被覆ロールの曲げについて*

(第1報) 一様厚さの被覆層を有する対称な
被覆ロールの場合

(昭和41年7月2日受理)

中 島 条 男**
辻 尾 昇 三

——→ 摘 要 ←——

目 的

マンゲル用被覆ロールの軸方向の荷重分布については、従来理論的な取り扱いとはほとんど行なわれていない。しかしロールの圧力分布の問題をロール軸に垂直な断面における二次元的現象と、ロール軸方向の一次元的現象とに分離してそれぞれを理想化すれば、現象は単純化され、理論的取り扱いが容易になる。このようにすれば、軸方向の荷重分布の問題は、金属芯をはりと考え マンゲル ロールを被覆層をはさんで荷重のかかるはりで置きかえることにより、材料力学を拡張して解くことが可能となる。

成 果

同一の被覆ロールどうし、被覆ロールとその金属芯と同じ力学的特性を有する金属ロールとの組合わせおよび被覆ロールを含んだ対称な3本ロールの各2本の接触などの場合に対して、つぎの結論が得られる。

(1) 被覆層の弾性および厚さは、ロール断面における接触幅および最大圧力を支配するだけでなく、ロール軸方向の荷重分布にも関係し、しかもこの影響は金属芯の剛性と組合わさってあらわれる。またフレームおよび軸受部の剛性も荷重分布に関係する。

(2) ロール間に弾性層をはさんだ場合は、理論的には はさまない場合と同じ取り扱いができる。被覆ロールに布をはさんだ場合には、布をはさんだためにあらわれる影響は非常に小さい。

(3) 多層ロールの場合も、弾性層をはさんだ場合の考え方を拡張すれば、弾性層をはさまない単層のロールの場合と同じ取り扱いができる。

(4) ロール端の軸の部分の剛性の影響を考慮すると、軸受間距離とロールの働き幅との差およびロール部の剛性と軸部の剛性との比の両者が大きいほど、荷重むらは大きくなり、両端固定の場合でもこの影響を無視した単純支持の場合に近づく。

1. ま え が き

マンゲル ロールが、その間で加圧している 布状物体にどんな力の作用を与えるかを知ることが、非常に重要である。しかし マンゲル ロールの構造が複雑であるため、この問題を理論的に解決することは容易ではない。

まずニップの問題を解決するために、問題を二次元の場合に限定すると、被覆の弾性、被覆層の厚さなどが、

接触幅、最大圧力にどんな影響を及ぼすかを知ることができる。この点に関して、Hannah¹⁾が理論的に研究し、²⁻⁴⁾Parish⁵⁾が実験を行なって比較している。このようにして一応二次元の問題としては、基礎理論が確立された。

一方、しぼりむらとかパディングむらとかに密接な関係を有するロール軸方向の圧力分布については、二次元理論を拡張する試みが行なわれたり、ゴム被覆を考慮しないではりの曲げの理論を応用して解析されたりしているにすぎない。また製紙、プラスチック加工用ロール

* On Bending of Rubber-Covered Rollers. Part 1: Symmetrical Rollers with Covering of Uniform Thickness.

** K. Nakajima, member, S. Tsujio. 大阪府立大学 工学部

についても、はりの曲げ理論を応用した研究が行なわれている。

本来 マングル ロール は三次元的構造物であるから、正確には三次元的取り扱いをしなければならないが、前記のとおり、このことは非常に困難である。それゆえこの問題を、ロール軸に垂直な断面における二次元的現象と、ロール軸方向の一次元的現象とにわけてそれぞれ単純化すれば、理論的取り扱いが容易になる。こうすることにより、金属芯をはりと考え マングル ロール を被覆層をはさんで荷重のかかるはりでおきかえることができ、材料力学を拡張して軸方向の荷重分布の問題を解くことが可能となる。

計算を進める手順として、まず数学的取り扱いの容易なロールのみを考える。ただし対称という意味は幾何学的な意味ではなく、力学的な意味である。すなわち一對のロールの負荷時のたわみ曲線が対称となるか、あるいは一方のロールが全然たわまなくて、片側のロールのみの曲げについて論じればよい場合である。このような場合としては、同じ被覆ロールの接触、被覆ロールとその金属芯と同じ力学的性質を有する金属ロールとの接触、被覆ロールを含んだ対称な3本ロールの各2本の接触などの場合が考えられる。ただし以下の議論においては、同じ被覆ロールの組合せについて論ずることとする。他の場合へは簡単に拡張できるから、いちいち説明を加えることは行なわない。

2. 記 号

本報においては下の記号を用いる。

A, A' = 積分定数

B, B' = "

C, C' = "

D, D' = "

E = 金属芯の材質のヤング率

E_1 = ロール端の軸部の材質のヤング率

F, F' = 積分定数

f = 関数記号

G, G' = 積分定数

g = 関数記号

H, H' = 積分定数

h = 関数記号

I = 金属芯の断面の面積二次モーメント

I_1 = ロール端の軸部の断面の面積二次モーメント

ト

i = 番号

J, J' = 積分定数

K = フレームおよび軸受部の剛性に逆比例した定数

k = 被覆層、弾性層の弾性をあらわす定数

L = ロールの被覆部の全長の $\frac{1}{2}$

L_1 = ロール端の軸部をも含めた全長の $\frac{1}{2}$

m = 関数記号

n = 被覆層および弾性層の総数

P = 片側の軸受に加わる荷重

u = 被覆層、弾性層の厚さ

u_0 = 被覆層の一樣な厚さ

w = 被覆ロール単位長さ当りの分布荷重

$w_0 = w(0)$

$w_L = w(\pm L)$

$\bar{w} = P/L$

x = 被覆ロールの軸方向の座標 (中央が原点)

y = 金属芯のたわみ

$y_0 = y(0)$

z = 荷重を受けたときの被覆層の厚さ

$z_L = z(\pm L)$

$\alpha = 1/KL$

$\beta = EI/E_1 I_1$

$\delta = (L_1 - L)/L$

$\lambda = [(k/u_0)(L^4/4EI)]^{1/4}$

$\xi = x/L$

ψ = 関数記号

3. 基礎方程式の誘導

基礎方程式を導くにあたって、下の仮定をおく。

- (1) ロールをはりとみなし、曲げによるたわみのみを考える (断面の変形などはすべて無視する)。
- (2) 曲げを金属芯のみで受ける。金属芯は一樣断面と仮定する。
- (3) 被覆の圧縮特性を線型ばねで近似する。
- (4) ロールは上下同一、左右対称とする。
- (5) ロールの軸受間距離と働き幅、布幅は同じと仮定する (第6節ではこれを変更する)。
- (6) 重力の影響は考えない。

全長 $2L$ の2本の被覆ロールの両端にそれぞれ P なる力が作用して釣り合いにある状態を、第1図に模式的に示した。金属芯をそれぞれはりでおきかえることにより、第2図のような被覆層の上から荷重を受けるはりが

(第1図) 2本の同じ被覆ロールの接触模型

(第2図) 被覆ロールの等価力学系

得られる。図のように x, y 座標をとり、はりのたわみを $y(x)$ 、はりの曲げ剛性を EI であらわす。被覆層の無負荷時の厚さを $u(x)$ 、負荷を受けたときの厚さを $z(x)$ とし、 $z(\pm L)$ を z_L とかく。位置 x においてははりに作用する力、すなわち被覆層に作用する力を単位長さ当り $w(x)$ 、厚さ $u(x)$ の被覆層のばね定数をはりのスパン方向の単位長さ当り $k/u(x)$ とする。

