牽切過程の解析的研究*

(第2報) 計 算 例

(昭和41年10月3日受理) 小 沢 五 郎**

平 松 峻

→ 摘 要 ←

目 的

前報で求めた牽切過程の3主要特性値の基礎式を用いて切断点密度関数、切断送出点密度関数が時間的に一定の場合の計算例を示す。

結 果

(1) 牽切域にトウが入って時間的に変動している紡出の繊維束太さ、牽切力、および繊維長を具体的に計算例として示した。これらの計算例においては繊維束太さと牽切力の間の単純な意味における相関は低かった。

(2) 切断点にばらつきがなくても切断送出点にばらつきがあれば(たとえば単繊維伸度にばらつきがあれば)その牽切過程は「安定」であることを示した。これは切断点密度関数と切断送出点密度関数が繊維先端密度関数の入出力関係に等価に作用していることを示す例である。

(3) 牽切域にトウが入って非常に長時間たった後の繊維束太さと牽切力の値は、ラプラス変換における最終値の定理を利用して簡単に求めることができる。

(4) そのほか、いろいろ興味のある計算例を示した。

1. 結 言

前報において、牽切過程の基本的な性格を理論的に考察し、その主要な特性である繊維長、繊維束太さ、牽切力の3つを一般的に求めることができたが、本報ではそれら基礎式の使用例を示す。

切断点密度関数と切断送出点密度関数とが時間的に一定であるか否かによって、数式の取り扱いの難易は大きく別れるが、本報ではつぎの3つの理由によって、まずそれらが時間的に一定である場合を検討する。

その理由の第1は、正常に牽切が行なわれているときは少なくとも外見上は切断点密度関数と切断送出点密度関数が時間的に一定であるように思われること、理由の第2は、それらが時間的に一定であるということが少なくとも基礎的な1つの場合であること、理由の第3は、それらが時間的に一定であれば計算が簡単であっている情報の情報が簡単に得られることである。

以下章を追って、3特性値を求める簡単な計算例、むらにおける最終値の問題、むらを生じない入力につい

て、およびこれらの結果を使ってそのほかの興味あるいくつかの計算例について示す。もちろん本報の計算結果は従来報告されている結果を含み、さらに時間経過による変動を中心とした新しい情報を提供するであろう。

2. 主要3特性値の計算例

前報において牽切過程の主要な特性値は、繊維長、繊維束太さ、牽切力の3つであることを述べたが、本章ではこの3特性値を計算例として示す。切断点密度関数と切断送出点密度関数とが時間的に一定であれば、繊維長またはその分布はつねに一定であるが、繊維束および牽切力は初期の入力形によってある期間いろいろの形のむらを生じることが予想される。したがって繊維束と牽切力はその平均値とともに変動状態が求められねばならない。繊維束と牽切力はそれぞれ異なる関数の合成関数として示されたから、それぞれの値の相関性は場合によって異なるであろう。

いま、簡単のために切断点も切断送出点も1点に集中した場合を考える。これは第1図に示すような牽切過程

* Analytical Studies of Drafting Break Process. Part 2: Some Examples of Calculation.

(第1報 20巻 7/8号に所載)

** G. Ozawa and T. Hiramatsu, Members. 三菱レイヨン(株)繊維加工研究所

(第1図) 切断点と切断送出点が一集中した牽切過程

であるが、これに初期の繊維先端密度関数入力としてインパルス考えた場合、すなわち繊維先端が一せいにフロントローラー位置に来た場合を考えよう。まず切断点密度関数 $f(x)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて

$$f(x) = \delta(x - x_1) \quad (2-1)$$

であり、これをラプラス変換すると

$$\mathcal{L}f(x) = f(s) = e^{-x_1 s} \quad (2-2)$$

となる。

また切断送出点密度関数 $q(x)$ は、

$$q(x) = \delta(x - x_{01}) \quad (2-3)$$

であり、これをラプラス変換すると

$$\mathcal{L}q(x) = q(s) = e^{-x_{01} s} \quad (2-4)$$

である。

ゆえに前報(4-5)式により、この牽切過程の伝達関数 $G(s)$ は

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{1 - f(s) \cdot q(s)} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-(x_1 + x_{01})s}} \\ &= 1 + e^{-(x_1 + x_{01})s} + e^{-2(x_1 + x_{01})s} \\ &\quad + e^{-3(x_1 + x_{01})s} + \dots \quad (2-5) \end{aligned}$$

