただしこの計算には6元の連立1次方程式を解く必要があり、結果を解析的に表示しても、各種のパラメーターの影響は判然とはしない。それゆえ数値計算に頼らざるを得ない。連立方程式の解法には HITAC 201 を用いた。

布の耳ということ想定して、被処理層の両端の部分を全幅の1%すなわち $\sigma = 0.99$ 、この部分のばね定数が中央の部分の10倍すなわち $(k_2/u_2)/(k'_2/u_2) = 0.1$ として、被覆層のばね定数と被処理層の中央の部分のばね定数との比を $(k_1/u_1)/(k_2/u_2) = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ と変化させて荷重分布を計算した結果を第16図に示した。なおこの図には一様な被処理層をはさみ、総合ばね定数が0.6の場合の荷重分布をあわせ記入した。この図の示すように $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ が大きくなるにしたがって、被処理層をはさまない時より荷重分布が一様に近付くが、逆に端部の荷重分布は中央部よりかなり高

(第16図) 被覆層と被処理層とのばね定数の比が荷重分布に及ぼす影響

くなる。しかし事を中央部にかぎっていえばそれほど大したちがいはない。このことは $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ が0.01~0.1程度変化しても、総合ばね定数がほとんど変化しないことに起因していることはただちに理解できる。

つぎに $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ を一定(0.02)にして、 $(k_2/u_2)/(k'_2/u_2)$ を0.1~0.5に変化させて、荷重分布に及ぼす影響を第17図に示したが、この場合 $(k_2/u_2)/(k'_2/u_2)$ の影響はここで計算した条件ではきわめて小さい。これもまた総合ばね定数を考えれば当然であろう。

(第17図) 被処理層の中央部と端部とのばね定数の比が荷重分布に及ぼす影響

端部の幅の影響をしらべるために、第 17 図の $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)=0.02$, $(k_1/u_1)/(k'_2/u_2)=0.002$ の場合について、 $\sigma=0.99$ と $\sigma=0.95$ との場合の荷重分布の比較を第 18 図に示した。明らかに端部の影響はこの程度の σ に対しては小さい。

(第 18 図) 被処理層の端部の幅が荷重分布に及ぼす影響

以上両端単純支持の場合について説明したが、両端固定の場合も定性的には事情はまったく同一であり、したがって両端弾性支持の場合についても端部の中央部へ及ぼす影響は端部の幅が小さいかぎりそう大きくはないものと推測される。ただし端部そのものにはかなり大きな荷重の加わることは避けられない。現実の問題としてこの影響が端部の付近に波及することは考えられる。中央支持のロールについては計算しなかったが、ほぼ同様な結論の得られることが予想される。

10. 被覆層の弾性が端部のみ異なる場合—ゴム層の端部の硬度の異なることの影響

被覆層のかたさは使用中に徐々に変化してロール軸方向にかたさ不同を生じた場合、荷重分布にどんな影響があらわれるかを考えてみよう。現実のロールにおけるかたさ不同の様式は多岐にわたるであろうが、ここでは簡単のために、被覆層の端部のばね定数が中央部のそれと異なるという極端な場合を仮定した。こうすると前節と同様な考え方により、圧力分布を求めることができる。その 2, 3 の結果を以下に説明したい。

前節と同様な記号のほか、端部の被覆層のばね定数として k'_1/u_1 を用いることにする。ここでも両端単純支持の場合のみを取り上げ $\lambda=0.6$ とする。

まず $\sigma=0.8$, $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)=0.02$ と定め、 $(k_1/u_1)/(k'_1/u_1)$ を $2 \sim 1/2$ の範囲で変化させて、被覆層の中央部と端部とのばね定数の比の荷重分布に及ぼす影響をしらべた。結果は第 19 図に示す。図中 $(k_1/u_1)/(k'_1/u_1)=1$ は一様な被覆層の場合で、この値がたとえば 1 より大きいと、中央部の荷重分布は増加し、端部ではこれを補うべく低下し、その境界では荷重分布が急激に変化する。計算の便宜上ばね定数が不連続的に変化すると仮定したが、実際のロールではもう少し緩慢に変化すると考えられるから、上記の荷重分布の急激な変化はある程度緩和されるであろう。しかしそれにしてもなお相当な変化を伴ない。マングルの機能を著しく阻害する危険がある。

