衝撃引張りにおける粘弾性的挙動

名古屋市工業研究所 中 島 達 夫 (会員)

" 堺 泰 夫

A Study on the Visco-Elastic Behavior of Filament which Undergoes Impulsive Tension at the End.

Tatsuo Nakashima and Yasuo Sakai,
Nagoya Municipal Industrial Research Institute, Nagoya City.

1. 緒 言

衝撃に対する材料の挙動は各種の要因が複合されるうゑに測定が困難なためまだ充分解決されているとはいえない現状であり、特に繊維形成質の衝撃引張りに関する力学的研究は少ないようである。弾塑性体の引張りについては Von Kármán¹⁾ や Rakuhmatulin²⁾ によって解析されているが、そこでは粘性的考慮は払われていない。高分子材料も衝撃挙動としては弾性的な性質が強く表に現われるので、弾塑性の理論でも充分近似適用可能であるが、衝撃現象においてもクリープや応力緩和がみられることは幾多の実験で示されており³⁾、したがって粘弾性的解析が必要となってくる。J. A. Morrison⁴⁾ は Voigt モデルおよび三要素モデルで示される粘弾性棒における衝撃波の伝播について数学的解析をしているがその結果は糸の場合にも参考となる点が多い。

ところで本稿では主に数値解析の立場に立ち、静止中の糸の一端に一定速度を衝撃的に与えた場合に示す糸の挙動、すなわち各部の歪み、張力、移動速度等を調べるのを目的として、Laplace 変換を用いる近似解法を試みるとともに、それらの数値結果を特性曲線法、直接差分近似法による数値解と比較検討してみることにする。

2. 力学モデルと基本方程式

静止している糸の一端を瞬間的に引張る場合糸の示す挙動を調べる。糸は無拘束で直線状のまま静止しているものとする。その先端を原点 $x=0$ とし、長さ方向に x の正軸をとる。糸は時刻 $t<0$ で静止を保ち、 $t\geq 0$ においてその先端が x の負方向に定速 V で引張られるものとする。したがって $t=0$ において糸の先端は瞬間的に

ステップ状に速度 V を得ることになる。糸の長さは一応無限長とする。

糸を粘弾性体とみなし、その力学モデルとして図1の

図1 力学モデル

3要素モデルを想定する。

E_1 , E_2 を弾性要素の弾性係数, η を粘性要素の粘性係数とする。糸の x 点における時刻 t の張力を $T(x, t)$, 変位を $u(x, t)$, 歪みを $\epsilon(x, t)$ であらわす Lagrange 座標を用いる。

このモデルの満足すべき微分方程式は次式で与えられる。

$$(E_1 + E_2) T + \eta \partial T / \partial t = \eta E_1 \partial \epsilon / \partial t + E_1 E_2 \epsilon \dots \dots (1)$$

さらに次のニュートンの第2法則をも満足しなくてはならない。

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = \partial T / \partial x \dots \dots \dots (2)$$

ここで ρ は糸の無張力時の線密度とする。

なお歪と変位の間には次の関係が成立つ。

$$\epsilon = \partial u / \partial x \dots \dots \dots (3)$$

そこでこの3式を合わせて次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho \eta \partial^3 u / \partial t^3 + \rho (E_1 + E_2) \partial^2 u / \partial t^2 \\ - \eta E_1 \partial^3 u / \partial t \partial x^2 - E_1 E_2 \partial^2 u / \partial x^2 = 0 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

初期条件および境界条件は

$$u(x, +0) = 0, \quad (\partial/\partial t) u(x, +0) = 0,$$

$$(\partial^2/\partial t^2) u(x, +0) = 0 \quad (x > 0)$$

$$u(+0, t) = -Vt, \quad u(\infty, t) = 0 \quad (t > 0)$$

次に上の微分方程式を無次元化するため

$$E_1/E_2 = \alpha, \quad \eta/E_2 = \tau_0, \quad \sqrt{E_1/\rho} = c$$

$$x/(c\tau_0) = \xi, \quad t/\tau_0 = \tau, \quad V/c = \varphi$$

$$u(x, t)/(c\tau_0) = U(\xi, \tau) \dots\dots\dots (5)$$

とおけば(4)式は

$$\partial^3 U/\partial \tau^3 + (1+\alpha)\partial^2 U/\partial \tau^2 - \partial^3 U/(\partial \tau \partial \xi^2) - \partial^2 U/\partial \xi^2 = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$U(\xi, +0) = 0, \quad U_\tau(\xi, +0) = 0$$

$$U_{\tau\tau}(\xi, +0) = 0 \quad (\xi > 0)$$

$$U(+0, \tau) = -\varphi\tau, \quad U(\infty, \tau) = 0 \quad (\tau > 0)$$

ここで $U_\tau = \partial U/\partial \tau$, $U_{\tau\tau} = \partial^2 U/\partial \tau^2$ を示す。

