—報 文—

ドラフト特性の伝達関数表示の研究

(第2報) 時間的変動がない場合の変速点および繊維長分布が
伝達関数に与える影響について

静岡大学 工学部 井 原 素 三 (会員)
" 野 飼 享 (")

Studies on the Transfer Function of Drafting Process.

Part 2 : Influence of the Velocity-change-point and Fiber-length Density
Functions on the Transfer Function of Drafting Process when Both
of Them are Steady.

Motozo Ihara and Toru Nogai,

Faculty of Engineering, Sizuoka University, Hamamatu, Shizuoka-ken.

Abstract

We made a study of the transfer function of drafting process, between fed and delivery sliver thickness, when the velocity-change-point and fiber-length density functions are no change with time. Following results are obtained :

(1) The transfer function between fed and delivery sliver thickness is shown the following equation :

$$G_w(s) = \bar{f}_c((D-1)s/V_f) \frac{1 - \bar{f}(s/V_f)}{1 - \bar{f}(s/V_b)} e^{-l_d s/V_f}$$

where $\bar{f}_c(p)$ is Laplace transform of $\bar{f}_c(x)$, velocity-change-point density function, and $f(p)$ is Laplace transform of $f(l)$, fiber-length density function.

(2) We were able to lead the transfer functions for the wide shape of density functions using the Pearson 1st type curve for the velocity-change-point and fiber-length density functions.

(3) Comparing the transfer functions by Bode diagram to change the kurtosis and skewness of density functions, following results are obtained.

(i) The greater the absolute value of skewness and the smaller the kurtosis of the velocity-change-point density function, the more desirable the drafting process property is.

(ii) The smaller including sign the kurtosis and skewness of fiber length density function, the more desirable the drafting process property is.

(iii) The most desirable drafting process is found when two constants of the Pearson 1st type curve, m_1 and m_2 are following; in the case of the velocity-change-point density function ($m_1=0$, $m_2=0$) or ($m_1=1$, $m_2=1$), fiber-length density function ($m_1=0$, $m_2=1$).

摘 要

目 的 ドラフト過程における変速点分布および繊維長分布の密度関数が時間的に変動しない場合について、ドラフト過程の伝達関数を、それらの密度関数の関数として表現し、密度関数の形状が伝達関数に与える影響を検討する。

成 果 (1) 供給スライダ太さと紡出スライダ太さの伝達関数は、つぎの式で示される。

$$G_w(s) = \bar{f}_c((D-1)s/V_f) \frac{1 - \bar{f}(s/V_f)}{1 - \bar{f}(s/V_b)} e^{-l_d s/V_f}$$

ここで $\bar{f}_c(p)$ は、変速点分布密度関数のラプラス変換形、 $\bar{f}(p)$ は、繊維長分布密度関数のラプラス変換形である。

(2) 上記の密度関数にヒアソン1型曲線を適用すると広範囲の形状の場合の伝達関数を求めることができる。

(3) ヒアソン1型曲線の形状は、尖度と歪度によって決定されるから、尖度および歪度の伝達関数に与える影響を検討した結果、いずれの場合も尖度は小さく、歪度は大きいことが望ましいことがわかった。

1. はじめに

紡績工程におけるドラフトの研究は、ドラフト理論と呼ばれて、古くから多くの人々によって研究され、在来の方法論においては、すでに完成の域に達している。しかしながらそれにもかかわらず、現実のドラフトとドラフト理論の間には未だに相当の開きがあり必ずしもドラフト理論の研究は、これで終りであるとは思われない。そこで理論をさらに発展させるためには、何らかの新しい手法の導入が必要であり、そのため新しい手法として、制御工学で用いられる伝達関数または状態変数の使用が考えられる。

ドラフト過程の特性を表現するのに伝達関数を用いることは、今日まですでに多くの人々によって試みられた。しかしながら、それらの多くは、ドラフト過程を集中定数系として扱っている。しかしながら実際のドラフト過程は分布定数系であり、制御装置の設計のためには十分であっても、ドラフト過程の理論の発展の手法には適当でない。ドラフト過程の特性を分布定数系として扱ったものとして、川端ら¹⁾の研究があるが、この研究においては、伝達関数の出力はスライバ太さであるが、入力²⁾は繊維先端密度となっている。

本研究では供給スライバ太さと紡出スライバ太さを実測して、それらの自己相関関数と相互相関関数から統計的手法によってドラフト過程の伝達関数を求めることを目的としているから、入力が繊維先端密度では実測困難であるという不都合が生ずる。もちろん、供給スライバの繊維長分布がわかれば、先端密度からスライバ太さを求めることは可能であり、この方法でスライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数を求めたのが竹田ら²⁾の研究である。しかしながら、その研究では、等長繊維長の場合の研究に限定されているため、不等長繊維長の場合に拡張することができない。何故ならば、等長繊維の場合には、どのようにドラフトが行われようと、供給スライバと紡出スライバの繊維長分布の間に差異は生じないが一般的な繊維長分布の場合には、ドラフトの方法によっては、供給スライバの繊維長分布と紡出スライバの繊維長分布との間に差異が生ずることがあるから、スライバ太さの伝達関数を求めるためには、ドラフトによって繊維長分布がどのように変化するかを検討しなければならない。

このような観点から、我々は第1報³⁾において、供給スライバ太さも紡出スライバ太さも時間的に変動しない、いわゆる「平衡状態」の場合の解析を行なったが、本報

においては、変速点分布関数および供給スライバ中の繊維長分布関数が時間的に変動しない場合について、次のような手法で解析する。

まず最初に、変速点および供給スライバの繊維長分布の密度係数が与えられたときの供給スライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数を、それらの密度関数の関数として求める。続いてそれらの密度関数に対して、ピアソン第1型(第2型を含む)を適用して、伝達関数を求める。そして最後に、ピアソン型密度関数の形状を、歪度と尖度の二つの値によって表現し、それらの変化によって伝達関数がどのように変わるかを検討する。

2. 前提条件および基礎式について

第1報³⁾において仮定した前提条件は、本報においてもそのまま維持されるものとする。そして、本報以降において、解析のために用いる基礎式をまとめると、次のようになる。