(第 19 図) 被覆層の中央部と端部とのばね定数の比が荷重分布に及ぼす影響

被覆層のばね定数と被処理層のそれとの比 $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ の影響をしらべるために、前同様 $\sigma=0.8$, $\lambda=0.6$ とし、 $(k_1/u_1)/(k'_1/u_1)=2$ に対して $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ を $0.1 \sim 0.01$ に変化させた場合の荷重分布を第 20 図に示した。この場合は前記の場合とちがって総ばね定数はほとんど変化しないので、荷重分布曲線もごくわずかに変化しない。しかしばね定数の不連続部に、荷重分布の激しい不連続を生ずることにはかわりはない。

端部の幅の影響をしらべるために、 $\lambda=0.6$, $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)=0.02$, $(k_1/u_1)/(k'_1/u_1)=1/2$ として、 $\sigma=0.8, 0.9$ の場合の荷重分布を計算した結果で第 21 図に示す。端部の幅がひろくなると、荷重分布は两部分とも一様被覆層の場合とほぼ平行に若干低下するが、境界における不連続はやはり激しい。

(第 20 図) 被覆層と被処理層とのばね定数の比が荷重分布に及ぼす影響

(第 21 図) 被覆層の端部の端が荷重分布に及ぼす影響

以上の諸傾向は λ が変わっても、支持条件が変わっても、定性的にはみとめられる。なお不連続部における荷重変化は理論的には

$$\{1 + (k_1/u_1)/(k_2/u_2)\} / \{(k_1/u_1)/(k_1'/u_1) + (k_1/u_1)/(k_2/u_2)\}$$

で与えられ、 α 、 λ 、 σ には無関係である。

11. 被処理層の幅がロールの働き幅よりせまい場合—布幅の影響

これまではロール間に被処理層をはさまない場合あるいは被処理層の幅とロールの働き幅とが等しい場合のみを考えてきた、しかし実際問題としては、ロールの働き

幅より若干せまい幅の被処理層を通して、このことが被処理層に加わる荷重分布にどんな影響を与えるかを考えておく必要がある。

いま仮定の一部を変更し、ロールの働き幅 $2L$ に対して被処理層の幅は $2\sigma L$ とする。この時、ロール端部に空隙を生ずる場合と生じない場合とが考えられるが、ここではまず端部に空隙を生ずる場合を取り上げる。

ここで前に第 8 節のロール軸の軸部の影響を論じた際、特に $\beta = 1$ すなわちロール芯の断面の 2 次モーメントとロール軸とのそれが等しい場合にふれたことを想起されたい。そこでは全長 $2L(1+\delta)$ の両端支持のロールに被覆層を $2L$ の幅の部分にのみ巻いて、被処理層をはさまずに接触させている。いまこのロールに幅 $2L$ の被処理層をはさまず 2 本のロールの被覆層どうしは接触しなくなる。そこで両端のすいた部分にまで被覆層を巻いてしまうと、全長 $2L(1+\delta)$ の両端支持のロールの全幅に被覆層が巻いてあり、このロールの間に幅 $2L$ の被処理層をはさんで、しかも両端の被覆層がたがいに接触しない場合となる。それゆえロール幅に關した量を $1/(1+\delta)$ に縮小し、被覆層のばね定数を総合ばね定数におきかえて、これに付随した変更を加えれば、本節の今考えている端部に隙間を生ずる場合が得られる。

このように考えて、両端単純支持ロールに対する第 12 図の結果をひき直すと、第 22 図を得る。両端固定ロールならば、第 15 図をひき直せばよい。この図の示すように、被処理層の幅がロールの働き幅の 80% までくらいならば、荷重均斉率は若干向上する。このことは極端な場合を考えれば、自ら明らかである。すなわち被処理層の幅が非常に狭くなると、荷重分布がきわめて平坦になることはすぐ理解できるところである。

(第 22 図) ロール端部に空隙を生ずる場合の荷重均斉率

第2の端部に空隙を生じない場合については、前節、
前々節同様2領域にわけて基礎方程式をたてて議論す
ればよい。詳細は省略するが、この場合も端部に空隙を生
ずる場合とはほぼ同様な傾向が得られる。なおいずれの場
合においても、被処理層の端部で被覆層の厚さが不連続
的に変化すると仮定しているが、実際には連続的にしか
変化し得ないから、被処理層のない部分の低い荷重分布
の影響が被処理層の端部へ波及することは当然考えられ
る。