となる。

繊維先端密度関数の入力 $n_1(t)$ は供給総繊維本数を M として

$$n_1(t) = M \delta(t)$$

である。これをラプラス変換すると

$$\mathcal{L}n_1(t) = n_1(s) = M \quad (2-6)$$

となる。

したがって繊維先端密度関数の出力 $n_0(t)$ のラプラス変換形 $n_0(s)$ は(2-5), (2-6)式から、

$$\begin{aligned} n_0(s) &= n_1(s) \cdot G(s) \\ &= \frac{M}{1 - e^{-(x_1 + x_{01})s}} \\ &= M \{ 1 + e^{-(x_1 + x_{01})s} + e^{-2(x_1 + x_{01})s} \\ &\quad + e^{-3(x_1 + x_{01})s} + \dots \} \quad (2-7) \end{aligned}$$

となる。ゆえに $n_0(t)$ はこれを逆ラプラス変換して、

$$\begin{aligned} n_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} n_0(s) \\ &= M \{ \delta(t) + \delta(t - (x_1 + x_{01})) \\ &\quad + \delta(t - 2(x_1 + x_{01})) + \dots \} \quad (2-8) \end{aligned}$$

である。すなわち第2図のように $(x_1 + x_{01})$ の時間を周期として繊維先端のかたまりが紡出されてくることになる。

(第2図) インパルス状の $n_1(t)$ を第1図で考えたときの出力 $n_0(t)$

つぎにこの繊維長密度関数 $p(l)$ を求める。 $p(l)$ のラプラス変換形 $P(s)$ は前報(4-7)式により

$$\begin{aligned} p(s) &= f\left(\frac{s}{D}\right) \cdot q(s) \\ &= e^{-\left(\frac{x_1}{D} + x_{01}\right)s} \quad (2-9) \end{aligned}$$

であり、したがって $p(l)$ は、

$$\begin{aligned} p(l) &= \mathcal{L}^{-1} p(s) \\ &= \delta\left(l - \left(\frac{x_1}{D} + x_{01}\right)\right) \quad (2-10) \end{aligned}$$

である。

さらに繊維束太さを求めよう。(2-7)式および前報(4-9)式により、単繊維太さを b とすると繊維束太さのラプラス変換形 $B(s)$ は、

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{M}{1 - e^{-(x_1 + x_{01})s}} \cdot \frac{b}{s} \left(1 - e^{-\left(\frac{x_1}{D} + x_{01}\right)s} \right) \quad (2-11) \end{aligned}$$

となる。ここでもし $D = 4$, $x_1 = 2x_{01}$ とおけば

$$B(s) = \frac{b \cdot M}{s} \frac{1 - e^{-1.5x_{01}s}}{1 - e^{-3x_{01}s}} \quad (2-12)$$

となる。

ゆえに求める繊維束太さ $B(t)$ は

$$\begin{aligned} B(t) &= \mathcal{L}^{-1} B(s) \\ &= b \cdot M \{ u(t) - u(t - 1.5x_0) \\ &\quad + u(t - 3x_0) - u(t - 4.5x_0) + \dots \} \quad (2-13) \end{aligned}$$

である。

(第3図) $x_1 = 2x_{01}$, $D = 4$ の場合の第2図の繊維束太さ

これは第3図に示すような形状であってその平均太さ $\overline{B(t)}$ は,

$$\overline{B(t)} = \frac{b \cdot M \left(x_{01} + \frac{x_1}{D} \right)}{x_{01} + x_1} = \frac{b \cdot M}{2} \quad \dots (2-14)$$

となる。ここで与えた条件はドラフト比4であったが繊維本数は $\frac{1}{4}$ になっていない。このように紡出繊維束の繊維本数が機械的ドラフト比の一意的な関数でないという事は、従来明らかにされている牽切過程の1つの特長である。これは切断点の位置に影響されるためであって(2-14)式によってわかるように、平均繊維本数は切断点がフロントローラー位置に集まったとき、もっとも大きくドラフト比に関係なくなって元の本数のままとなる。また切断点がバックローラー位置に集まったとき、もっとも小さくなる。上に b と示した紡出繊維束の単繊維太さは供給トウの単繊維太さが一定であっても、牽切条件が変わればそれに応じて変わるものであり、牽切諸条件が定まれば一定値をとるものである。

つぎにこれらの牽切力 $Y(t)$ を検討する。

いま、牽切過程上の繊維の強伸度曲線 $y(\tau)$ を前報(3-14)式にしたがって、

$$y(\tau) = \beta \cdot \tau \{ u(\tau) - u(\tau - x_{01}) \} \quad \dots (2-15)$$

とおく。ここに β はある定数、 $u(\tau)$ は単位ステップ関数である。これをラプラス変換すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cdot y(\tau) &= Y(s) \\ &= \beta \cdot x_{01} \left(\frac{1 - e^{-x_{01}s}}{x_{01} \cdot s^2} - \frac{e^{-x_{01}s}}{s} \right) \end{aligned} \quad \dots (2-16)$$