(1) 連続の式

ドラフト過程を長さをもった流体(繊維)の流れと考えれば、流体力学で用いられる連続の式が、次のように表わされる。

「ドラフトゾーン内の任意の区間に一定時間に入ってきた繊維量または繊維先端数と、出て行った繊維量または繊維先端数との差はその時間にその区間にたくわえられた繊維量または繊維先端数に等しい。」

(2) 変速確率の式

変速確率の式は、浮遊繊維の先端が変速する確率は繊維長には無関係であるという前提条件から導かれるもので、繊維先端の変速確率は、次のように表わされる。

「ドラフトゾーン内の任意の微小区間に入ってくる低速繊維先端がこの区間の出口までに変速する確率は、その低速繊維先端がこの区間の入口にあるとき、後端のバックローラに把持されていれば零であり、把持されていない場合には、その位置におけるその時刻の浮遊低速繊維先端密度関数の逆数に等しい」この確率を P とすれば、次の式で表わされる。

$$P = 1 / \left[n_b(x, t) - n(0, t - \frac{x}{V_b}) \left\{ 1 - F(t)_{t=x} \right\} \right]$$

ここで x と $x+dx$ で囲まれる微小区間において、低速繊維先端が変速によって減少する数の関係を表わすのが変速確率の式で、この区間における全減少数を n_a 、特定の繊維の先端密度を n_s とすれば、変速確率の式は $\left\{ n_s(x) - n_s(x+dx) \right\} = n_a \times n_s(x) P$

3. 本報において用いられる記号について

すでに、第1報³⁾において使用した記号は、そのまま踏襲するものとして、本報において新しく用いられる記号のうちで、主要なものをまとめると次の通りである。

- $n(x, t)$: 時刻 t における、点 x の繊維先端密度関数^{注1)}
- $\Delta n(x, t)$: 同上の平衡値 $n(x)$ からの偏差
- $\Delta N(x, s)$: 時刻 t における、点 x の低速繊維先端密度関数
- $\Delta n_b(x, t)$: 同上の平衡値からの偏差
- $\Delta N_b(x, s)$: $\Delta n_b(x, t)$ ラプラス変換形
- $W(x, t)$: 時刻 t における、点 x のスライバ太さ
- $\Delta W(x, t)$: 同上の平衡値からの偏差
- $\Delta \bar{W}(x, s)$: $\Delta W(x, t)$ のラプラス変換形
- $F_c(x)$: 点 x の変速点分布関数
- $f_c(x)$: 同上の密度関数 $\left(= \frac{dF_c(x)}{dx} \right)$
- $F(l)$: 供給スライバの繊維長分布関数 (時間的に変化しない)
- $f(l)$: 同上の密度関数 $\left(= \frac{dF(l)}{dl} \right)$
- $\bar{f}_c(p)$: $f_c(x)$ のラプラス変換形
- $\bar{f}(p)$: $f(l)$ のラプラス変換形
- $F(l, x, t)$: 時刻 t における、点 x の繊維長分布関数^{注2)}
- $\Delta F(l, x, t)$: 同上の平衡値からの偏差
- $\Delta \bar{F}(l, x, s)$: $\Delta F(l, x, t)$ のラプラス変換形
- $F_b(l, x, t)$: 時刻 t における、点 x の低速繊維の繊維長分布関数
- $\Delta F_b(l, x, t)$: 同上の平衡値からの偏差
- $\Delta \bar{F}_b(l, x, s)$: $\Delta F_b(l, x, t)$ のラプラス変換形
- $G_n(s)$: 供給スライバの繊維先端密度関数の偏差 ($\Delta N(0, s)$) と紡出スライバの繊維先端密度関数の偏差 ($\Delta N(l_d, s)$) の間の伝達関数 $(= \Delta N(l_d, s) / \Delta N(0, s))$

- $G_w(s)$: 供給スライバ太さの偏差と紡出スライバ太さの偏差との間の伝達関数 $(= \Delta W(l_d, s) / \Delta \bar{W}(0, s))$
- m_1, m_2 : ピアソン第1型曲線の定数
- M : 同上 $(= m_1 + m_2)$
- β_1 : ピアソン第1型曲線の歪度
- β_2 : ピアソン第1型曲線の尖度
- ω_n : 無次元周波数 $(= \omega / \omega_0)$
- ω_0 : 基本周波数 $(= 2\pi V_f / l_{min})$
- λ_i : 無次元波長 $(= \lambda / l_{min})$
- a : $(D-1)(l_n - l_s) / V_f$
- b : $(l_{max} - l_{min}) / V_f$
- $f_i(b_s)$: $\left\{ 1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_f}\right) \right\} / \left\{ 1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_b}\right) \right\}$

4. ドラフト過程の繊維先端密度関数

4.1 繊維先端密度関数

供給スライバ中の繊維長分布は不変であるが、繊維先端密度関数が時間的に変動する場合、点 x における低速繊維の先端密度関数^{注1)} $\Delta n_b(x, t)$ は、変速点分布関数の定義から

$$\Delta n_b(x, t) = \Delta n\left(0, t - \frac{x}{V_b}\right) \left\{ 1 - F_c(x) \right\} \cdots \cdots (1)$$

のように表わされる。上式をラプラス変換することによって

$$\Delta N_b(x, s) = \Delta N(0, s) e^{-\frac{s}{V_b}x} \left\{ 1 - F_c(x) \right\} \cdots \cdots (2)$$

が得られる。

次に、任意の点 x と $x+dx$ の間の微小区間について連続の式をたて、その式から偏微分方程式を導くと

(補遺I参照)

$$\frac{\partial \Delta n(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{V_f} \frac{\partial \Delta n(x, t)}{\partial t} = \left(1 - \frac{1}{D} \right) \frac{\partial \Delta n_b(x, t)}{\partial x} \cdots \cdots (3)$$

が導かれる。この式をラプラス変換することによって

$$\frac{d \Delta N(x, s)}{dx} + \frac{1}{V_f} s \Delta N(x, s) = \left(1 - \frac{1}{D} \right) \frac{d \Delta N_b(x, s)}{dx} \cdots \cdots (4)$$