上記の記号を用いると、つぎの諸式が得られる。まずはりのたわみと荷重との関係より

$$EI(d^4y/dx^4) = w \quad \dots\dots\dots(1)$$

被覆層の変形と荷重との関係より

$$w = (k/u)(u - z) \quad \dots\dots\dots(2)$$

第2図に示されている幾何学的関係より

$$y = z - z_L \quad \dots\dots\dots(3)$$

はりの荷重と反力との関係より

$$2P = \int_{-L}^L w dx \quad \dots\dots\dots(4)$$

これら4式において、4定数 P, E, I, k を与えると、独立変数 x の4個の関数 $y(x), w(x), z(x), u(x)$ の間の関係が定まる。したがってこの4式が基礎方程式となる。

以上は2本の同じ被覆ロールの接触について考えたが、被覆ロールとその金属芯と同じ力学的性質を有する

金属ロールとの接触について考えると、第1図のかわりに第3図を得る。2本のロールの曲げに対する性質が同一であるから圧縮された被覆層の形状は、第3図において上下対称である。したがって被覆ロールの被覆層の変

(第3図) 被覆ロールと金属ロールとの接触模型

形前後の厚さを $2u(x), 2z(x)$ であらわすことにすれば、第3図の2本のロールの組合わせを、第2図の等価力学系でおきかえることができる。また対称な3本ロールでは、通常1ないし2本が被覆ロールで中央のロールはたわまないから、各2本のロールの組合わせについては、第1図の上半のみを考えればよい。以下の計算はすべて第1図の2本の同じ被覆ロールの組合わせについて行なうが、上記のように考えれば、他の組合わせに対してもこれらの計算結果をただちに応用することができる。

4. 被覆層の厚さの一樣な場合の理論

4.1 一般解

被覆層の厚さが一定であるから

$$u(x) = u_0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

において、(2)、(3)および(5)の3式を(1)式に代入すれば

$$EI(d^4z/dx^4) + (k/u_0)z = k \quad \dots\dots\dots(6)$$

また(5)式を(2)式に代入すれば

$$w = (k/u_0)(u_0 - z) \quad \dots\dots\dots(7)$$

を得る。

いま

$$\xi = x/L \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\lambda^4 = (k/u_0)(L^4/4EI) \quad \dots\dots\dots(9)$$

において、(6)式を一部、無次元化すると

$$d^4z/d\xi^4 + 4\lambda^4z = 4\lambda^4u_0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

(10)式の一般解は

$$z = u_0 + e^{2\xi}(A' \cos \lambda\xi + B' \sin \lambda\xi) + e^{-2\xi}(C' \cos \lambda\xi + D' \sin \lambda\xi) \quad \dots\dots\dots(11)$$

で与えられる。ただし A', B', C', D' は境界条件より定められるべき積分定数である。

(11) 式の形で計算をすすめてもよいが、式を簡略化するために、つぎの関数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\lambda\xi) &= (1/\sqrt{2})(\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi \\ &\quad + \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \\ \psi_2(\lambda\xi) &= (1/\sqrt{2})(-\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi \\ &\quad + \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

この関数はつぎの性質を有する。まず微係数については

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1(\lambda\xi) &= d\psi_1(\lambda\xi)/d\xi = \sqrt{2} \lambda \cos \lambda\xi \cosh \lambda\xi \\ \dot{\psi}_2(\lambda\xi) &= d\psi_2(\lambda\xi)/d\xi = \sqrt{2} \lambda \sin \lambda\xi \sinh \lambda\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi}_1(\lambda\xi) &= -\sqrt{2} \lambda^2 (-\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi + \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \\ &= -2 \lambda^2 \psi_2(\lambda\xi) \\ \ddot{\psi}_2(\lambda\xi) &= \sqrt{2} \lambda^2 (\cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi + \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi) \\ &= 2 \lambda^2 \psi_1(\lambda\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{IV}(\lambda\xi) &= -2 \lambda^2 \ddot{\psi}_2(\lambda\xi) = -4 \lambda^4 \psi_1(\lambda\xi) \\ \psi_2^{IV}(\lambda\xi) &= 2 \lambda^2 \ddot{\psi}_1(\lambda\xi) = -4 \lambda^4 \psi_2(\lambda\xi) \\ \psi_1^V(\lambda\xi) &= -4 \lambda^4 \dot{\psi}_1(\lambda\xi) \\ \psi_2^V(\lambda\xi) &= -4 \lambda^4 \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

(12), (13) の諸式より, $\psi_1(\lambda\xi), \psi_2(\lambda\xi)$ は ξ について奇関数, $\dot{\psi}_1(\lambda\xi), \dot{\psi}_2(\lambda\xi)$ は ξ について偶関数であることがただちに知られる。また

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) = 0 \\ \dot{\psi}_1(0) &= \sqrt{2} \lambda, \dot{\psi}_2(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

なることも明らかである。

(12) の定義の式の逆表示式を計算すると

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda\xi \cosh \lambda\xi &= (1/\sqrt{2} \lambda) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) \\ \sin \lambda\xi \sinh \lambda\xi &= (1/\sqrt{2} \lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ \cos \lambda\xi \sinh \lambda\xi &= (1/\sqrt{2}) \{\psi_1(\lambda\xi) - \psi_2(\lambda\xi)\} \\ \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi &= (1/\sqrt{2}) \{\psi_1(\lambda\xi) + \psi_2(\lambda\xi)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

(12), (13) の両式を組合わせて, 下の諸式を定義しておくとう便利である。

$$\left. \begin{aligned} \psi_3(\lambda\xi) &= \psi_1(\lambda\xi) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + \psi_2(\lambda\xi) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ &= \lambda (\cos \lambda\xi \sin \lambda\xi + \cosh \lambda\xi \sinh \lambda\xi) \\ \psi_4(\lambda\xi) &= \psi_1(\lambda\xi) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) - \dot{\psi}_1(\lambda\xi) \psi_2(\lambda\xi) \\ &= \lambda (-\cos \lambda\xi \sin \lambda\xi + \cosh \lambda\xi \sinh \lambda\xi) \\ \psi_5(\lambda\xi) &= \dot{\psi}_1^2(\lambda\xi) + \dot{\psi}_2^2(\lambda\xi) = \sin^2 \lambda\xi + \sinh^2 \lambda\xi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_6(\lambda\xi) &= \psi_1^2(\lambda\xi) - \psi_2^2(\lambda\xi) \\ &= 2 \cos \lambda\xi \sin \lambda\xi \cosh \lambda\xi \sinh \lambda\xi \\ \psi_7(\lambda\xi) &= \dot{\psi}_1^2(\lambda\xi) + \dot{\psi}_2^2(\lambda\xi) \\ &= 2 \lambda^2 (1 - \sin^2 \lambda\xi + \sinh^2 \lambda\xi) \\ \psi_3(\lambda, \lambda\xi) &= \psi_1(\lambda) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + \psi_2(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ \psi_4(\lambda, \lambda\xi) &= \psi_1(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) - \dot{\psi}_1(\lambda) \psi_2(\lambda\xi) \\ \psi_7(\lambda, \lambda\xi) &= \dot{\psi}_1(\lambda) \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + \dot{\psi}_2(\lambda) \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \\ \psi_3(\lambda, 0) &= \psi_3(\lambda), \psi_3(\lambda, 0) = \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda) \\ \psi_4(\lambda, 0) &= \psi_4(\lambda), \psi_4(\lambda, 0) = -\sqrt{2} \lambda \psi_2(\lambda) \\ \psi_7(\lambda, 0) &= \psi_7(\lambda), \psi_7(\lambda, 0) = \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