であり、ゆえに(2-7)式と前報(4-12)式とから $Y(t)$ のラプラス像関数 $Y(s)$ は、

$$\begin{aligned} Y(s) &= n_0(s) \cdot y(s) \\ &= M \cdot \beta \cdot x_{01} \cdot \left(\frac{1 - e^{-x_{01}s}}{x_{01} \cdot s^2} - \frac{e^{-x_{01}s}}{s} \right) \cdot \\ &\quad \{ 1 + e^{-(x_1+x_{01})s} + e^{-2(x_1+x_{01})s} + e^{-3(x_1+x_{01})s} + \dots \} \end{aligned} \quad (2-17)$$

$x_1 = 2x_{01}$ の場合

(第4図) 牽切力(第2図に対応)

となる。

したがって牽切力 $Y(t)$ は、

$$\begin{aligned} Y(t) &= \mathcal{L}^{-1} Y(s) \\ &= M \cdot \beta \cdot [t \{ u(t) - u(t - x_{01}) \} + (t - (x_1 + x_{01})) \{ u(t - (x_1 + x_{01})) - u(t - (x_1 + 2x_{01})) \} + (t - 2(x_1 + x_{01})) \{ u(t - 2(x_1 + x_{01})) - u(t - (2x_1 + 3x_{01})) \} + \dots] \end{aligned} \quad (2-18)$$

であり、これは第4図に示すような形状である。この牽切力が繊維束太さと単純な意味における相関のきわめて低いものであることは、たとえば(2-13)式を求めたときと同様に $x_1 = 2x_{01}$ において第4図の横軸をかきなおし、(2-13)式を図示した第3図と比較することによっても明らかである。また、仮に $x_1 = 0$ とおけば(2-11)式から繊維束太さにまったくむらは生じないが、牽切力は(2-18)式からきよ歯状波となることがわかる。また、したがって繊維束太さと牽切力の間の関係は入力形によっても変わり、一般にその間に高い相関があると決める必要はさける必要がある。

3. むらにおける最終値の問題

切断点密度関数と切断送出点密度関数とが時間的に一定であれば、前章のような特殊の場合を除いては、牽切過程の出力である繊維束太さと牽切力のむらは時間がたつと消滅して行き、それぞれある一定値に収束することが予想されるが、この最終値はラプラス変換における最終値の定理によって簡単に求めることができる。

繊維束太さ $B(t)$ の最終値は定理および前報(4-7)、(4-11)式により

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot B(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} b \cdot n_1(s) \cdot \frac{1 - f\left(\frac{s}{D}\right) q(s)}{1 - f(s) q(s)} \end{aligned} \quad (3-1)$$

である。

また、牽切力 $Y(t)$ の最終値は定理および前報 (4-14) 式により

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} n_I(s) \cdot \frac{\int_0^\infty y(s) \cdot q(x_0) dx_0}{1 - f(s) \cdot q(s)} \quad \dots\dots\dots (3-2)\end{aligned}$$

である。

これらについて、つぎに計算例を示そう。切断点がフロントローラー（座標軸上ゼロの位置）とバックローラー（座標軸上 x_b の位置）間に均等分布し、切断送出点が1点（座標軸上 x_{01} の位置）に集中している牽切過程に、繊維先端が M 個一せいに入った（すなわち構成繊維本数 M 本のトウが繊維先端をそろえてフロントローラーに入った）とし、紡出された繊維束の単繊維太さが b であったとすると、

$$f(s) = \frac{1}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-x_b s}) \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

$$q(s) = e^{-x_{01}s} \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

$$f\left(\frac{s}{D}\right) = \frac{D}{x_b} \cdot \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\frac{x_b}{D}s}\right) \quad \dots\dots (3-5)$$

$$n_I(s) = M \quad \dots\dots\dots (3-6)$$

であるから、この繊維束太さ $B(t)$ の最終値は (3-1) 式から

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} M \cdot b \cdot \frac{1 - \frac{D}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-\frac{x_b}{D}s}) e^{-x_{01}s}}{1 - \frac{1}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-x_b s}) e^{-x_{01}s}} \\ &= M \cdot b \cdot \frac{x_{01} + \frac{x_b}{2D}}{x_{01} + \frac{x_b}{2}} \quad \dots\dots\dots (3-7)\end{aligned}$$

となる。(3-7) 式は定理の前提を満足するから、最初繊維先端のインパルスを入力として加えたために、初期においてはそれに応じてかなりのむらを生じているはずであるが、時間がたてば (3-7) 式で示される一定値となっていることを示す。

また、牽切過程上の繊維の強伸度曲線 $y(\tau)$ を (2-15) 式のように与えると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y(s) \cdot q(x_0) dx_0 \\ = \beta \cdot x_{01} \left(\frac{1 - e^{-x_{01}s}}{x_{01} \cdot s^2} - \frac{e^{-x_{01}s}}{s} \right) \quad \dots (3-8)\end{aligned}$$

