図解による軸の危険速度の問題 についての一考察*

(昭和41年2月26日受理)

長 元 亀 久 男**

→ 摘 要 ←

目 的

梁においてたわみを求める問題について一つの図式的考察をし、取り扱いを簡便にしようとしたものである。

成 果

この図式的解法をここでは軸の危険速度を求める問題に応用したものである。

1. ま え が き

梁におけるたわみを求める図計算については、従来モールの方法があり、はなはだ便利であるが、1箇の集中荷重をもつ梁の場合における任意点のたわみを求める問題は、すでに述べた著者の方法によった方が簡便であると思う。たとえば軸の危険速度を求める問題にて、軸自身の重さによる危険速度の問題は、従来のモールの方法によればよいが、なにか調車などのようなものが軸にとりつけられている場合には、このための危険速度を求めるには、ここに述べる図計算によった方が簡便である。

2. 危険速度の図式計算

いま $w_1, w_2 \dots$ (kg) を軸の各部に作用する荷重として、この荷重による軸のたわみを $y_1, y_2 \dots$ (cm) とする。 g を重力の加速度 (cm/sec²) とし、 N_c を軸の毎分²⁾ 危険回転数とすれば N_c はつぎのように求められている。

$$N_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum w y}{\sum w y^2}} \dots\dots\dots (1)$$

$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$ を軸だけの場合、円板1が取り付けられている場合、円板2が取り付けられている場合、 $\dots$ の危険速度とし、軸全体の危険速度 Ω とすれば、これらの間にはつぎのような関係がある。

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots\dots\dots (2)$$

いま第1図を参照して、両端自由に支えられた梁 AB が $1/m$ なる縮尺にて描かれているものとする。任意点 C において、1箇の集中荷重があるとし、これがある尺度を用いて図のように SC で描かれているものとする。

(第1図) たわみの図計算

* Critical Speed of Shaft Graphically Considered.

** K. Nagamoto, Member. 富山大学

この場合任意点 M (A 端からの距離を u とする) のたわみを求めてみよう。

まず B を中心にして BC に等しく AB の延長上に BD をとる。 A から AB に垂直に単位長さ L に等しく AE をとる。 AE 上に AC に等しく AF をとる。 ED を結び F からこれに平行にひき、 AB との交わりを G とする。 A からたわみを求める点 M に至る長さ AM に等しく AE 上に AH をとる。 EM を結び H からこれに平行にひき、 AB と I において交わらせる。そうすれば IG は $\{(l+c)a-u^2\}$ をあらわす。

$$BD=c \quad AF=a \quad AE=L$$

$$ED \parallel FG \quad \triangle ADE \sim \triangle AGF$$

$$AD:AG=AE:AF$$

$$AG = \frac{(l+c)a}{L}$$

$$AM=AH=u \quad EM \parallel EI$$

$$\triangle AME \sim \triangle AIH$$

$$\frac{AM}{AI} = \frac{AE}{AH} \quad (u) \quad (L) \quad (u)$$

$$AI = \frac{u^2}{L}$$

$$IG = AG - AI = \frac{1}{L} \{(l+c)a - u^2\}$$

つぎに与えられた荷重 SC の頂点 S から AB に平行にひき、 AE と J において交わらせる。 J から B を結び、この線と SC と K において交わらせる。そうすれば KC は A における反力 R_A をあらわす。つぎに I において AB に垂直に、力の単位として K に等しく IP をとる。 I から KC に等しく IP 上に IL をとる。 P と G を結ぶ。 L から PG に平行にひき、 AB と Q において交わらせる。そうすれば IQ は $R_A \{(l+c)a - u^2\}$ をあらわす。

$$IG = \frac{1}{L} \{(l+c)a - u^2\}$$

$$PG \parallel LG \quad IL = R_A$$

$$\triangle IPG \sim \triangle ILQ$$

$$\frac{IP}{IL} = \frac{IG}{IQ} \quad (K) \quad (R_A) \quad \{(l+c)a - u^2\}$$

$$IQ = \frac{R_A \{(l+c)a - u^2\}}{LK}$$

つぎに梁 AB に平行に、 AB に等しく、 A の真下の A' より $A'B'$ をとる。また Q において AB に垂直に、 IQ に等しく QR をとる。 $A'B'$ 上に M の真下に相当する M' において $A'B'$ に垂直に単位長さ M に等しく $M'U$ をとる。 QR の長さをこの $M'U$ 線上に移し、これを $M'T$ とする。 A' と U を結ぶ。 T からこれに平行