表1 繊維先端密度関数の平衡値からの偏差

x	$\Delta N(x, s)$
$0 < x \leq l_s$	$\Delta N(0, s) e^{-\frac{s}{V_b}x}$
$l_s < x \leq l_n$	$\Delta N(0, s) e^{-\frac{s}{V_b}x} \left[e^{-\frac{(D-1)s}{V_f}l_s} \left\{ \frac{1}{D} + \left(1 - \frac{1}{D} \right) (1 - F_c(x)) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f}(x-l_s)} - \frac{(D-1)s}{V_f} \int_{l_s}^x (1 - F_c(x')) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f}x'} dx \right\} \right]$
$l_n < x$	$\Delta N(0, s) e^{-\frac{s}{V_f}x} \left[\frac{1}{D} e^{-\frac{(D-1)s}{V_f}l_s} - \frac{(D-1)s}{V_f} \int_{l_s}^x (1 - F_c(x')) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f}x'} dx \right] (= \Delta N(l_n, s) e^{-\frac{s}{V_f}(x-l_n)})$

のような $\Delta N(x, s)$ に関する微分方程式となる。この微分方程式の $\Delta N_b(x, s)$ に (2) 式を代入して解き、初期条件と境界条件を入れることによって表 1 のような結果が得られる。

4.2 繊維先端密度の伝達関数

表 1 の結果を用いて、バックローラ把持点 ($x=0$) とフロントローラ把持点 ($x=l_d$) の間の繊維先端密度関数の伝達関数を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \Delta N(l_d, s) / \Delta N(0, s) \\ &= \frac{e^{-\frac{s}{V_f} l_d}}{D} \left[e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} l_s} - \frac{(D-1)s}{V_f} \int_{l_s}^{l_n} \left\{ 1 - F_c(x) \right\} e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} x} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{(D-1)s}{V_f} \int_{l_s}^{l_n} f_c(x) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} x} dx \right] \dots (5) \end{aligned}$$

ここで変速点分布の密度関数 $f_c(x)$ を $l_s \leq x \leq l_n$ になる範囲以外では、つねに零であるような関数であるとすれば、(5) 式の積分範囲を次のように書き直しても、結果は同じである。

$$G_n(s) = \frac{e^{-\frac{s}{V_f} l_d}}{D} \int_0^\infty f_c(x) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} x} dx \dots (6)$$

この式において、 $t_1 = (D-1)x/V_f$ なる置換を行い、ラプラス変換の定義を用いると、次のように書き表すことができる。

$$G_n(s) = \frac{e^{-\frac{s}{V_f} l_d}}{D} \bar{f}_c \left(\frac{(D-1)s}{V_f} \right) \dots (7)$$

ただし、式中の $\bar{f}_c \left(\frac{(D-1)s}{V_f} \right)$ は、次のように定義するものとする。

$$\bar{f}_c \left(\frac{(D-1)s}{V_f} \right) = \frac{V_f}{(D-1)} \left\{ L \left\{ f_c(x) \right\} \right\}_P = \frac{(D-1)s}{V_f} \dots (8)$$

(7) 式が繊維先端密度関数の伝達関数で、変速点分布の密度関数を x についてラプラス変換することによって求めることができる。

5. ドラフト過程における繊維長分布関数

第 1 報³⁾で明らかにしたように、すでに変速した繊維の先端と後端がまだバックローラに把持されている繊維の先端が混在するような範囲が存在する場合には、ドラフト過程の途中における繊維長分布は、供給スライバの繊維長分布とは異なる。そして平衡状態においては、

同一位置における繊維長分布の時間的変動はなく、またドラフト終了後は、供給スライバの繊維長分布に復帰する。しかしながら、本報のように、供給スライバの繊維長分布は不変であっても、繊維先端密度関数が時間的に変動する場合には、ドラフト過程の途中や紡出スライバの繊維長分布がどのように変化するかを検討しなければならない。

5.1 低速繊維の繊維長分布関数

ドラフトゾーン内の任意の点 x を、時刻 t と $t+dt$ の間に通過した低速繊維の先端数と、点 $x+dx$ を時刻 $t+(dx/V_b)$ と $t+(dx/V_b)+dt$ の間に通過した低速繊維の先端数を比較すると、後者の方がその区間で変速した先端数だけ減少している。そこで低速繊維の中で繊維長が l と $l+dl$ の間にある繊維先端のみに注目して変速確率を用いて、先端数減少の式をたてて $\Delta F_b(l, x, s)$ についての偏微分方程式を導くと(補遺Ⅱ参照)次の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \Delta F_b(l, x, s)}{\partial x \partial l} + \left\{ \frac{s}{V_b} + \frac{1}{n_b(x)} \frac{dn_b(x)}{dx} - P_1(x) \right\} \frac{\partial \Delta F_b(l, x, s)}{\partial l} = 0 \dots (9)$$

ここで $P_1(x)$ は、次のように表わされる関数であるとする。

$$P_1(x) = \frac{1}{n_b(x) - n_0} \frac{dn_b(x)}{dx} \dots (10)$$

(9) 式を $\Delta F_b(l, x, s)$ について解き、

$$\Delta F_b(l, x, s)_{x=l_s} = 0$$

なる境界条件を入れることによって

$$\Delta F_b(l, x, s) = 0 \dots (11)$$

なる結果が得られる。このことから、供給スライバ中の繊維先端密度が時間的に変動する場合にも、ドラフト過程における低速繊維の繊維長分布は時間的に変動せず、平衡状態で求めた結果と同じになることがわかる。

5.2 全繊維(低速繊維+高速繊維)の繊維長分布関数

全繊維の繊維長分布は、連続の式から導かれた偏微分方程式(補遺Ⅲ参照)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Delta F(l, x, s)}{\partial x \partial l} + \left\{ \frac{s}{V_f} + \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \right\} \frac{\partial \Delta F(l, x, s)}{\partial l} \\ &= \left(1 - \frac{1}{D} \right) \frac{n_b(x)}{n(x)} \left\{ \frac{\partial^2 F_b(l, x)}{\partial x \partial l} + \frac{1}{n_b(x)} \frac{dn_b(x)}{dx} \frac{\partial F_b(l, x)}{\partial l} \right\} \\ & \quad - \left\{ \frac{\partial^2 F(l, x)}{\partial x \partial l} + \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \frac{\partial F(l, x)}{\partial l} \right\} \\ &= 0 \dots (12) \end{aligned}$$