であるから、この牽切力 $Y(t)$ の最終値は (3-2) 式から

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} M \cdot \beta \cdot x_{01} \cdot s \cdot \\ &\quad \frac{1 - e^{-x_{01}s}}{x_{11} \cdot s^2} - \frac{e^{-x_{01}s}}{s} \\ &\quad \frac{1 - \frac{1}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (e^{-x_{01}s} - e^{-(x_{01}+x_b)s})}{s}\end{aligned}$$

$$= M \cdot \beta \cdot \frac{x_{01}^2}{2x_{01} + x_b} \quad \dots\dots\dots (3-9)$$

となる。これも (3-7) 式と同様、定理の前提を満足する。(3-7), (3-9) 式の値については、さらに第5章においても言及するから参照されたい。

ここではもっとも簡単な計算例のみを示したが、同様の手法によって、切断点密度関数と切断送出点密度関数が定まれば、構成繊維本数 M 本のトウの繊維先端をどのように入れても繊維束太さと牽切力の最終値は変わらないことや、切断点密度関数か切断送出点密度関数のどちらかがひろがりをもてば、その牽切過程はどのような入力に対しても最終値を有することや、従来明らかにされているように、もし切断送出点密度関数が一定であれば切断点がフロントローラーよりであるほど牽切力は大きいことなどが示される。

これらさらに進んだ問題は実験との対比において興味のある問題であり、その対比のためには考察すべき問題も残されているので、本報ではこれらの算出は省略し、以後必要に応じて本手法により計算を行なうこととする。

4. むらを生じない入力について

牽切過程にトウが入ってから長い時間がたてば、紡出繊維束太さにも牽切力にもむらはなくなることは前章において述べたとおりであるが、この章では始めからまったくむらを生じない繊維先端密度関数の入力形を検討する。石川、田畑^{2,4)}も類似のものを求めているが、本章ではとくに前報以降以降章への関係を明らかにするために一般形をまとめておきたい。

いま、フロントローラー、バックローラー間の繊維先端密度関数を $N(x)$ と表わすことにすると、時間によってこの $N(x)$ の形が変わらなければ $N(0)$ は一定、すなわちフロントローラー位置においてむらはない。供給トウ繊維本数が一定、切断送出点密度関数が一定であるから、 $N(x)$ が一定で $N(0)$ が一定であれば、 dt 間に切断する繊維本数は $N(0)dt$ 、または $N(0)dx$ で一定である。時刻が t から $t+dt$ へ変わると $(x+dx)$ の位置の繊維本数、 $N(x+dx)dx$ は $N(x)dx$ に変わるが、一方切断によってこの位置に新しく生じる繊維先端数は $N(0)dx \cdot f(x)dx$ である。

ゆえに $N(x)$ がつねに一定であるためには第5図を参照して

(第5図) 牽切域内の繊維先端密度関数

$$N(x) \cdot dx - N(x+dx) \cdot dx = N(0) \cdot dx \cdot f(x) dx \quad \dots\dots\dots (4-1)$$

である。

ここで

$$N(x) - N(x+dx) = -dN(x) \quad \dots\dots (4-2)$$

であるから (4-1) 式は

$$dN(x) = -N(0) \cdot f(x) dx \quad \dots\dots\dots (4-3)$$

または

$$\frac{dN(x)}{dx} = -N(0) \cdot f(x) \quad \dots\dots\dots (4-4)$$

となる。

$x=0$ において $N(x)=N(0)$ であるから (4-4)

式から

$$N(x) = N(0) \left\{ -\int_0^x f(x) dx + 1 \right\} \quad \dots\dots (4-5)$$

である。

フロント ローラー、バック ローラー間の繊維先端密度関数 $N(x)$ が、切断点密度関数 $f(x)$ との関係において (4-5) 式の条件を満たせばつねにむらは出ない。この逆はなりたないことは注意を要する。

つぎに (4-5) 式における $N(0)$ の値を求める。

始めに切断送出点が 1 点 x_{01} に集中している場合を考えれば、繊維はフロント ローラーを出始めてから時刻 x_{01} までは切れ始めないから、最初その間は一定の繊維先端密度関数をフロント ローラーに供給しないと一定の出力とはならない。そこで入力としては x_{01} の時間長だけは一定の $N(x)$ 、それから後が (4-5) 式の $N(x)$ を与えればよいことになる。いま x をバック ローラーの後方にまで拡張して考えることにすれば入力全体を $n_I(x)$ として

$$n_I(x) = N(0) \left\{ u(x) - \int_0^x f(x-x_{01}) \cdot u(x-x_{01}) dx \right\} \quad \dots\dots\dots (4-6)$$