(15) 式を見ると理解されるように, $\psi_1(\lambda\xi), \psi_2(\lambda\xi), \dot{\psi}_1(\lambda\xi), \dot{\psi}_2(\lambda\xi)$ はいずれも (10) 式の同次式を満足する。したがって (10) 式の一般解は (11) 式の代わりに

$$z = u_0 + A \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + B \dot{\psi}_2(\lambda\xi) + C \psi_1(\lambda\xi) + D \psi_2(\lambda\xi) \dots\dots(19)$$

と書いてよい。A, B, C, D は積分定数で, 境界条件より定まる。仮定 (4) により, 左右対称の場合のみを考えれば, $z(\xi)$ は当然偶関数でなければならないから, (19) 式の積分定数中 C, D の 2 個は 0 でなければならない。したがって (19) 式は簡単化され

$$z = u_0 + A \dot{\psi}_1(\lambda\xi) + B \dot{\psi}_2(\lambda\xi) \dots\dots(20)$$

となる。

4.2 両端固定の場合

まず両端固定の場合を考えてみよう。この場合境界条件は

$$\dot{x} = L \text{ において } y' = z' = 0; y = z - z_L = 0 \dots\dots(21)$$

で与えられる。ただし y' は dy/dx をあらわす。この条件に $\xi = x/L$ を代入すると

$$\xi = 1 \text{ において } \dot{y} = \dot{z} = 0; y = z - z_L = 0 \dots\dots(22)$$

となる。ただし $\dot{y}$ は $dy/d\xi$ をあらわす。

この条件に (20) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} A \dot{\psi}_1(\lambda) + B \dot{\psi}_2(\lambda) &= 0 \\ A \psi_1(\lambda) + B \psi_2(\lambda) &= -(u_0 - z_L) \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

(14) 式を用いると, 第 1 式が書きかえられ

$$\left. \begin{aligned} -A \psi_2(\lambda) + B \psi_1(\lambda) &= 0 \\ A \dot{\psi}_1(\lambda) + B \dot{\psi}_2(\lambda) &= -(u_0 - z_L) \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

λ は (9) 式で定義され, 被覆層の弾性と金属芯の弾性との比に関連した無次元定数である。

(24) の連立方程式を解くと

$$\left. \begin{aligned} A &= -(u_0 - z_L) \psi_1(\lambda) / \psi_3(\lambda) \\ B &= -(u_0 - z_L) \psi_2(\lambda) / \psi_3(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

(25) 式中には未知の定数 z_L が含まれているから, これ

を決定するために、基礎方程式(4)を用いる。そのためには、まず(25)式を(20)式に代入し、その結果をさらに(7)式に代入し

$$w = (k/u_0) \cdot (u_0 - z_L) \cdot \{\psi_3(\lambda, \lambda\xi)/\psi_3(\lambda)\} \dots (26)$$

(26)式を(4)式に代入して積分すれば、 $(u_0 - z_L)$ が求まり

$$u_0 - z_L = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot \{\psi_3(\lambda)/\psi_5(\lambda)\} \dots (27)$$

ただし

$$\bar{w} = P/L \dots (28)$$

は、単位長さあたりの平均荷重である。

(27)式を(25)式に代入すれば、 A, B が定まり、これを(20)式に代入し、(3)式を用いると

$$y/\{\bar{w}/(k/u_0)\} = \{\psi_3(\lambda) - \psi_3(\lambda, \lambda\xi)\}/\psi_5(\lambda) \dots (29)$$

また(27)式を(26)式に代入すれば

$$w = \bar{w} \cdot \{\psi_3(\lambda, \lambda\xi)/\psi_5(\lambda)\} \dots (30)$$

はりの最大たわみを y_0 とすれば、 y_0 は $\xi = 0$ における y で与えられ、(18)式を用いて

$$y_0/\{\bar{w}/(k/u_0)\} = \{\psi_3(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda)\}/\psi_5(\lambda) \dots (31)$$

(29), (31)の両式の左辺の分母は、軸方向の単位長さ当たり $\bar{w}$ なる荷重が作用したときに、厚さ u_0 の被覆層がどれだけ圧縮されるかという圧縮量を長さであらわしたものであるから、(29), (31)式の両辺の右辺もまた無次元形である。しかしはりの最大たわみをあらわすのに、はり自身の弾性によってあらわすほうが好都合であれば、次式を用いてもよい。

$$y_0/[P/(4EI/L^3)] = (1/\lambda^4) \cdot \{\psi_3(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda)\}/\psi_5(\lambda) \dots (32)$$

荷重分布の変化をあらわすには、いろいろのあらわし方が考えられるが、ここでは中央部と端部との単位長さ当りの荷重の比

$$w_0/w_L = w(0)/w(L) \dots (33)$$

であらわすことにし、これを荷重変動率と呼ぶことにすれば、(30)式より

$$w_0/w_L = \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda)/\psi_3(\lambda) \dots (34)$$

4.3 両端単純支持の場合

つぎに両端単純支持の場合を考えてみよう。この場合境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x = L \text{ において } y'' = z'' = 0; y = z - z_L = 0 \\ \text{あるいは} \\ \xi = 1 \text{ において } \ddot{y} = \ddot{z} = 0; y = z - z_L = 0 \end{array} \right\} \dots (35)$$

で与えられる。両端固定の場合と同様にして解くと、

(24), (27), (29), (30)の諸式に対応してそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} -A \dot{\psi}_2(\lambda) + B \dot{\psi}_1(\lambda) = 0 \\ A \dot{\psi}_1(\lambda) + B \dot{\psi}_2(\lambda) = -(u_0 - z_L) \end{array} \right\} \dots (36)$$

$$u_0 - z_L = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot \{\psi_7(\lambda)/\psi_3(\lambda)\} \dots (37)$$

$$y = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot \{\psi_7(\lambda) - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\}/\psi_3(\lambda) \dots (38)$$

$$w = \bar{w} \cdot \{\psi_7(\lambda, \lambda\xi)/\psi_3(\lambda)\} \dots (39)$$

を得る。

最大たわみおよび荷重変動率は、それぞれ(31),

(34)の両式に対応して

$$y_0/\{\bar{w}/(k/u_0)\} = \{\psi_7(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda)\}/\psi_3(\lambda) \dots (40)$$

$$w_0/w_L = \sqrt{2} \lambda \dot{\psi}_1(\lambda)/\psi_7(\lambda) \dots (41)$$

4.4 両端弾性支持の場合

以上の二つの場合は理想的な場合で、実際の機械においては、フレームおよび軸受部が弾性を有するため、その中間になることが多い。そこではりの両端の傾斜が、そのモーメントに比例する場合を考える。すなわち境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x = L \text{ において } y'' = -Ky', z'' = -Kz'; \\ y = z - z_L = 0 \\ \text{あるいは} \\ \xi = 1 \text{ において } \ddot{y} = -KL \dot{y}, \ddot{z} = -KL \dot{z}; \\ y = z - z_L = 0 \end{array} \right\} \dots (42)$$