を解くことによって求められ、この場合にも

$$\Delta F(l, x, s) \equiv 0 \dots\dots\dots (13)$$

となり、やはり平衡状態のときの繊維長分布と同じであることがわかる。

6. スライバ太さの伝達関数

6.1 供給スライバ太さ

供給スライバ中の繊維長分布関数を $F(l)$ とすれば、供給スライバ太さ $\Delta W(0, t)$ は

$$\begin{aligned} \Delta W(0, t) &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta n(y, t) \{1 - F(y)\} dy \\ &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta n\left(0, t - \frac{y}{V_f}\right) \{1 - F(y)\} dy \\ &\dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

であるから、そのラプラス変換形は

$$\begin{aligned} \Delta W(0, s) &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta N(0, s) e^{-\frac{s}{V_f} y} \{1 - F(y)\} dy \\ &= \Delta N(0, s) \cdot \gamma \int_0^{l_{max}} e^{-\frac{s}{V_f} y} \{1 - F(y)\} dy \\ &= \Delta N(0, s) \gamma \frac{V_f}{s} \left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_f} y} dy\right\} \dots (15) \end{aligned}$$

となる。ここで $f(l)$ は、繊維長分布の密度関数である。

6.2 紡出スライバ太さ

第1報³⁾で明らかにしたように、紡出スライバ中の繊維長分布関数は供給スライバの繊維長分布関数と同じであるから、紡出スライバ太さは

$$\begin{aligned} \Delta W(l_d, t) &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta n(l_d - y, t) \{1 - F(y)\} dy \\ &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta n\left(l_d, t - \frac{y}{V_f}\right) \{1 - F(y)\} dy \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となり、そのラプラス変換形は

$$\begin{aligned} \Delta W(l_d, s) &= \gamma \int_0^{l_{max}} \Delta N(l_d, s) e^{-\frac{s}{V_f} y} \{1 - F(y)\} dy \\ &= \Delta N(l_d, s) \gamma \frac{V_f}{s} \left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_f} y} dy\right\} \dots (17) \end{aligned}$$

のように表わされる。

6.3 供給スライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数

供給スライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数は、(15)式と(17)式から

$$G_w(s) = \frac{\Delta N(l_d, s) \gamma \frac{V_f}{s} \left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_f} y} dy\right\}}{\Delta N(0, s) \gamma \frac{V_f}{s} \left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_f} y} dy\right\}}$$

$$= G_n(s) \cdot D \frac{\left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_f} y} dy\right\}}{\left\{1 - \int_{l_{min}}^{l_{max}} f(y) e^{-\frac{s}{V_b} y} dy\right\}} \dots (18)$$

のように導かれる。そして上式において $f(l)$ は $l_{min} \leq l \leq l_{max}$ 以外では零である関数であるから、 $t_2 = y/V_f$, $t_3 = y/V_b$ なる置換をして、ラプラス変換の定義を適用すると

$$G_w(s) = f_c \left(\frac{(D-1)s}{V_f} \right) \frac{1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_f}\right)}{1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_b}\right)} e^{-\frac{s}{V_f} l_d} \dots (19)$$

のように書き直すことができる。ただし上式で $\bar{f}\left(\frac{s}{V_f}\right)$ および $\bar{f}\left(\frac{s}{V_b}\right)$ は、それぞれ次の式のように定義するものとする。

$$\bar{f}\left(\frac{s}{V_f}\right) = V_f \left[L \left\{ f(l) \right\} \right]_p = \frac{s}{V_f} \dots\dots\dots (20)$$

$$\bar{f}\left(\frac{s}{V_b}\right) = V_b \left[L \left\{ f(l) \right\} \right]_p = \frac{s}{V_b} \dots\dots\dots (21)$$

このようにして、供給スライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数 $G_w(s)$ は、(19)式から明らかなように、変速点分布の密度関数 $f_c(x)$ によって決定される部分と繊維長分布の密度関数 $f(l)$ によって決定される部分とむだ時間の直列結合の形で与えられる。

7. 変速点分布および繊維長分布の密度関数

スライバ太さの伝達関数は、変速点分布と繊維長分布の密度関数から求めることができるが、そのためには、それらの密度関数がラプラス変換が可能な関数形で表わされなければならない。しかしながら、これらの関数形については、必ずしも明らかでない。

繊維長分布の密度関数は、ステープル ダイアグラムを求めることによって、図形的に求めることができるがその形状が多岐にわたっているため、一つの関数形で表現されていない。一方の変速点分布の形状は、実測することが困難であるところから、正規分布に近い形状をしているという一野らの報告があるのみである。

われわれは、①有限な両端を有すること、②できるだけ広範囲の形状に適用が可能であること、③ラプラス変換形が求まること、などの条件を考慮して、ピアソン第1型曲線⁵⁾を適用することにする。

7.1 ピアソン第1型曲線

ピアソン第1型曲線(第2型曲線も包含する)は、次

の式で表わされる曲線である。

$$g(y)=g_0(y-c)^{m_1}(d-y)^{m_2} \\ \left\{u(y-c)-u(y-d)\right\} \cdots \cdots (22)$$

ここで、式中の g_0, c, d, m_1 および m_2 は定数を表わし、 $u(x)$ は $x=0$ における単位ステップを表わすものとする。ここで単位ステップの差を掛けたのは、この関数を $c \leq y \leq d$ の範囲のみで値を持ち、その範囲外では零となるような性質を一つの式で表現するためである。

この曲線において、 c と d が与えられると g_0 は次の式で与えられるから

$$g_0=\Gamma'(m_1+m_2+2) / \\ (d-c)^{m_1+m_2+2} \Gamma'(m_1+1) \Gamma'(m_2+1) \cdots (23)$$