であり、また供給トウの総繊維本数を M とすれば

$$\int_0^\infty n_I(x) dx = M \quad \dots\dots\dots (4-7)$$

であるから (4-6)、(4-7) 両式より

$$\begin{aligned} & N(0) \\ &= \frac{M}{\int_0^\infty \left\{ u(x) - \int_0^x f(x-x_{01}) \cdot u(x-x_{01}) dx \right\} dx} \quad \dots\dots\dots (4-8) \end{aligned}$$

となる。

一般に切断送出長 x_{01} が一定値 x_{01} でなく、 $q(x_{01})$ の確率密度関数であらわされるときは (4-6) 式から

$$n_I(x) = N(0) \left\{ u(x) - \int_0^\infty \int_0^x f(x-x_0) u(x-x_0) q(x_0) dx dx_0 \right\} \quad \dots\dots\dots (4-9)$$

となる。これが一般にむらをまったく生じない繊維先端密度関数の入力形を表わす式である。このときの $N(0)$ は (4-8) 式と同様に

$$\begin{aligned} & N(0) \\ &= \frac{M}{\int_0^\infty \left\{ u(x) - \int_0^\infty \int_0^x f(x-x_0) u(x-x_0) q(x_0) dx dx_0 \right\} dx} \quad \dots\dots\dots (4-10) \end{aligned}$$

である。

ここで (4-9) 式がむらをまったく生じない入力であることを証明しておこう。

(4-9) 式の両辺をラプラス変換すると

$$n_I(s) = N(0) \cdot \frac{1}{s} \left\{ 1 - f(s) \cdot q(s) \right\} \quad \dots\dots\dots (4-11)$$

である。

ここに

$$\mathcal{L}n_I(x) = n_I(s)$$

である。

(4-11) 式を牽切過程の繊維先端密度関数の入出力関係を表わすつぎの式 (前報 (4-6) 式)

$$n_0(s) = n_I(s) \cdot \frac{1}{1 - f(s)q(s)}$$

に代入すると

$$n_0(s) = N(0) \cdot \frac{1}{s} \quad \dots\dots\dots (4-12)$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} n_0(t) &= \mathcal{L}^{-1}n_0(s) \\ &= N(0) \cdot u(t) \quad \dots\dots\dots (4-13) \end{aligned}$$

となり、むらはまったく生じない。

5. そのほかの簡単な計算例

5.1 切断点、切断送出点ともに 1 点に集中した場合
この牽切過程は第 2 章でも取り扱い、第 2 章の場合は

(第6図) 矩形状 $n_I(t)$

いつまでもむらの消えないことを述べたが、さらにこの節ではこの過程への入力形が変わった場合を検討する。

切断点の位置は第2章と同じく x_1 、切断送出点の位置は同じく x_0 にあるとし、まず第6図に示すような繊維先端密度関数が初期入力として与えられた場合を考えよう。供給総繊維本数を M とすると

$$n_I(t) = \frac{M}{x_1 + x_0} \left\{ u(t) - u(t - (x_1 + x_0)) \right\} \quad \dots\dots\dots (5-1)$$

であり、これは(4-6)、(4-8)式によって与えられるむらを生じない入力である。両辺をラプラス変換すると

$$n_I(s) = \frac{M}{x_1 + x_0} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-(x_1 + x_0)s}) \quad \dots\dots\dots (5-2)$$

である。

ゆえに出力 $n_0(t)$ は(2-5)、(5-2)両式より

$$\begin{aligned} n_0(s) &= n_I(s) \cdot G(s) \\ &= \frac{M}{x_1 + x_0} \cdot \frac{1}{s} \quad \dots\dots\dots (5-3) \end{aligned}$$

$$\therefore n_0(t) = \mathcal{L}^{-1} n_0(s) = \frac{M}{x_1 + x_0} \cdot u(t) \quad \dots\dots\dots (5-4)$$

となつてまったくむらを生じない。

つぎに繊維束太さ $B(t)$ を求めると(5-3)式および前報(4-9)式により単繊維太さを b 、ドラフト比を D として、

$$B(s) = \frac{M}{x_1 + x_0} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{b}{s} \left(1 - e^{-(\frac{x_1}{D} + x_0)s} \right) \quad \dots\dots\dots (5-5)$$

$$\begin{aligned} \therefore B(t) &= \mathcal{L}^{-1} B(s) \\ &= \frac{b \cdot M}{x_1 + x_0} \left[t - \left\{ t - \left(\frac{x_1}{D} + x_0 \right) \right\} \cdot u \left(t - \left(\frac{x_1}{D} + x_0 \right) \right) \right] \quad \dots\dots\dots (5-6) \end{aligned}$$