12. 2種の均圧機構の効果の解析

12.1 ロールの両端に逆向きの曲げモーメントを加え
ることによる均圧効果

ここで話題を変えていわゆる均圧機構の効果をしらべ
てみよう。まず Farmer Norton 社のマングルで代表
されるモーメントによる均圧機構から始める。

この場合は 5.2 の境界条件 (18) 式を

$$\left. \begin{aligned} EI y''(L) &= -M = -\mu M_F \\ EI y'''(L) &= P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

でおきかえ、両端に力 P とモーメント M とが作用する
場合と考えればよい。ただし M を両端固定の場合の固
定モーメント

$$M_F = -(PL/2) \cdot \varphi_4(\lambda) / \{\lambda^2 \cdot \varphi_5(\lambda)\} \dots\dots (51)$$

で無次元化して μ であらわした。

(50)式の境界条件で基礎方程式を解いて荷重分布およ
びたわみを計算すると

$$\left. \begin{aligned} w &= \mu \cdot w_F + (1-\mu) \cdot w_S \\ y &= \mu \cdot y_F + (1-\mu) \cdot y_S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

となり、いずれも μ の1次式で与えられる。ただし添字
 F, S はそれぞれ両端固定および両端単純支持の場合を
あらわす ((23), (24) 式参照)。したがって荷重分布は
 μ の値によってその形状が変化する。第23図に $\lambda = 0.6$
の場合の荷重分布と μ との関係を示す。

いま荷重分布をもっとも一様分布に近づけるために、
 μ の最適値を求めてみよう。荷重分布の均斉の程度をあら
わすのに、第5節では実用面から考えて $w_{\min}/w_{\max}$
を用いて荷重均斉率と定義したが、この表現は理論的取扱
いには不適なので、ここでは自乗偏差の平均

$$\int_0^1 (w/\bar{w} - 1)^2 d\xi$$

を評価関数にとり、この式中に (52) 式の第1式を代入
し、この積分を極小にするような μ の値を求める。

計算結果は第24図のようになり、最適モーメントが
剛性比 λ の関数として定まる。この μ の最適値 μ_{opt} あ

(第23図) 両端に加えられた曲げモーメントの
大きさが荷重分布に及ぼす影響

(第24図) 最適曲げモーメントと λ との関数

るいは両端に加えるべきモーメント M_{opt} を用いて λ
 $= 0.6$ のときの荷重分布を計算して、第24図(注4)にあわせ記
入した。荷重分布が完全に平坦になるのではないこと
が、この図より知られる。

(52) 式の第1式を、各 λ およびそれに対応する μ_{opt}
の値を用いて計算し、これより荷重均斉率 $w_{\min}/w_{\max}$
を計算すると、第25図を得る、この図より明らかなよう
に、曲げモーメントによる均圧機構をうまく用いると、

(第 25 図) 最適曲げモーメントを加えた場合と加えない場合との荷重均斉率の比較

いかえれば固定モーメントの約 1.3 倍のモーメントを両端に加えると、荷重均斉率は両端固定の場合よりもさらに 1 に近づく、しかも両端の支持条件は単純支持で足る。

12.2 中間 2 点支持による均圧効果

両端で支持した はりよりも中間の 2 点で単純支持したはりの方が一様分布荷重に対して たわみが小さいことは、材料力学の教えるとおりである。このことからロールの支持点を両端から中間の 2 点へ移すことによる均圧効果が期待される。

この場合は $0 \leq x \leq L$ の区間を $0 \leq x \leq L_2$ と $L_2 \leq x \leq L$ の 2 区間にわけて考え、境界条件によって、これら 2 区間における解をつないでやればよい。ただし支点位置を L_2 であらわし、 $\sigma = L_2/L$ で無次元化しておく。

たとえば $\lambda = 0.6$ において荷重分布を計算した結果を示すと第 26 図を得、支持位置 σ によって荷重均斉率が変化することがわかる。このような荷重分布曲線から荷重均斉率を計算して図示すると、第 27 図を得る。この図から明らかなように、最適支点位置は λ によってはほんのわずかしかな変化せず、 $\sigma \approx 0.55$ で与えられる。いま $\sigma = 0.55$ に固定し、 λ をかえて荷重分布を計算すると、荷重分布は λ のいかにかわらず、 $\xi = 0$ で極小、 $\xi = \sigma$ で極大、 $\xi = 1$ で最小となる傾向を示す。これより荷重均斉率を算出し、 λ に対してプロットすると、第 28 図を得る。この図から明らかなように、中間 2 点支持では、たとえ λ の値が高くなっても、非常に 1 に近い均斉率が得られる。