曲線は、 m_1 および m_2 の値のみによって決定される。そして、 m_1 および m_2 の値によって非常に広範囲の形状の曲線を得ることができる。すなわち、 $m_1=m_2$ の場合には、左右対称のピアソン第1型曲線となり、一様分布から放物線分布、正規分布や δ 関数分布に近い分布まで包含させることができる。また $m_1 \neq m_2$ の場合には左右いずれかに歪んだ曲線となり、三角形分布から δ 関数まで異った歪をもった曲線を得ることができる。これらの種々の曲線の形状は、次の式によって表わされる歪度 β_1 と尖度 β_2 によって決定される。

$$\beta_1=4(m_1-m_2)^2(M+3) / \\ (m_1+1)(m_2+1)(M+4)^2 \cdots (24)$$

$$\beta_2=\left\{6(M+3)+3(M+4) \beta_1\right\} / 2(M+5) \cdots (25)$$

これらの関係を表にまとめると、表2のようになりそして $(m_1=m_2) \rightarrow \infty$ が正規分布に近い曲線（実際上は分布範囲が極めて狭くなるので δ 関数として扱うことが可能）となり、 $m_1=0$ で $m_2 \rightarrow \infty$ のような場合には δ 関数に近づく。

図1 ピアソン第1型の変速点分布密度関数

図2 ピアソン第1型の繊維長分布密度関数

この曲線を変速点分布の密度関数に適用して図示したのが図1であり、繊維長分布に適用したのが図2で図の上方が分布関数(ステープル ダイアグラムに相当)、図の下方が密度関数である。

7.2 ピアソン第1型曲線のラプラス変換

ピアソン第1型曲線は極めて広い範囲の形状に適用することが可能であるが、ただ不都合なことは、 m_1 および m_2 の値が整数でない場合には、ラプラス変換を簡単に求めることができないことである。本報では、 m_1 および m_2 の値が整数である場合に限定して検討する。 m_1 および m_2 が整数であるとき、(22)式を展開して、ラプラス変換すると次の式ようになる。

$$\bar{g}(p)=\frac{g_0}{p^{m_1+m_2+1}}\left\{\sum_{r=0}^{m_2}(-1)^r C_r \Gamma'(m_1+r+1) \right. \\ p^{m_2-r}(d-c)^{m_2-r} e^{-c p}-e^{-d p} \\ \left. \left\{(-1)^{m_1} \sum_{q=0}^{m_1} C_q \Gamma'(m_2+q+1) \right. \right. \\ \left. \left. p^{m-q}(d-c)^{m_1-q}\right\} \cdots \cdots (26)\right.$$

ただし、ここで $\bar{g}(p)$ は $g(y)$ の y についてのラプラス変換形を表わすものとする。

7.3 変速点分布密度関数とそのラプラス変換

上記(26)式において, $c=l_s$, $d=l_n$ において, スライバ太さの伝達関数の中で変速点分布によって決定される部分である $\bar{f}(as)$ を求めるとつぎようになる.

$$\bar{f}(as) = \frac{\Gamma(m_1+m_2+2) e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} l_s}}{\Gamma(m_1+1) \Gamma(m_2+1) (as)^{m_1+m_2+1}} \left\{ \sum_{r=0}^{m_2} (-1)^r m_2 C_r \Gamma(m_1+r+1) (as)^{m_2-r} - e^{-as} \left\{ (-1)^{m_2} \sum_{q=0}^{m_1} m_1 C_q \Gamma(m_2+q+1) (as)^{m_1-q} \right\} \right\} \dots (27)$$

ただし, ここで a は, 次の式で表わされる定数とする.

$$a = (D-1)(l_n - l_s) / V_f \dots (28)$$

7.4 繊維長分布関数によって

決定される部分のラプラス変換形

繊維長分布密度関数のラプラス変換形は, $c=l_{min}$, $d=l_{max}$ として(27)式と同じ形で求まるから, スライバ太さ伝達関数の中で繊維長分布によって決定される部分を次のように表わすとすれば

$$\bar{f}_i(bs) = \left\{ 1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_f}\right) \right\} / \left\{ 1 - \bar{f}\left(\frac{s}{V_b}\right) \right\} \dots (29)$$

$f_i(bs)$ は次のように書き表わすことができる.

$$f_i(bs) = \left[A (Dbs)^{M+1} - e^{-hbs} D^{M+1} \left\{ \sum_{r=0}^{m_2} (-1)^r m_2 C_r \Gamma(m_1+r+1) (bs)^{m_2-r} - e^{-bs} \left\{ (-1)^{m_2} \sum_{q=0}^{m_1} m_1 C_q \Gamma(m_2+q+1) (bs)^{m_1-q} \right\} \right\} \right] / \left[A (Dbs)^{M+1} - e^{-hDbs} \left\{ \sum_{r=0}^{m_2} (-1)^r m_2 C_r \Gamma(m_1+r+1) (Dbs)^{m_2-r} - e^{-Dbs} \left\{ (-1)^{m_2} \sum_{q=0}^{m_1} m_1 C_q \Gamma(m_2+q+1) (Dbs)^{m_1-q} \right\} \right\} \right] \dots (30)$$

ただし式中の A , M , b および h は, それぞれ次の式で与えられる定数である.

$$A = \frac{\Gamma(m_1+1) \Gamma(m_2+1)}{\Gamma(m_1+m_2+2)} = \beta(m_1, m_2) \dots (31)$$

$$M = m_1 + m_2 \dots (32)$$

$$b = (l_{max} - l_{min}) / V_f \dots (33)$$

$$h = l_{min} / (l_{max} - l_{min}) \dots (34)$$

8. スライバ太さの伝達関数

変速点分布および繊維長分布の密度関数にピアソン第1型曲線を適用した場合のスライバ太さの伝達関数は, 次の式で表わされることが導かれた.

$$G_{ir}(s) = \bar{f}_c(as) \cdot \bar{f}_i(bs) e^{-\left(\frac{l_s}{V_b} + \frac{l_d - l_s}{V_f}\right)s} \dots (35)$$

ここで, $\bar{f}_c(as)$ および $\bar{f}_i(bs)$ は, それぞれ(27)式と(30)式を代入するものとする. ただし, 式に含まれている m_1 と m_2 は, (27)式と(30)式で同じになる必要はなく, 独立に変わり得ることに注意する必要がある.