となる。

これは第7図のような関数で定常状態となつたときの平均太さ $\overline{B(t)}$ は、

(第7図) $n_0(t)$ にむらがないうきの繊維束太さ

$$\overline{B(t)} = \frac{b \cdot M}{D} \cdot \frac{(x_1 + D x_0)}{(x_1 + x_0)} \quad \dots\dots\dots (5-7)$$

である。第2章に述べたと同じく $x_1 = 0$ なら本数表示の太さはドラフト比に関係なくなり、また x_0 は D により変わるから $x_0 = 0$ のとき、すなわち入力の形がドラフト比によって変わらぬとき、太さは $1/D$ に比例する。

(第8図) ひろがりをもつ矩形状 $n_I(t)$

つぎにやや複雑な例として、第8図に示すようなひろがりを持った繊維先端密度関数が初期入力として与えられた場合を考える。

フロントローラー、バックローラー間距離を x_b とし、これまでと同様に、

$$n_I(t) = \frac{M}{x_0 + x_b} \left\{ u(t) - u(t - (x_0 + x_b)) \right\} \quad \dots\dots\dots (5-8)$$

$$\therefore n_I(s) = \frac{M}{x_0 + x_b} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-(x_0 + x_b)s}) \quad \dots\dots\dots (5-9)$$

であり、求める出力 $n_0(t)$ は(2-5)、(5-9)式より

$$\begin{aligned} n_0(s) &= n_I(s) G(s) \\ &= \frac{M}{x_0 + x_b} \cdot \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-(x_0 + x_b)s}) (1 + e^{-(x_0 + x_1)s} + e^{-2(x_0 + x_1)s} + e^{-3(x_0 + x_1)s} + \dots) \quad \dots\dots\dots (5-10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} n_0(s) \\ &= \frac{M}{x_0 + x_b} \left\{ u(t) - u(t - (x_0 + x_b)) + u(t - (x_0 + x_1)) - u(t - (2x_0 + x_1 + x_b)) + u(t - 2(x_1 + x_0)) - \dots \right\} \quad \dots\dots\dots (5-11) \end{aligned}$$

(第9図) (5-11) 式の表わす繊維先端密度関数
(破線は右辺各項を表わす)

となる。

これは第9図に示すような $x_{01} + x_b$ を周期とする関数であり、これの太さを求めると (5-10) 式および前報 (4-9) 式により

$$B(s) = \frac{M}{x_{01} + x_b} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-(x_{01} + x_b)s}}{1 - e^{-(x_{01} + x_b)s}} \cdot \frac{b}{s} \left(1 - e^{-(x_{01} + x_b)s} \right) \quad (5-12)$$

であり、ここで簡単のため $x_1 = 0$ とおくと

$$B(s) = \frac{b \cdot M}{x_{01} + x_b} \cdot \frac{1}{s^2} (1 - e^{-(x_{01} + x_b)s})$$

$$\therefore B(t) = \mathcal{L}^{-1} B(s)$$

$$= \frac{b \cdot M}{x_{01} + x_b} \left\{ t - (t - (x_{01} + x_b)) \cdot u(t - (x_{01} + x_b)) \right\} \quad (5-13)$$

となる。

(第10図) $x_1 = 0$ としたときの第9図の繊維束太さ

これは第10図に示すような関数で定常状態となったときの平均太さ $\overline{B(t)}$ は、

$$\overline{B(t)} = b \cdot M \quad (5-14)$$

となって本数表示の太さはこれまでの結果と同じくドラフト比に関係のない値となる。

以上を総括すれば、まず繊維束太さを構成繊維本数で表わすことにすれば、これは機械のドラフト比が同じでも従来からいわれているように切断点の位置によって変わるものであることが明らかである。また本例のように切断点分布も切断送出長分布も1点に集まったものであ

れば、その紡出スライバーむらは初期入力 of 形によって大きく異なるものであることがわかる。また繊維先端密度関数と繊維束太さとの関係については、両者のまったく異なる場合もあるということが第10図の例で明らかであろう。たとえば第10図の場合、このようなスライバーはここでは太さむらをまったく示さないが、これを一度ドラフトすればきわめて大きいむらが発生する。その意味で繊維先端密度関数の形で諸現象を把握しておくことは、通常の紡績ドラフトの場合と同様に重要なことである。

5.2 切断点が一様に分布し切断送出点が1点に集中する場合

(第11図) 切断点が一様に分布する場合

第11図に示すように、切断点がフロントローラー、バックローラー間に均等に分布し、 x_0 にはばらつきがなく、それらが時間的に動かない場合の計算例を示す。

まず

$$f(x) = \frac{1}{x_b} \{ u(x) - u(x - x_b) \} \quad (5-15)$$

$$\therefore f(s) = \mathcal{L} f(x) = \frac{1}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (1 - e^{-x_b s}) \quad (5-16)$$