以上は単純支持の場合であるが、もしこれを固定にできるならば、さらにすぐれた均斉率が得られるであろう。しかし現実の問題としては、構造的な困難が大きく、おそらく実用化は無理と思われる。

(第 26 図) 中間 2 点単純支持ロールの荷重分布と支点位置との関係

(第 27 図) 中間 2 点単純支持ロールにおける荷重均斉率と支点位置との関係

(第 28 図) 中間 2 点単純支持ロールの荷重均斉率とその他の支持法によるロールのそれとの比較

13. む す び

以上マンダルの圧力分布に及ぼす各種の因子の影響を純理論的に説明した。純理論的な解析の結果は、数学模型を組み立てるのに用いた仮定によってかなり影響される。用いた仮定の中には相当思い切ったものもあるが、理論的取り扱いを可能にするための必要最小限のものにとどめたつもりである。こういう点を考慮すれば、本研究の結果は、そのまま実際のマンダルのあてはまると主張すべきではなく、むしろ理想化された模型に関する結果として、今後のマンダルの関する実験的研究あるいはマンダルの設計、保全などに対して指針を与えるものと考えらるべきであろう。

上記の問題のほかに、各種の因子の影響を論ずる際に用いた無次元定数に関する問題が残っている。実際のマンダルの与えられたとき、これらの定数がどんな値をとるであろうかということは、実用面からすれば非常に重要な問題である。しかしこのような研究は、わが国の研究機関の現状からすれば、死角に入ってしまった、なかなか実行されないのではなからうか。

マンダルの荷重分布の問題は非常に基本的な重要な問題である。この問題の基礎的取り扱いが今日まで放置されてきたことには、むしろ奇異の感を抱かされる。しかもいざ取り上げてみると、本質的には案外簡単な問題で、コロンブスの卵を連想せざるを得ない。筆者らにしても、本会染色加工機械研究委員会マンダる部会に委員として出席していなかったならば、本研究に着手することはなかったであろう。その意味で、この機会を与えられた同部会に対して深甚の謝意を表するしだいである。さいわい電子計算機の進歩した時代となり、従来ならば計算を断念せざるを得なかったような複雑な問題も楽々と取り扱えるので、さらに本問題を深く掘り下げることによって、与えられた恩恵に報いたい。

なお本稿の一部はすでに本誌に掲載済みであるが、理解の便を考へて、あえて重複して掲げたことを断つておく。

注

- 注1) 原論文では分布荷重の積分が加圧力に等しいという条件をもあげているが、ここでは、この条件を境界条件の方へまわした。それゆへ後出の境界条件も多少かわっている。
- 注2) 原論文では $\alpha=1/KL$ としているが、この表現の方がわかりやすいので、この定義を用いた。以下の諸式でも原文にくらべ α の位置がちがってくる。
- 注3) 原論文では荷重変動率と名付けたが、均斉率の方がより合理的であろう。
- 注4) 厳密にはモーメントの正負を考えねばならないが、モーメントの向きは直観的に直ちに理解できるから、ここでは絶対値のみに注目した。

文 献

- 1) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 12, 333 (1961)
- 2) E. Moss; J. Text. Inst., 50., P654 (1959)
- 3) A. H. Nissan, ed.: Textile Engineering Processes, p. 238 (1959) London, Butterworth.
- 4) R. C. Sturken, D. A. Verner; Tappi, 38, 676 (1955)
- 5) M. Jukich; Mod. Plast., 33, No. 8, 138 (1956)
- 6) 例へば Th. v. Kármán, M. Biot; Mathematical Methods in Engineering, p. 271 (1940) New York, McGraw-Hill.
- 7) 中島; 繊維工学, 20, P569 (1967) または日本繊維機械学会染色加工機械研究委員会マンダる部会編: マンダるの作用と構造, p. 53 (1968) 大阪, 日本繊維機械学会
- 8) 中島, 辻尾; 繊維機械学会論文集, 19, T252 (1966)
- 9) 中島, 辻尾; 繊維機械学会論文集, 19, T274 (1966)
- 10) 中島, 辻尾, 加納; 繊維機械学会論文集, 21, T125 (1968)
- 11) 中島, 辻尾; 繊維機械学会論文集, 21, T217 (1968)
- 12) 例へば泉名; 繊維工学, 19, P572 (1966)
- 13) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 9, 428 (1958)