このようにして密度関数として適用したピアソン第1型曲線は, 表2で示したように, 歪度と尖度によって形状が決定されるから, 密度曲線の歪度と尖度が, スライバ太さ伝達関数にどのような影響を与えるかを, 表3の

表2 ピアソン1型 曲線の歪度と尖度

M	m ₁	m ₂	β ₁ (歪度)	β ₂ (尖度)	分布の型
0	0	0	0	1.8	一様分布
1	0	1	-0.32	2.4	三角形分布
	1	0	0.32	2.4	
2	0	2	-0.740	3.0952	放物線分布
	1	1	0	2.1429	
	2	0	0.740	3.0952	
3	0	3	-1.1020	3.6964	
	1	2	-0.0816	2.357	
	2	1	0.0816	2.357	
	3	0	1.1020	3.6964	
4	0	4	-1.4	4.2	
	1	3	-0.1288	2.50	
	2	2	0	2.3	
	3	1	0.1288	2.50	
6	4	0	1.4	4.2	
	0	6	-1.8514	4.9792	
	1	5	-0.48	3.1091	
	2	4	-0.096	2.5845	
	3	3	0	2.45	
	4	2	0.096	2.5845	
8	5	1	0.48	3.1091	
	6	0	1.8514	4.9792	
	0	8	-2.1728	5.5470	
	2	6	-0.3352	3.0026	
	4	4	0	2.5385	
	6	2	0.3352	3.0026	
13	8	0	2.1728	5.5470	
	3	10	-0.2466	3.0160	
	10	3	0.2466	3.0160	
	0	20	-3.0423	7.1410	
	5	15	-0.16638	2.9996	
	10	10	0	2.76	
20	15	5	0.16638	2.9996	
	20	0	3.0423	7.1410	

ような例について、ボード線図を用いて検討すると次のようになる。

表3 ドフフト過程の諸量の値

諸 量	数 値
V_f	60 cm/sec
V_n	10 cm/sec
D	6
l_s	6 cm
l_n	9 cm
l_d	10 cm
l_{min}	2 cm
l_{max}	8 cm

8.1 変速点分布によって決定される部分の伝達関数 $\bar{f}_c(as)$ のボード線図

伝達関数 $\bar{f}_c(as)$ が、変速点分布の密度関数尖度の影響を調べるために、歪度 $\beta_1=0$ の場合（ピアソン第2型に相当）について、尖度 β_2 を変化させたときのボード線図を示すと図3のようになる。ただし、図のよこ軸は無次元化した周波数 ω_n ($\omega_0=2\pi V_f/l_{min}$ で割った値) をとってある。また図の上方の目盛りは無次元波長で、紡出スライバ上の長さで最短繊維長の何倍であるかを表わしている。図から明らかなように、一般に尖度が大きくなると、ゲイン曲線は上方に上がり、0 dB に近づくが位相はほとんど変わらない。ただし $M=0$ ($\beta_2=1.8$) の場合すなわち変速点が一樣分布の場合には、ゲインも位相ともに振動的な曲線となる。

次に、歪度の影響をみるために、曲線の尖度 $\beta_2 \approx 3.0$ (一定) の場合について、歪度 β_1 が種々変化したとき

図3 変速点分布密度関数の尖度と $\bar{f}_c(as)$ の関係を示すボード線図

のボード線図を示すと図4のようになる。図から明らかなように、曲線が中心からフロントローラ側に歪んでも（歪度は正）、バックローラ側に歪んでも（歪度は負）、歪度の絶対値が同じであれば、ゲインは同じであるが位相が変わる。そして、歪度の絶対値が大きいほど、ゲイン曲線の高周波側が下方に移動することがわかる。したがって、紡出スライバのむらを小さくするためには尖度ができるだけ小さく、歪度の絶対値をできるだけ大きくすればよい。

図4 変速点分布密度関数の歪度 β_1 と $\bar{f}_c(as)$ との関係を示すボード線図 ($\beta_2 \approx 3.0$ 一定)

8.2 繊維長分布によって決定される部分の伝達関数 $\bar{f}_l(bs)$ のボード線図

同様に伝達関数 $\bar{f}_l(bs)$ のボード線図によって繊維長分布の影響を検討する。まず尖度の影響を調べるために、歪度 $\beta_1=0$ のとき、尖度 β_2 が種々変化したときのボード線図を示すと図5のようになる。図から明らかなように、繊維長分布の尖度が大きくなると、低周波側で多少さがるが、振動的性格が強くなっていく。図中の細線は、密度関数が δ 関数になったときを表わすが、このときの尖度は無限大で、 $M \rightarrow \infty$ の極限における $\beta_2 = 3.0$ の場合と異なるが、実際上は、ある程度尖度が大きくなれば、 δ 関数の場合とほとんど変わらないから尖度は3.0としてある。

次に、繊維長分布の密度関数の歪度が、 $\bar{f}_l(bs)$ に与える影響を調べるために、尖度がほぼ2.4である場合について伝達関数を求めボード線図で表わすと図6のようになる。図から明らかなように、この場合のゲイン特性は、変速点分布の場合と異なり、歪度の絶対値は同じで

図5 繊維長分布密度関数の尖度 β_2 と $f_i(bs)$ の関係を示すボード線図 ($\beta_1=0$)

図6 繊維長分布密度関数の歪 β_1 と $f_i(ds)$ の関係を示すボード線図 ($\beta_2=2.4$)

も符号(正負)が異なることによって異なり歪度が小さいほど曲線下方にさがることがわかる。したがって、この図上に示されている三つの場合には、 $\beta_1=-0.32$ の場合すなわち $m_1=0$, $m_2=1$ の場合がもっともよい(ゲイン曲線が下方にある)ことがわかる。