であり、また

$$q(x_0) = \delta(x_0 - x_{01}) \quad (5-17)$$

$$\therefore q(s) = e^{-x_{01}s} \quad (5-18)$$

である。

これに (4-6), (4-8) 両式で求められる繊維先端密度関数にむらを生じない入力 $n_I(t)$ を第11図のように与えた場合

$$n_I(t) = \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} u(t) + \frac{1}{x_b} \cdot \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \left\{ (t - (x_{01} + x_b)) \cdot u(t - (x_{01} + x_b)) - (t - x_{01}) \cdot u(t - x_{01}) \right\} \quad (5-19)$$

$$\therefore n_I(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \left\{ 1 - \frac{1}{x_b} \cdot \frac{1}{s} (e^{-x_{01}s} - e^{-(x_{01} + x_b)s}) \right\} \quad (5-20)$$

である。

ゆえに求める出力 $n_0(t)$ は (5-16), (5-18), (5-20) 各式および前報 (4-5) 式により

$$\begin{aligned} n_0(s) &= n_1(s) \cdot G(s) \\ &= \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \cdot \frac{1}{s} \dots\dots\dots (5-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} n_0(s) \\ &= \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \cdot u(t) \dots\dots\dots (5-22) \end{aligned}$$

となる。

すなわち繊維先端密度関数にまったくむらは出ない。繊維長分布および繊維束太さは第2章とまったく同様の手法で求められるから省略し、本節では牽切力 $Y(t)$ について検討する。

いま、1本の繊維の伸び・応力関係を (2-15), (2-16) 式とすると前報 (4-12) 式から

$$\begin{aligned} Y(s) &= n_0(s) \cdot y(s) \\ &= \beta \cdot x_{01} \cdot \frac{M}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \cdot \left(\frac{1 - e^{-x_{01}s}}{x_{01}s^3} - \frac{e^{-x_{01}s}}{s^2} \right) \dots\dots\dots (5-23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Y(t) &= \frac{M \cdot \beta \cdot x_{01}}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \left\{ \frac{t^2}{2x_{01}} u(t) - \frac{(t - x_{01})^2}{2x_{01}} u(t - x_{01}) - (t - x_{01}) u(t - x_{01}) \right\} \dots\dots\dots (5-24) \end{aligned}$$

である。

(第12図) 牽切力 (第11図に対応)

これは第12図に示すような牽切力である。すなわち x_{01} の位置までは2次曲線的に上昇し、それから後は一定値 $\overline{Y(t)}$ を

$$\overline{Y(t)} = \frac{M \cdot \beta \cdot x_{01}^2}{2 \left(x_{01} + \frac{1}{2}x_b \right)} \dots\dots\dots (5-25)$$

として示す。

ここで切断送出長以内に先端を持つ繊維の平均張力

T_n として

$$T_n = \frac{\beta x_{01}}{2} \dots\dots\dots (5-26)$$

また切断送出点とフロントローラー間に先端を有する繊維総本数 n として

$$n = \frac{M \cdot x_{01}}{x_{01} + \frac{1}{2}x_b} \dots\dots\dots (5-27)$$

を考えると (5-25) 式は

$$\overline{Y(t)} = T_n \cdot n \dots\dots\dots (5-28)$$

となって従来報告されているものとなる。

繊維の切断伸度やドラフト比との関係を求めるときは、切断伸度と切断送出長の間に求められている関係を、 x_0 と x_b の基準速度の違いを考慮しつつ (5-27) 式に代入すればよい。

たとえば、切断時の繊維の平均切断伸度 ε と切断送出長の関係として藤野、堀川の近似式を用いることにすれば

$$\overline{Y(t)} = T_n \cdot n \cdot \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + (1 + \varepsilon)(D - 1 - \varepsilon)} \dots\dots\dots (5-29)$$

となり、藤野、堀川が牽切力について述べているつぎの式

$$\overline{Y(t)} = T_n \cdot n \cdot \frac{2\varepsilon}{D\varepsilon + (1 + \varepsilon)(D - 1)} \dots\dots\dots (5-30)$$

より少し大きい値を示す。その差は ε が大きい程大きい。ドラフト比が $(1 + \varepsilon)$ になった場合を考えると (5-29) 式は $T_n \cdot n$ となってトウの全繊維をひきのばす形であり、(5-30) 式は $T_n \cdot n / (1 + \varepsilon)$ である。

5.3 切断点が1点に集中し、切断送出点がいび分布を有する場合

本節では繊維伸度にはばらつきのある場合を想定し、それにしたがって切断送出点が多く分布している場合を考察する。

この切断送出点の分布については、これを1点に集中した場合を考察した報告^{4,6)}が多いが、切断域全域に切断点が均等に分布することは少ないことを考えれば容易に推定されるように、切断点の分布にくらべてこの切断送出点の分布は無視できない広がりを持つ場合が多い。