となるから、前同様にして A, B に関する連立方程式を求めると

$$\left. \begin{array}{l} -A\{\psi_2(\lambda) + \alpha \dot{\psi}_2(\lambda)\} + B\{\psi_1(\lambda) + \alpha \dot{\psi}_1(\lambda)\} = 0 \\ A \dot{\psi}_1(\lambda) + B \dot{\psi}_2(\lambda) = -(u_0 - z_L) \end{array} \right\} \dots (43)$$

ただし

$$\alpha = 1/KL \dots (44)$$

(43)式を(24), (36)の両式と比較すれば、それぞれの第2式はすべて同じ形をしており、また(43)式の第1式において、 $\alpha = 0$ とくと(24)の第1式が、 $\alpha = \infty$ とくと(36)の第1式が得られる。したがって弾性支持の場合のたわみや荷重分布の式は、両端固定の場合と両端単純支持の場合とのそれぞれの式の分子分母から、 α についての1次分数の形で与えられ、 $\alpha = 0$ とくと両端固定の場合、 $\alpha = \infty$ とくと両端単純支持の場合が得られるはずである。また(42)式の境界条件のなかの第1の条件は、 $\alpha = 0$ では $K = \infty$ となるから、 y''

が有限であるためには、 $y'=0$ でなければならない。一方 $\alpha=\infty$ では $K=0$ となり、 $y''=0$ となる。したがってそれぞれ両端固定、両端単純支持の場合の境界条件が得られることからしても、以上のことは理解されるであらう。

前同様に、これを解くと (27), (29), (30) の諸式に対応してそれぞれ

$$u_0 - z_L = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot \{\psi_3(\lambda) + \alpha \cdot \psi_7(\lambda)\} / \{\psi_5(\lambda) + \alpha \cdot \psi_3(\lambda)\} \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$y = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot [\{\psi_3(\lambda) - \psi_3(\lambda, \lambda\xi)\} + \alpha \cdot \{\psi_7(\lambda) - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\}] / \{\psi_5(\lambda) + \alpha \cdot \psi_3(\lambda)\} \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$w = \bar{w} \cdot \{\psi_3(\lambda, \lambda\xi) + \alpha \cdot \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\} / \{\psi_5(\lambda) + \alpha \cdot \psi_3(\lambda)\} \quad \dots\dots\dots(47)$$

最大たわみおよび荷重変動率はそれぞれ (31), (34) の両式に対応して

$$y_0 / \{\bar{w}/(k/u_0)\} = [\{\psi_3(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda)\} + \alpha \cdot \{\psi_7(\lambda) - \sqrt{2} \lambda \psi_1(\lambda)\}] / \{\psi_5(\lambda) + \alpha \cdot \psi_3(\lambda)\} \quad \dots\dots\dots(48)$$

$$w_0/w_L = \sqrt{2} \lambda \{\psi_1(\lambda) + \alpha \cdot \psi_1(\lambda)\} / \{\psi_3(\lambda) + \alpha \cdot \psi_7(\lambda)\} \quad \dots\dots\dots(49)$$

(45)~(49) の諸式において、 $\alpha=0$ とおくと両端固定の場合の (27), (29)~(31), (34) の諸式が、 $\alpha=\infty$ とおくと両端単純支持の場合の (37)~(41) の諸式が得られる。

4.5 考 察

以上の諸結果に対し数値計算を試み、その概略の傾向を調べてみよう。

第4図に両端固定の場合の最大たわみと荷重変動率とを、第5図に両端単純支持の場合の最大たわみと荷重変動率とを示した。これらの図の示すように、最大たわみ

(第4図) 両端固定の場合の荷重変動率および最大たわみ

(第5図) 両端単純支持の場合の荷重変動率、および最大たわみ

も荷重むらとともに被覆ロールの特性をあらわす無次元パラメータ λ によっていちじるしく変化する。その変化の様子は λ のごく小さい間は荷重変動率は1に近く、最大たわみもほとんど0であるが、 λ がある値をこえると、荷重変動率は急に低下し、最大たわみは急に増大する。すなわち荷重むらを少なくするには、荷重変動率を1に近づける、すなわち λ を小さくせねばならない。いいかえれば、被覆層のばね定数をあらわす k/u_0 と、金属芯の曲げ剛性をあらわす EI/L^4 との比を、十分に小さくすることが必要である。なお λ が大きくなると、ついには荷重変動率は0に達し、さらに λ が大きくなると負の値となるが、被覆層は圧縮しか伝達できないから、荷重変動率0までのみ意味を有する。

また荷重むらはたわみに関係があり、たわみが大きくなると荷重むらも大きくなる。両端固定の場合と両端単純支持の場合とを比較すると、当然単純支持の場合のほうがたわみが大きいから、荷重むらも大きいことが予想され、計算結果もこのことを示している。

以上のように両端固定のほうが一様な荷重分布を与えるが、実際には両端弾性支持と考えるべきであるから、

(第6図) フレームの剛性が最大たわみに及ぼす影響

(第7図) フレームの剛性が荷重変動率に及ぼす影響

フレームおよび軸受部の剛性の影響をみるために、 $\lambda \leq 1$ に対して (48), (49) 両式を計算して、第6, 7図に示した。図から明らかなように、 α が大きくなると、同じ荷重変動率を与えるには、 λ を小さくせねばならない。なお λ のいろいろな値に対する荷重分布を第8, 9図に示しておく。

(第8図) 両端固定の場合の荷重分布

(第9図) 両端単純支持の場合の荷重分布

以上の結果より、つぎの重要な結論が得られる。すなわち被覆層の弾性および厚さは、ロール断面における接触幅および最大圧力を支配するだけではなく、ロール軸方向の荷重分布にも関係し、しかもこの影響は金属芯の

剛性と組合わさってあらわれる。またフレームおよび軸受部の剛性も荷重分布に関係する。これを要するに、荷重むらを少なくするには、フレーム、軸受部および金属芯の剛性をできるだけ大きくすればよいという平凡な結論に達するが、それぞれの因子の影響の度合いが、第6, 7図により定量的に把握できる。

5. ロール間に弾性層をはさんだ場合

5.1 1層のみをはさんだ場合

以上は、被覆ロールどうしを押しつけた場合を第2図のように模型化して論じた。しかし第2図は同時に、2本の金属ロール間に厚さ $2u_0$ の弾性層をはさんだ場合の模型と考えることもできる。そうすると前節の結果はそのままで、厚さ $2u_0$ の弾性層を2本の金属ロールで圧縮する場合へ応用することができる。

それでは、被覆ロールの間に弾性層をはさんだらどうなるであろうかという問題が生まれる。従来のマングルの研究では、布の存在はロールの変形にはほとんど影響しないとされていた⁴⁾。この点を明らかにするために、弾性層をはさんだ被覆ロールを考えてみよう。

まず第10図のように座標系をとり、これを前同様に第11図のような等価力学系におきかえる。この場合、被覆層と弾性層との2層が介在することになるので、被覆層の厚さを $u_1(x)$ 、負荷を受けたときの厚さを $z_1(x)$ 、弾性をあらわす定数を k_1 で示し、弾性層のこれらに対応する量をそれぞれ $2u_2(\lambda)$ 、 $2z_2(\lambda)$ 、 k_2 であらわす。