以上のことから、繊維長分布によって決定される部分の伝達関数 $\bar{f}_i(bs)$ は、繊維長分布の尖度が小さく、歪度は大きい方がよいことがわかる。

8.1 ドラフト過程全体の伝達関数

ドラフト過程全体の伝達関数 $G_w(s)$ は、 $\bar{f}_c(as)$ と

$\bar{f}_i(bs)$ の直列結合であるから、 $G_w(s)$ のボード線図は8.2で求めたボード線図と8.3で求めたボード線図を加え合わせることによって求められる。そして、まず $\bar{f}_c(as)$ については、変速点分布密度関数の尖度ができるだけ小さく、歪度の絶対値が大きいことが望ましい。しかしながら、一般に歪度を大きくすれば尖度も大きくなるから歪度と尖度との関係から、両方の値に最適値が存在するはずである。

ドラフト特性の最適について考える場合には、位相を除外してゲインだけで考えることができるから、繊維長分布の密度関数は一定 ($m_1=0$, $m_2=1$) として、変速点分布の密度関数の歪度と尖度を変化させたときの伝達関数をボード線図で示すと図7のようになる。図から明らかに、ゲイン曲線が下方にある方が紡出スライバむらが少なくなるという立場からすれば、CとDの場合は他の二つの場合に比較して劣ることは明らかである。しかしながら、A($m_1=0$, $m_2=0$) と B($m_1=1$, $m_2=1$) との優劣は、簡単には決められない。ゲイン曲線が、ある周波数帯では上に、他の周波数帯では下にあるというような場合についての比較においては、供給スライバ太さむらのスペクトル密度との関連で考察しなければ正確な結論は得られない。AとBを比較した場合に $D=6$ であるから、供給スライバむらに最短繊維長 l_{min} より短い波長のむらがあれば、AよりBの方が優れているが、逆に l_{min} の3~1倍のむらが多ければ、Aの方がBより優れていることになる。

図7 変速点分布密度関数とドラフト過程の伝達関数との関係を示すボード線図(繊維長分布関数は一定)

いずれにしても、尖度が小さくて歪度も零の場合であることから、歪度の影響よりも、尖度の影響の方が大きいことがわかる。

次に、変速点分布が一定 ($m_1=1$, $m_2=1$) の場合について、繊維長分布の密度関数の尖度と歪度を種々変化した場合のボード線図を示すと図8のようになる図から明らかなように、A, B, C, D の四つの場合において、B ($m_1=0$, $m_2=1$) の場合が最良と考えられる。

図8 繊維長分布密度関数とドラフト過程の伝達関数を示すボード線図

9. スライバ太さ伝達関数についての考察

以上の検討の結果について考察してみよう。

まずドラフト過程における変速点分布関数は、一般的な傾向として、尖度が小さく、歪度が大きいことが望ましいが、しかしながら歪度の影響は比較的小さいことから、尖度の小さく、また歪度も小さい一様分布 ($m_1=m_2=0$) の場合もしくは放物線分布 ($m_1=m_2=1$) の場合がよいという結論が得られた。このことは、変速点が一点に集中することが、ドラフトむらを増加させることを表わしている。このことは、ドラフトの平滑化作用などと呼ばれている結果と一致するものである。

次に繊維長分布については、尖度が大きくなると、ドラフト特性が振動的となることから、できるだけ尖度を小さくすることが望ましいという結果が得られた。このことは、繊維長分布が等長であることは望ましくないことをしめしている。一方歪度については、負の歪度が

きいほどよいことがわかったが、このことは図2からわかるように、短い繊維が多くて長い繊維が少ない方がよいことを意味している。そして、尖度および歪度を適当に組み合わせた結果、繊維長分布の密度関数が、図2の一点鎖線で示したような直角三角形 ($m_1=0$, $m_2=1$) の場合が最良で、そのときのステープル ダイアグラムは、図2の上方の図のように放物線となる。このような繊維長分布は、実際に用いられている繊維長分布とは、かなり異なっていると思われる。

10. 結 論

以上の検討の結果得られた結論をまとめると、次のようになる。

ドラフト過程における変速点分布の密度関数および繊維長分布の密度関数が時間的に変動しない場合において

(1) 供給スライバ太さと紡出スライバ太さの伝達関数は、次の形で表わされる。

$$G_w(s) = f_c(as) \frac{1 - f\left(\frac{s}{V_f}\right)}{1 - f\left(\frac{s}{V_b}\right)} e^{-\frac{L_d}{V_f}s}$$

(2) 変速点および繊維長分布の密度関数として、ピアソン第1型度数曲線を適用したときのドラフト過程のスライバ太さの伝達関数は、(27)式および(30)式を上式に代入した形で表わされ、 m_1 および m_2 にいろいろの値を与えることによって、一様分布から δ 関数分布までの幅広い場合について、一つの式で表現することができる。

(3) ピアソン第1型度数曲線は、歪度 β_1 と尖度 β_2 の二定数によってその形状が決定される。これら二つの値がドラフト過程の伝達関数に与える影響は次の通りである。

(イ) 変速点分布の密度関数は、同一の歪度においては尖度が小さいことが望ましく、同一の尖度に対しては、歪度の絶対値が大きいことが望ましい。

(ロ) ボード線図による検討の結果、最適の密度関数は、放物線分布 ($\beta_1=0$, $\beta_2=2.1429$) または一様分布 ($\beta_1=0$, $\beta_2=1.8$) である。

(ハ) 繊維長分布の密度関数は、同一歪度に対しては尖度が小さいことが望ましく、同一の尖度に対しては、歪度が符号を含めて、小さいことが望ましい。

(ニ) 最適な密度関数は、直角三角形分布 ($\beta_1=-0.32$, $\beta_2=2.4$) の場合である。

11. む す び

以上のようにして得られた結論は、変速点分布および繊維長分布の密度関数が時間的に変動しない場合についてである。しかしながら、変速点分布の密度関数は、実測が困難であることから確認はされていないが、時間的にその形状が変わることが考えられる。繊維長分布については、一般の紡績工程においては、個々のスライバでは変動が認められるとしても、ダブリングによってなくなると考えられる。ただ索切紡績などの特殊な紡績では供給スライバ中の繊維長分布の変動を考慮しなければならないことが考えられる。このような、密度関数の時間的変動の問題については、次報で検討することにする。