前節のような切断点がいび分布をもつ場合、その過程はむらに対して「安定」¹⁾であるといわれているが、これを実験的に確かめるときは伸度にはばらつきのない繊維が現実にはないから十分の注意を必要とする。

いま簡単のために第2章と同じく切断点が1点に集まり、 x_0 に第13図右上のようなばらつきがあり、第2章の例と同じく繊維先端が一せいにフロントローラー位置にきた場合を考える。

(第13図) 切断送出長にばらつきのある場合の
むらの減衰状態の概念

まず前報(4-5)式より

$$G(s) = \frac{1}{1 - (0.2e^{-x_{01}s} + 0.6e^{-x_{02}s} + 0.2e^{-x_{03}s})e^{-x_1s}} \quad \dots\dots\dots (5-31)$$

であり、(2-6)式から

$$\begin{aligned} n_0(s) &= n_1(s) \cdot G(s) \\ &= M \{ 1 + (0.2e^{-x_{01}s} + 0.6e^{-x_{02}s} \\ &\quad + 0.2e^{-x_{03}s})e^{-x_1s} + (0.2e^{-x_{01}s} + 0.6e^{-x_{02}s} \\ &\quad + 0.2e^{-x_{03}s})^2 e^{-2x_1s} + (0.2e^{-x_{01}s} + 0.6e^{-x_{02}s} \\ &\quad + 0.2e^{-x_{03}s})^3 e^{-3x_1s} + \dots\dots \} \quad \dots\dots (5-32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} n_0(s) \\ &= M \{ \delta(t) + 0.2\delta(t - (x_{01} + x_1)) \\ &\quad + 0.6\delta(t - (x_{02} + x_1)) + 0.2\delta(t - (x_{03} \\ &\quad + x_1)) + 0.04\delta(t - 2x_{01}) + \dots\dots \} \quad \dots\dots (5-33) \end{aligned}$$

となる。

これは第13図に示す概念であって、第2図にくらべるとむらがしだいに減衰して行っているのが明らかである。

繊維長、繊維束太さ、牽切力はいままで述べてきたと同様の手法で求められるから省略する。

このように繊維伸度のばらつきは、牽切過程をむらに対して「安定」なものとする作用を有しており、このことはすでに前報(4-5)式で切断点密度関数と切断送出点密度関数とが等価な働きをすることを述べたときに明らかであった。

6. 総 括

切断点密度関数と切断送出点密度関数が時間的に一定

であるという前提のもとにつぎのようないくつかの計算例を示した。

(1) 牽切域にトウが入って時間的に変動している紡出の繊維束太さ、牽切力、および繊維長を具体的に計算例として示した。繊維束太さと牽切力は異なる関数の合成関数として前報において示されたから、その相関性が場合によって異なることは予想されたが、これらの計算例においては繊維束太さと牽切力の間の互に単純な意味における相関は低かった。

(2) 牽切過程においてもドラフト過程におけると同様、繊維先端密度関数と繊維束太さとの間にまったく相関のない場合を示しう。

(3) 切断点密度関数と切断送出点密度関数は繊維先端密度関数の入出力関係に等価に作用するものであることは前報において述べたが、このことからたとえば切断点にばらつきがなくても切断送出点にばらつきがあれば(たとえば単繊維伸度にばらつきがあれば)その牽切過程は安定であることを計算例において示した。

(4) 牽切域にトウが入って非常に長時間たった後の繊維束太さと牽切力の値はラプラス変換における最終値の定理を利用して簡単に求めることができる。

(5) 牽切域にトウを入れるとき、その入れ方によってまったくむらを生じさせないこともできる。

おわりに、本研究に対して種々の指導をいただいた三菱レイヨン繊維加工研究所長井内亮氏に深く謝意を表す。

なお、本報文は本会第18回年次大会(1965-5)で発表した研究の一部である。

文 献

- 1) 小沢, 平松; 本誌, 20, T179 (1967-7/8)
- 2) 石川, 田畑; 繊維誌, 8, 594 (1952) 179 (1967-7/8)
- 3) C. J. Savant; "Fundamentals of the Laplace Transformation" McGraw-Hill (1962)
- 4) 田畑, 杉本, 山松; 合繊紡績研究会「パーロック式合繊紡方式について」本会 (1964-2-26)
- 5) 田畑, 石川; 本誌, 9, 220 (1956)
- 6) 堀川; 本誌, 17, 572 (1964)
- 7) 藤野ほか; 「ドラフトの理論と実際」本会 p351 (1958)
- 8) 藤野, 堀川; 本誌, 6, 774 (1953)