(第10図) 弾性層をはさんだ場合の2本の同じ被覆ロールの接触模型

(第 11 図) 弾性層をはさんだ場合の等価力学系

第 11 図の力学系に関する基礎方程式としては、第 3 節に誘導した式中、まず (2) 式の代わりに

$$w = (k_1/u_1)(u_1 - z_1) = (k_2/u_2)(u_2 - z_2) \quad \dots\dots\dots(50)$$

が得られる。いま

$$u_1 + u_2 = u \quad \dots\dots\dots(51)$$

$$z_1 + z_2 = z \quad \dots\dots\dots(52)$$

とにおいて (50) 式を書き直すと

$$w = \{(k_1/u_1)^{-1} + (k_2/u_2)^{-1}\}^{-1}(u - z) \quad \dots\dots\dots(53)$$

被覆層と弾性層との総ばね定数を k/u であらわし

$$(k/u)^{-1} = (k_1/u_1)^{-1} + (k_2/u_2)^{-1} \quad \dots\dots\dots(54)$$

とおけば、この式はばねの直列結合の式となり、(53) 式は (2) 式と同じ形に書ける。

それゆえ (54) 式の総ばね定数を導入すれば、弾性層をはさんだ場合を、弾性層をはさまない場合に帰着させることができる。この場合、弾性層をはさんでいないときの被覆層に関する無次元パラメータ

$$\lambda_1^4 = (k_1/u_1)/(4EI/L^4) \quad \dots\dots\dots(55)$$

の代わりに

$$\lambda^4 = \{(k_1/u_1)^{-1} + (k_2/u_2)^{-1}\}^{-1}/(4EI/L^4) \quad \dots\dots\dots(56)$$

を用いねばならない。あるいは弾性層についての無次元パラメータ

$$\lambda_2^4 = (k_2/u_2)/(4EI/L^4) \quad \dots\dots\dots(57)$$

を用いれば

$$(\lambda_1/\lambda)^4 = 1 + (\lambda_1/\lambda_2)^4 = 1 + (k_1/u_1)/(k_2/u_2) \quad \dots\dots\dots(58)$$

(58) 式を図示すると、第 12 図を得る。この図ないしは (58) 式より

$$\lambda < \lambda_1 \quad \dots\dots\dots(59)$$

すなわち弾性層をはさむことにより、等価無次元パラメータ λ あるいは総ばね定数は必ず低下し、荷重むらを減少せしめる。実際問題として布をマングルで処理する場合は $k_2 \gg k_1$, $u_2 \ll u_1$ であるから、 $\lambda/\lambda_1 \approx 1$, すなわち $\lambda \approx \lambda_1$ で、布をはさんでも荷重むらはほとんど減少せず、その影響を無視して差しつかえないとの結論が得られる。被覆層と同じ材質、同じ厚さの弾性層をはさ

(第 12 図) 被覆層と弾性層との弾性の比が無次元パラメータ λ に及ぼす影響

んだ場合でさえ $\lambda \approx 0.84 \lambda_1$ にとどまる。荷重むらが相当減少するのは、 k_2/u_2 の小さな弾性層をはさんだ場合で $(k_1/u_1)/(k_2/u_2)$ が 15 になって、やっと λ は $0.5 \lambda_1$ となる。

またこのような考え方を拡張すると、金属芯の力学的特性は同じであるが、被覆層の厚さと圧縮特性の違う被覆ロールの接触する場合も簡単に解くことができる。

5.2 多層ロールへの拡張

以上の議論を拡張すると、被覆層、弾性層ともに数層になった場合も、まったく同様な考え方によって、被覆層が 1 層のみの場合に帰着せしめることが可能となる。簡単のために弾性層をはさまない多層ロールを例にとって考えよう。 $i = 1, 2, \dots, n$ として、各層の厚さを $u_i(x)$, 荷重を受けたときの厚さを $z_i(x)$, 単位長さあたりのばね定数を $k_i/u_i(x)$ であらわせば、(50) 式の代わりに

$$w = (k_i/u_i)(u_i - z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(60)$$

(51), (52) 式の代わりに

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \quad \dots\dots\dots(61)$$

$$z = \sum_{i=1}^n z_i \quad \dots\dots\dots(62)$$

とおけば、(54) 式に対応して

$$(k/u)^{-1} = \sum_{i=1}^n (k_i/u_i)^{-1} \quad \dots\dots\dots(63)$$

で、総ばね定数を定義することにより、(2) 式が得られ、この場合にも第 3 節の議論がそのままあてはまることがわかる。すなわち (58) 式の代わりに

$$\lambda^{-4} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-4} \quad \dots\dots\dots(64)$$

を用いればよい。また

$$\lambda < \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(65)$$

も成立し、 λ は最小の λ_i に近い値をとる。

6. ロール端部の曲げ剛性が低い場合

6.1 基礎方程式の修正と一般解

第3節において基礎方程式を導くために用いた仮定中(5)は, 計算を簡単にするために被覆ロールを理想化したものであって, 現実の被覆ロールでは金属芯の端に軸が固定され, 金属芯の端より若干の距離へだった位置で軸受により支持されているものが多い. このような場合については単純はりのたわみの計算によって補正項が導かれているが, 被覆層の影響は無視されている^{6,7,13)}. 以上の計算によれば, ロールの支持条件はたわみおよび荷重分布にいちじるしい影響を与えるので, 被覆層の存在する場合のロール端部の影響を調べておくことの意義は大きいと考えられる.

さてこの影響を論ずるにあたって, 第13図のような接触模型を考えると, 上記の仮定(5)をそのまま存続できないから, これをつぎのように変更する.

(5'); ロールの働き幅を $2L$, 軸受間距離を $2L_1$, $L_1 > L$ とする.

(第13図) ロール端の曲げ剛性が低い場合の被覆ロールの接触模型

(第14図) ロール端の曲げ剛性の低い場合の等価力学系

仮定をこのように変更すると, 第14図の等価力学系が得られ, これに対応して基礎方程式(1), (2), (3)式をつぎのように変更せねばならない.

$$\left. \begin{aligned} E I (d^4 y / dx^4) &= w & |x| \leq L \\ E_1 I_1 (d^4 y / dx^4) &= 0 & L \leq |x| \leq L_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (66)$$

$$w = (k/u)(u - z) \quad |x| \leq L \quad \dots\dots (67)$$

$$y = z - z_L \quad |x| \leq L_1 \quad \dots\dots (68)$$

(68) 式は $|x| \leq L$ においてのみ物理的な意味を有するが, この関係を $L \leq |x| \leq L_1$ の範囲にまで拡張しておくほうが, あとでの式の取り扱いが簡単になるので, $|x| \leq L_1$ において定義した. $L \leq |x| \leq L_1$ においては, (68) 式は単なる座標変換の式と考えればよい.