文 献

- 1) 川端, 藤野; 本誌, 12, 868 (1942-12)
- 2) 竹田, 三平; 本誌, 15, 176 (1962-3)
- 3) 井原 ; 本誌, 22, 9 (1963-9)
- 4) 一野, 後藤; 織学誌, 12, 6 (1956-6)
- 5) 佐藤 ; 数理統計学 (培風館)

注

注1) 繊維先端密度関数 $n_b(x, t)$ は、時刻 t において、点 x と $x+dx$ の間に先端がある繊維本数を N とすれば、次の式で定義される。

$$n(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} N / \Delta x$$

低速繊維先端密度関数 $n(x, t)$ についても同様にして定義される。

注2) 繊維長分布関数 $F(l, x, t)$ についても、時刻 t において Δx の区間と先端がある繊維の繊維長分布関数を考え、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限值と定義する。低速繊維の繊維長分布関数についても同様とする。

注3) 供給スライバ太さや先端密度関数が時間的に変動するということは、静的に考えれば、供給スライバの太さや先端密度関数がスライバの場所によって異なるということで、これをバックニップ点 ($x=0$) で観測すると、スライバの移動にともなう変動することになる。

注4) ヒアソン曲線の原点は一般に曲線の分布の中にあるが、ここでは、 $x=0$ の点あるいは $l=0$ の点を原点とするように座標を変換してある。

注5) 式の上からは、歪度に正負は現われないが、便宜上、 x または l が小さい方に歪んだ場合を負、大きい方に歪んだ場合を正として符号をつけて表わすものとする。

注6) 式 (27) における $e^{-\frac{(D-1)s}{V_f} l}$ の項は、この式では、 $e^{-\frac{l}{V_f} s}$ と一緒にして表現してあるから、正確に言えば、ここで用いている、 $\bar{f}_i(as)$ は $\bar{f}_i(as) \cdot \frac{(D-1)s}{V_f}$ と書かなければならない。

$$V \quad (D-1)s \quad s \quad v \quad V_v$$

(補 遺 I)

「点 x と $x+dx$ の間の微小区間に、 dt 時間に入ってきた繊維先端数と、出て行った繊維先端数との差は、その時刻にその区間における先端数の増加数に等しい」という連続の式は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & V_b dt n_b(x, t) + V_f dt \{n(x, t) - n_b(x, t)\} \\ & \quad - [V_b dt n_b(x+dx, t) + V_f dt \{n(x+dx, t) - n_b(x+dx, t)\}] \\ & = \{n(x, t+dt) - n(x, t)\} dx \end{aligned}$$

上式の $n_b(x, t)$ と $n(x, t)$ について、次のように書き換え

$$\begin{aligned} n_b(x, t) &= n_b(x) + \Delta n_b(x, t) \\ n(x, t) &= n(x) + \Delta n(x, t) \end{aligned}$$

展開して、高次の項を省略して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta n(x, t)}{\partial x} - (1 - \frac{1}{D}) \frac{\partial \Delta n_b(x, t)}{\partial x} \\ & = \frac{1}{V_f} \frac{\partial \Delta n(x, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。この式より (3) 式が導かれる。

(補 遺 II)

繊維長が、 l と $l+dl$ の間にある低速繊維先端のみに注目して、

時刻 t における点 x の当該繊維先端数—

時刻 $(t+dx/V_b)$ における点 $(x+dx)$ の当該繊維先端数

$$= \left(\text{その区間の入口より出口まで移動することによって減少した全先端数} \right) \times \text{(当該繊維の変速確率)}$$

に相当する式をたてると

$$\begin{aligned} & n_b(x, t) \{F_b(l+dl, x, t) - F_b(l, x, t)\} \\ & \quad - n_b(x+dx, t+\frac{dx}{V_b}) \{F_b(l+dl, x+dx, t+\frac{dx}{V_b}) \\ & \quad - F_b(l, x+dx, t+\frac{dx}{V_b})\} \\ & = \{n_b(x, t) - n_b(x+dx, t+\frac{dx}{V_b})\} [n_b(x, t) \\ & \quad \{F_b(l+dl, x, t) - F_b(l, x, t)\} \times P] \end{aligned}$$

となる。この式を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta F_b(l, x, t)}{\partial x \partial l} + \frac{1}{V_f} \frac{\partial \Delta F_b(l, x, t)}{\partial t \partial l} + \frac{1}{n_b(x)} \frac{dn_b(x)}{dx} \frac{\partial \Delta F_b(l, x, t)}{\partial l} - \frac{1}{n_b(x) - n_0} \{1 - F(x)\} \\ & \frac{dn_b(x)}{dx} \frac{\partial \Delta F_0(l, x, t)}{\partial l} = 0 \end{aligned}$$

が導かれる。この式をラプラス変換することによって (9) 式が得られる。

(補 遺 III)

低速繊維の繊維長分布関数 $F_b(l, x, t) = F_b(l, x)$ が求まると、全繊維 (高速+低速) の繊維長分布関数 $F(l, x, t) = F(l, x) + \Delta F(l, x, t)$ は、連続の式によって求め

られる。すなわち、繊維長が、 l と $l+dl$ の間の繊維だけの連続の式は

$$\begin{aligned} & V_b dt n_b(x, t) \{F_b(l+dl, x) - F_b(l, x)\} \\ & + V_f dt \{n(x, t) - n_b(x, t)\} \{F(l+dl, x, t) \\ & - F(l, x, t)\} - [V_b dt n_b(x+dx, t) \{F_b(l+dl, x \\ & + dl)\} + V_f dt \{n(x+dx, t) - n_b(x+dx, t)\} \\ & \{F(l+dl, x+dx, t) - F(l, x+dx, t)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = [n(x, t+dt) \{F(l+dl, x, t+dt) - F(l, x, t \\ & + dt)\} - n(x, t) \{F(l+dl, x, t) - F(l, x, t)\}] dx \end{aligned}$$

となる。上式中の各時間関数を平衡値とそれからの偏差に置き換えて展開し、 Δ についての高次の項を無視してラプラス変換することによって(12)式が導かれる。

(12)式の真中の式は、平衡状態における偏微分方程式より、恒等的に零であるから、最後の式が得られる。