にひき、 $A'B'$ との交わりを V とする。そうすれば V
 M' は M 点のたわみに比例するものを与えるのである。

$$IQ = M'T = \frac{R_A \{(l+c)a - u^2\}}{LK}$$

$$\triangle A'M'U \sim \triangle VTM'$$

$$\frac{M'U}{M'T} = \frac{A'M'}{VM'}$$

$$(M) \left(\frac{R_A \{(l+c)a - u^2\}}{LK} \right) (u)$$

$$VM' = \frac{R_A \{(l+c)a - u^2\}}{MLK}$$

第1図のように両端を支えられた梁 AB での任意点 M におけるたわみは E をヤング係数、 I を断面2次モーメントとしてつぎのように求められる。

$$\delta_u = \frac{R_A}{6EI} \{a(l+c)u - u^3\}$$

すなわち VM' を測り、尺度定数として $m^3 \times MLK$ をかけて $6EI$ で割れば、 M 点のたわみが求められる。いま例として直径5 cm、長さ250 cmの軸が両端にて自由に支えられているとし、軸の中央に23 kgの調車があるとき、軸の自重を考えないときの危険速度を図計算してみよう。

(第2図) たわみの図計算の例

第2図を参照して、梁 AB が縮尺1/25で描かれているものとする。梁 AB の中央 C に集中荷重23 kgを SC (10 mm=10 kg)に描く。この点についてのたわみを求めてみる。まず B を中心として BC に等しく、 AB の延

長上に BD をとる. A から AB に垂直に AE の長さ 60 mm を単位長さにとる. AE 上に AC (荷重のかかる点, たわみを求める点) に等しく AF をとる. ED を結び, F からこれに平行にひき, AB との交わりを G とする.

E と C を結び, F からこれに平行にひき, AB と I において交わらせる. つぎに与えられた荷重 SC の頂点 S から AB に平行にひき, AE と J にて交わらせる. J と B を結び, この線と SC と K において交わらせる. I において AB に垂直に力の単位として 50 kg (10 mm = 10 kg) を IP にとる. I から KC に等しく, IP 上に IL をとる. P と G を結ぶ. L から PG に平行にひき, AB と Q において交わらせる. IQ に等しく AB に垂直に QR をとる. AB に等しく AB に平行に A の真下の点 A' から $A'B'$ を描く. この $A'B'$ 上に C に相当する C' において $A'B'$ に垂直に単位の長さとして 50 mm に等しく $C'U$ をとる. QR の長さをこの $C'U$ 線上に移し, これを $C'T$ とする. $A'U$ を結び T からこれに平行にひき, $A'B'$ との交わりを V とする. この VC' を測れば 19 mm が求められる.

$$E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = 30.65 \text{ cm}^4$$

$$\text{尺度定数 } 25^3 \times 6 \times 50 \times 5 = 23\,400\,000$$

$$\frac{1}{6EI} = \frac{1}{6 \times 2\,100\,000 \times 30.65} = 0.00000000259$$

$$1.9 \times 23\,400\,000 \times 0.00000000259 = 0.115 \text{ cm}$$

$$N_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{980}{0.155}} = 880 \text{ rpm}$$

3. む す び

以上述べたように, 1 個の集中荷重をもつ梁の任意点のたわみは図解により直ちに求められる. この図計算操作の分析から拙著^{1,4)}にては機具による計算操作を考えていることを述べている. このようにすれば応用としての軸の危険速度の問題も簡便に取り扱い得ると考えている次第である.

文 献

- 1) 長元亀久男; 日本機械学会論文集, **8**, 32, I (1942-8)
- 2) たとえば谷口修; 機械力学, II, 養賢堂 (1962)
- 3) 長元亀久男; 日本機械学会論文集, **5**, 22, I (1948-2)
- 4) 長元亀久男; 日本機械学会論文集, **9**, 36, I (1951-8)
- 5) 長元亀久男; 石川島技報, **5**, 18 (1950-8)