とくに被覆層の厚さが一様な場合は

$$u = u_0 \quad |x| \leq L \quad \dots\dots (69)$$

(67), (68), (69) の諸式を (66) 式に代入し (8), (9) の両式を用いて一部無次元化すれば

$$\left. \begin{aligned} (d^4 z / d\xi^4) + 4\lambda^4 z &= 4\lambda^4 u_0 & |\xi| \leq 1 \\ (d^4 z / d\xi^4) &= 0 & 1 \leq |\xi| \leq 1 + \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots (70)$$

ただし

$$\delta = (L_1 - L) / L \quad \dots\dots (71)$$

(70) 式の一般解は, $A, B, F, G, H, J, F', G', H', J'$ を積分定数として

$$\left. \begin{aligned} z &= u_0 + A \psi_1(\lambda\xi) + B \psi_2(\lambda\xi) & |\xi| \leq 1 \\ z &= F \xi^3 + G \xi^2 + H \xi + J & 1 \leq \xi \leq 1 + \delta \\ z &= F' \xi^3 + G' \xi^2 + H' \xi + J' & -(1 + \delta) \leq \xi \leq -1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (72)$$

で与えられる. (72) の第1式には対称の条件はすでに入っている. 第2, 3式についての対称の条件から

$$F' = -F, G' = G, H' = -H, J' = J \quad \dots\dots (73)$$

が得られるから, 一般解は(72)式の第1, 2式のみでよい.

6.2 両端弾性支持の場合

境界条件としては, 一般的な弾性支持の場合を考え $x = L$ において

$$\left. \begin{aligned} y(L_-) &= y(L_+) = 0 & ; & \quad z(L_-) = z(L_+) = z_L \\ y'(L_-) &= y'(L_+) & \dots\dots & ; \quad z'(L_-) = z'(L_+) \\ E I y''(L_-) &= E_1 I_1 y''(L_+) & ; & \quad E I z''(L_-) = E_1 I_1 z''(L_+) \\ E I y'''(L_-) &= E_1 I_1 y'''(L_+) & ; & \quad E I z'''(L_-) = E_1 I_1 z'''(L_+) \end{aligned} \right\} \quad x = L_1 \text{ において}$$

$$\left. \begin{aligned} y''(L_1) &= -K y'(L_1) & ; & \quad z''(L_1) = -K z'(L_1) \\ E_1 I_1 y'''(L_1) &= P & ; & \quad E_1 I_1 z'''(L_1) = P \end{aligned} \right\} \dots\dots (74)$$

ただし $y(L_-)$ は $|x| \leq L$ の範囲の $y(L)$ を, $y(L_+)$ は

$|x| \leq L$ の範囲の $y(L)$ をあらわす。微係数についても同様に定義する。

これらの境界条件において x を ξ にかえ、また

$$\beta = EI/E_1 I_1 \quad \dots\dots\dots (75)$$

とおくと、(74) 式の代わりに次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1 \quad \text{において} \\ y(1-) = y(1+) = 0; \quad z(1-) = z(1+) = z_L \\ \dot{y}(1-) = \dot{y}(1+); \quad \dot{z}(1-) = \dot{z}(1+) \\ \beta \ddot{y}(1-) = \ddot{y}(1+); \quad \beta \ddot{z}(1-) = \ddot{z}(1+) \\ \beta \dddot{y}(1-) = \dddot{y}(1+); \quad \beta \dddot{z}(1-) = \dddot{z}(1+) \\ \xi = 1 + \delta \quad \text{において} \\ \ddot{y}(1 + \delta) = -\alpha^{-1} \dot{y}(1 + \delta); \\ \ddot{z}(1 + \delta) = -\alpha^{-1} \dot{z}(1 + \delta) \\ \dddot{y}(1 + \delta) = \beta PL^3/EI; \\ \dddot{z}(1 + \delta) = \beta PL^3/EI \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (76)$$

(76) 式は $z(\xi)$ について 7 個の条件を与えるから、これより A, B, F, G, H, J, z_L の 7 個の定数を定めることができる。なお第 3 節ではさきに積分定数を定め、 z_L をあとで (4) 式の条件から求めたが、ここでは (4) 式の代わりに、(74) または (76) の最後の式を用いて、一挙に z_L まで求めてしまうことにした。

7 個の未定定数に関する連立方程式は

$$\left. \begin{aligned} u_0 + A \dot{\psi}_1(\lambda) + B \dot{\psi}_2(\lambda) = F + G + H + J = z_L \\ -2A\lambda^2 \psi_2(\lambda) + 2B\lambda^2 \psi_1(\lambda) = 3F + 2G + H \\ -A\beta \lambda^2 \dot{\psi}_2(\lambda) + B\beta \lambda^2 \dot{\psi}_1(\lambda) = 3F + G \\ 2A\beta \lambda^4 \psi_1(\lambda) + 2B\beta \lambda^4 \psi_2(\lambda) = -3F \\ 3(1+\delta)(1+\delta+2\alpha)F + 2(1+\delta+\alpha)G + H = 0 \\ F = \beta(P L^3/6 EI) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (77)$$

(77) の連立方程式において、最後の式は直接 F を与えているから、式の数と根の数とは一つずつ減る。そうすると第 2, 第 5 の両式より H を消去して、 G を A, B の関数としてあらわし、これを第 3 式に代入すれば、第 4 式とともに A, B に関する 2 元の連立方程式が得られる。これを解いて A, B を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A = -\frac{\bar{w}}{(k/u_0)} \\ \cdot \frac{\psi_1(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \dot{\psi}_1(\lambda) - (\delta + 2\alpha)\delta\beta \cdot \lambda^2 \psi_2(\lambda)}{\psi_5(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \psi_3(\lambda)} \\ B = -\frac{\bar{w}}{(k/u_0)} \\ \cdot \frac{\psi_2(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \dot{\psi}_2(\lambda) + (\delta + 2\alpha)\delta\beta \cdot \lambda^2 \psi_1(\lambda)}{\psi_5(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \psi_3(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (78)$$

(78) 式を (72) の第 1 式に代入すると、 $0 \leq \xi \leq 1$ の間の z が定まる。

つぎに (78) 式を (77) の第 2, 第 3 の両式の左辺に代入すると、それぞれ $3F + 2G + H, 3F + G$ が求まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} 3F + 2G + H = -2 \frac{\bar{w}}{(k/u_0)} \beta \cdot \lambda^2 \\ \cdot \frac{\delta \{\psi_4(\lambda) + \delta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\} + \alpha \{\psi_4(\lambda) + 2\delta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\}}{\psi_5(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \psi_3(\lambda)} \\ 3F + G = -\frac{\bar{w}}{(k/u_0)} \beta \cdot \lambda^2 \\ \cdot \frac{\{-\psi_4(\lambda) + \delta^2 \beta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\} + 2\alpha \cdot \delta \beta \cdot \lambda^2 \psi_3(\lambda)}{\psi_5(\lambda) + (\delta + \alpha)\beta \cdot \psi_3(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (79)$$

また (77) の第 6 式より

$$F = (\frac{3}{8}) \{\bar{w}/(k/u_0)\} \beta \lambda^4 \quad \dots\dots\dots (80)$$

しかるに (77) の第 1 式より

$$J = z_L - (F + G + H) \quad \dots\dots\dots (81)$$

これを (72) の第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} z = z_L + (\xi - 1) \{F(\xi - 1)^2 + (3F + G) \\ (\xi - 1) + (3F + 2G + H)\} \quad 1 \leq \xi \leq 1 + \delta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (82)$$

となるから (79), (80) の両式を代入し、一方 z_L は (77) の第 1 式の左辺より決定できるから、結局 $1 \leq \xi \leq 1 + \delta$ の間の z が定まる。

このようにして $z - z_L$ が定まれば、これが y に他ならないから

$$\left. \begin{aligned} y = \{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot f(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi)/m(\lambda, \delta, \beta, \alpha) \\ 0 \leq \xi \leq 1 \\ y = -\{\bar{w}/(k/u_0)\} \cdot \lambda^2 g(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi)/m(\lambda, \delta, \beta, \alpha) \\ 1 \leq \xi \leq 1 + \delta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (83)$$

一方 z を (67) 式に代入し

$$w = \bar{w} \cdot h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi)/m(\lambda, \delta, \beta, \alpha) \quad \dots\dots\dots (84)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi) = \{\psi_3(\lambda) - \psi_5(\lambda, \lambda\xi)\} + \delta\beta \cdot \{\psi_7(\lambda) \\ - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\} + \delta^2\beta \cdot \lambda^2 \{\psi_4(\lambda) - \psi_4(\lambda, \lambda\xi)\} \\ + \alpha\beta [\{\psi_7(\lambda) - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\} + 2\delta \cdot \lambda^2 \{\psi_4(\lambda) \\ - \psi_4(\lambda, \lambda\xi)\}] \\ g(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi) = 2\delta\beta \{\psi_4(\lambda) + \delta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\} (\xi - 1) \\ + \beta \{-\psi_4(\lambda) + \delta^2\beta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\} (\xi - 1)^2 - (\frac{3}{8})\beta \cdot \lambda^2 \\ \cdot \{\psi_5(\lambda) + \delta\beta \psi_3(\lambda)\} (\xi - 1)^3 + 2\alpha\beta [\{\psi_4(\lambda) \\ + 2\delta \cdot \lambda^2 \psi_5(\lambda)\} (\xi - 1) + \delta\beta \cdot \lambda^2 \psi_3(\lambda) \cdot (\xi - 1)^2 \\ - (\frac{3}{8})\beta \cdot \lambda^2 \psi_3(\lambda) \cdot (\xi - 1)^3] \\ h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; \xi) = \psi_3(\lambda, \lambda\xi) + \delta\beta \{\psi_7(\lambda, \lambda\xi) \\ + \delta \cdot \lambda^2 \psi_4(\lambda, \lambda\xi)\} + \alpha\beta \{\psi_7(\lambda, \lambda\xi) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\delta \cdot \lambda^2 \psi_4(\lambda, \lambda\xi) \} \\
 m(\lambda, \delta, \beta, \alpha) = & \psi_5(\lambda) + \delta \beta \psi_3(\lambda) + \alpha \beta \psi_3(\lambda) \} \quad \dots\dots\dots(85)
 \end{aligned}$$

(83), (84) の両式よりそれぞれ最大たわみ, 荷重変動率を求めれば

$$\begin{aligned}
 y_0 / \{\bar{w} / (k/u_0)\} &= \{y(0) - y(1+\delta)\} / \{\bar{w} / (k/u_0)\} \\
 &= \{f(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 0) + \lambda^2 g(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 1+\delta)\} / \\
 m(\lambda, \delta, \beta, \alpha) &\dots\dots\dots(86)
 \end{aligned}$$

$$w_0/w_L = h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 0)/h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 1) \dots\dots(87)$$

以上は両端弾性支持の場合であるが, (83)~(87)の諸式において $\alpha = 0$ とおけば両端固定の場合, $\alpha = \infty$ とおけば両端単純支持の場合が得られることはいうまでもない。

6.3 考 察

まず両端の支持条件の影響を考えてみよう。(83)~(85)の諸式において注意すべきは, これらの式において α は決して単独ではあらわれず, つねに $\alpha\beta$ の形で入っている点である。すなわちロール端部の曲げ剛性が小さいときの被覆ロールの曲げの挙動は, フレーム, 軸受部の剛性と端部の曲げ剛性との積の形の因子によって支配される。それゆえ第4節の結論にしたがって, フレーム, 軸受部の剛性をいくら高くしても, ジャーナル部の断面の剛性が低いと, 効果は減殺されてしまう。

以上の結果の特殊な場合として, $\delta = 0$ の場合を考えれば, (83) は第1式のみを考えればよい。この場合(85)式は

$$\begin{aligned}
 f(\lambda, 0, \beta, \alpha; \xi) &= \{\psi_3(\lambda) - \psi_3(\lambda, \lambda\xi)\} + \alpha\beta \{\psi_7(\lambda) - \psi_7(\lambda, \lambda\xi)\} \\
 h(\lambda, 0, \beta, \alpha; \xi) &= \psi_3(\lambda, \lambda\xi) + \alpha\beta \cdot \psi_7(\lambda, \lambda\xi) \\
 m(\lambda, 0, \beta, \alpha) &= \psi_5(\lambda) + \alpha\beta \psi_3(\lambda) \} \quad \dots\dots\dots(88)
 \end{aligned}$$

となり, 第4節の(46), (47)の両式が得られるのは $\beta = 1$ の場合のみである。いいかえれば, 本節の結果より第4節の結果をみちびくには, $\delta = 0$ の条件だけでは不十分で, $\beta = 1$ の条件を付加することが必要である。

軸部の長さの影響中, 荷重変動率に及ぼす影響を, 両端固定および両端単純支持の場合に分けて, 数値計算した結果は第15~18図のとおりである。(85)式より

$$\begin{aligned}
 h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 0) &= \sqrt{2} \lambda \{ \psi_1(\lambda) + \delta \beta \{ \psi_1(\lambda) - \delta \cdot \lambda^2 \psi_2(\lambda) \} + \alpha \beta \{ \psi_1(\lambda) - 2\delta \cdot \lambda^2 \psi_2(\lambda) \} \} \\
 h(\lambda, \delta, \beta, \alpha; 1) &= \psi_3(\lambda) + \delta \beta \{ \psi_7(\lambda) + \delta \cdot \lambda^2 \psi_4(\lambda) \} + \alpha \beta \{ \psi_7(\lambda) + 2\delta \cdot \lambda^2 \psi_4(\lambda) \} \} \quad \dots\dots\dots(89)
 \end{aligned}$$

となるが, 両端単純支持すなわち $\alpha = \infty$ の場合は, 荷重

変動率は β に無関係となる。また両端固定すなわち $\alpha = 0$ の場合も, $\delta = 0$ で β が有限であれば, 荷重変動率は β に無関係となる。第15図は両端固定で $\beta = 10$ の場合, 第16図は両端固定で $\beta = 10^2$ の場合, 第17図は両端固定で $\beta = 10^3$ の場合, 第18図は両端単純支持の場合である。これらの図から明らかなように荷重むらは δ の増加とともに増大する。固定の場合 β が大きくなると, δ の

(第15図) 両端固定, $\beta = 10$ の場合の荷重変動率

(第16図) 両端固定, $\beta = 10^2$ の場合の荷重変動率

(第17図) 両端固定, $\beta = 10^3$ の場合の荷重変動率

影響はそれほどいちじるしくはなくなる。第17図には $\beta = 10^3$ の場合を示したが、 $\beta > 10^3$ の場合および極限としての $\beta = \infty$ の場合は、 $\beta = 10^3$ の曲線とほとんど一致する。

ロールの剛性比 β の影響については、荷重変動率に対するものはすでに第15～17図にも示されており、両端固定の場合は、 β の増大とともに荷重むらは増大し、第18図に示した両端単純支持の場合に近づくことが知られる。この間の事情を明らかにするために、 $\delta = 0.1$ の場合の荷重変動率曲線を集め示したものが第19図であり、上記の挙動が明示されている。

(第18図) 両端単純支持の場合の荷重変動率

第19図には同時に両端固定で $\beta = 0$ の場合を示してある。ロール端部の曲げ剛性が低いということからすれば、 $\beta > 1$ の場合のみを考えればよいが、とくにこの場合を加えたのはつぎの理由による。 $\beta = 0$ ということは、 EI が有限であるため、 $E_1 I_1 = \infty$ を意味する。この場合

(第19図) 断面の曲げ剛性の比が荷重変動率に及ぼす影響

$\delta = 0$ でなくても、 $E_1 I_1 = \infty$ のため、固定端が $\xi = 1 + \delta$ から $\xi = 1$ まで移動したことになり、結局は第4節の両端固定の場合と同じになる。このことは(83)～(87)の諸式において $\beta = 0$ とおくことによって数学的にも証明できる。すなわち(85)式に $\beta = 0$ を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda, \delta, 0, \alpha; \xi) &= \psi_3(\lambda) - \psi_3(\lambda, \lambda\xi) \\ g(\lambda, \delta, 0, \alpha; \xi) &= 0 \\ h(\lambda, \delta, 0, \alpha; \xi) &= \psi_3(\lambda, \lambda\xi) \\ m(\lambda, \delta, 0, \alpha) &= \psi_3(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots(90)$$

となり(83)、(84)の両式は(29)、(30)の両式と一致する。

両端固定の場合 $\beta = \infty$ とおいただけでは、単純支持の場合が得られないことも(85)式より理解される。式を示すと長くなり、しかも物理的な意味がはっきりしないので、計算を示すことは省略する。

第19図にはまた $\beta = 1$ の場合も示されている。 $\beta = 1$ という場合は、簡単にいえば全長 $2L_1$ のロールを $x = \pm L_1$ で固定し、被覆層を $2L$ の部分にのみ巻いてある場合に相当する。この場合は全長 $2L_1$ の被覆ロールに幅 $2L$ の布を通した場合と関連があるので重要である。それゆえ両端固定で $\beta = 1$ の場合の荷重変動率を第20図に示しておく。両端単純支持の場合は、荷重変動率は β に無関係であるから、第18図が両端固定の場合の第20図に対応する。

(第20図) 両端固定、 $\beta = 1$ の場合の荷重変動率

以上詳細に考察を試みたが、もっとも重要なことは、第15～20図の示すように、たとえ両端固定であっても、ロール端の軸部の剛性が低いと、両端単純支持の場合に近づくという点である。しかも低剛性部が長いと、条件によっては低剛性部のない両端単純支持の場合よりも荷重むらが大きくなることさえある。それゆえ両端の軸の

部分の長さは極力短くせねばならない。また軸の部分の曲げ剛性もできるだけ大きくすべきである。

7. 結 論

以上の理論的考察により、第3、6節に説明した仮定の下では、つぎの結論が得られる。

- (1) 被覆層の弾性および厚さは、ロール断面における接触幅および最大圧力を支配するだけではなく、ロール軸方向の荷重分布にも関係し、しかもこの影響は金属芯の剛性と組合わさってあらわれる。またフレームおよび軸受部の剛性も荷重分布に関係する。
- (2) ロール間に弾性層をはさんだ場合は、理論的には、はさまない場合と同じ取り扱いができる。被覆ロールに布をはさんだ場合には、布をはさんだためにあらわれる影響は非常に小さい。
- (3) 多層ロールの場合も、弾性層をはさんだ場合の考え方を拡張すれば、弾性層をはさまない単層のロールの場合と同じ取り扱いができる。
- (4) ロール端の軸の部分の剛性の影響を考慮すると、軸受間距離とロールの働き幅との差およびロール部の剛性と軸部の剛性との比の両者が大きいほど、荷重むらは大きくなり、両端固定の場合でもこの影響を無視した単純支持の場合に近づく。

以上の結論は最初に述べた仮定のもとに得られたものである。それゆえそれらの仮定が成立しないと、上記の結論も価値を失う。一方仮定のなかには被覆層の性質を線型ばねであらわすようなかなり無理なものもある。しかしこの仮定は理論的取り扱いを行なうためには、必要不可欠のものと一般に考えられており、やむを得ない仮定として許されるべきものであろう。したがって本研究の結果は、そのまま実際のロールにあてはまると主張すべきものではなく、むしろ理想化された模型に関する結果として今後の実験的研究あるいはマングルの設計、保全などに対して指針を与えるものと考えらるべきであろう。

仮定(6)については、重力の影響は2本のロールに対して非対称にあらわれるから、この仮定は実は仮定(4)に含まれるのであるが、誤解を避けるために掲げた。それゆえ自重の影響は非対称ロールを論ずる際に検討したい。しかし染色仕上ロールでは、その加圧力は自重に比べて相当大きいし、水平配置では自重と加圧力とはたがい垂直に作用するし、鉛直配置でも同じ被覆ロ

ールを2本用いる場合は、いずれも自重によって同じだけたわみ、荷重分布への影響を無視してもよいものと思われる。

また三次元的に考えるべき問題を、二次元的問題と一次元的問題とに分離して、それぞれ独自の立場で理論を導いているから、本研究の与えるたわみと、二次元問題として導かれる被覆層の圧縮量とは、まったく無関係である。もし一致することがあったとしたら、単なる偶然のいたずらに過ぎない。この点もまたこの種の取り扱い方法の大きな弱点のひとつである。しかし、そこまでことを神経質に考えたのでは、かえって科学の進歩は阻害されるであろうというのが、あえてこのような取り扱いを行なった最大の理由である。

8. あ と が き

本研究は、昭和39、40年度の本会染色加工機研究会マンガル部会において提起された問題に対して、研究会と平行して筆者らの研究室において行なわれたものである。かかる機会を与えられた染色加工機研究会に対して謝意を表する。また数値計算の一部を田中(旧姓南条)久子氏に分担してもらったことを記して、謝辞にかえた。

参考文献

- 1) Margaret Hannah; Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, 94 (1951)
- 2) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 6, 256 (1955)
- 3) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 9, 158 (1958)
- 4) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 9, 428 (1958)
- 5) G. J. Parish; Brit. J. Appl. Phys., 12, 333 (1961)
- 6) E. Moss; J. Text. Inst., 50, P654 (1959)
- 7) A. H. Nissan, ed., Textile Engineering Progress, p. 238 (1959) London, Butterworth.
- 8) S. F. Smith; Proc. Tech. Sect., Paper Makers Assoc. Great Brit. Ireland, 17, Part 1, 251 (1936)
- 9) F.A. Garret; Pulp Paper Mag. Canada, 46, 187 (1945)
- 10) J. B. Gough; Tech. Assoc. Papers, 31, 559 (1947)
- 11) R. T. Boynton; Australian Pulp Paper Ind., Tech. Assoc. Proc., 5, 12 (1951)
- 12) R. C. Struken, D.A. Verner; Tappi, 38, 676 (1955)
- 13) M. Jukich; Mod. Plast., 33, No. 8, 138 (1956)