この微分方程式を解けば糸の挙動が知られる。以下その解法を2, 3試みる。

3. 基本方程式の解法

微分方程式(6)を τ について L_+ 変換し、そのラプラス変数を s とすると。

$$(s+1)\tilde{U}_{\xi\xi}(\xi, s) - s^2(s+1+\alpha)\tilde{U}(\xi, s) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ただし } \tilde{U}(\xi, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} U(\xi, \tau) d\tau$$

$$\xi \rightarrow \infty \text{ において } U(\xi, \tau) = 0 \text{ であるから}$$

$$\tilde{U}(\infty, s) = 0, \quad \text{また } \tilde{U}(+0, s) = L_+[-\varphi\tau] = -\varphi/s^2.$$

したがって(7)式から次の解が得られる。

$$\tilde{U}(\xi, s) = -\varphi/s^2 \exp[-s\sqrt{(s+1+\alpha)/(s+1)}\xi] \dots\dots\dots (8)$$

各部の変位 $U(\xi, \tau)$ は上式を s について逆変換すれば得られる。

3.1 引張端部の歪みと張力

上記の結果より、まず引張端部における歪みと張力の状態を調べてみよう。先端部の歪み $\epsilon(0, \tau)$ は(8)式より次のように得られる。すなわち(8)式より。

$$\tilde{U}_\xi(0, s) = \varphi/s \cdot \sqrt{(s+1+\alpha)/(s+1)} \dots\dots\dots (9)$$

これを逆変換すると先端部の歪み $\epsilon(0, \tau)$ すなわち $U_\xi(0, \tau)$ が次のように得られる。

$$U_\xi(0, \tau) = \varphi[\exp(-(1+\alpha/2)\tau)I_0(\alpha\tau/2) + (1+\alpha) \int_0^\tau \exp(-(1+\alpha/2)y)I_0(\alpha y/2)dy] \dots\dots\dots (10)$$

ここで I_0 は第1種第0次変形ベッセル関数で次式で示されるものである。

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^\infty (z/2)^{2n}/(n!)^2 \dots\dots\dots (12)$$

また引張端部の張力 $T(0, \tau)$ は次のようにして求められる。

(1)式を(5)式を用いて無次元化すると

$$(1+\alpha)T/E_1 + 1/E_1 \cdot \partial T/\partial \tau = \partial \epsilon/\partial \tau + \epsilon \dots\dots\dots (13)$$

したがって

$$L\{T\}/E_1 = \frac{s+1}{s+1+\alpha} L\{\epsilon\} \dots\dots\dots (14)$$

故に

$$T(0, \tau)/(\varphi E_1) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\sqrt{\frac{s+1}{s+1+\alpha}}\right] \dots\dots\dots (15)$$

$$= \exp(-(1+\alpha/2)\tau)I_0(\alpha\tau/2) + \int_0^\tau \exp(-(1+\alpha/2)y)I_0(\alpha y/2)dy \dots\dots\dots (16)$$

以上の結果より先端部の歪みおよび張力の初期値と漸近値をまず求めてみよう。漸近法則を用い、(9), (14)式より

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \epsilon(0, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} U_\xi(0, \tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{U}_\xi(0, s) = \varphi$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \epsilon(0, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U_\xi(0, \tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{U}_\xi(0, s) =$$

$$\varphi/\sqrt{1+\alpha}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} T(0, \tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} s L\{T(0, \tau)\} = \varphi E_1$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} T(0, \tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s L\{T(0, \tau)\} = \varphi E_1/\sqrt{1+\alpha} \dots\dots\dots (17)$$

すなわち先端部の歪みは初期値が φ で時刻の経過とともに漸増し $\varphi/\sqrt{1+\alpha}$ に漸近する。一方張力は初期値 φE_1 で次第に漸減し $\varphi E_1/\sqrt{1+\alpha}$ に漸近する。

また任意の時刻における先端部の歪みと張力は(10), (16)式から知られるが、いま $\alpha\tau$ があまり大きくない範囲を対象とすることとして近似解を求めてみよう。関数 I_0 の第2項までをとり(10), (16)式を解くと

$$\epsilon(0, \tau) = \frac{\varphi}{8(1+\alpha/2)^3} \left[(1+\alpha)(8+8\alpha+3\alpha^2) - \exp(-(1+\alpha/2)\tau) \{ \alpha(4+5\alpha+2\alpha^2) + \alpha^2(1+\alpha)(1+\alpha/2)\tau + \frac{1}{4}\alpha^3(1+\alpha/2)^2\tau^2 \} \right] \dots\dots\dots (18)$$

$$T(0, \tau) = \varphi E_1 \left\{ \frac{8+8\alpha+3\alpha^2}{8(1+\alpha/2)^3} + \left\{ \frac{(4+3\alpha+\alpha^2)\alpha}{8(1+\alpha/2)^3} - \frac{\alpha^2}{8(1+\alpha/2)^2}\tau + \frac{\alpha^3}{32(1+\alpha/2)}\tau^2 \right\} \exp(-(1+\alpha/2)\tau) \right\} \dots\dots\dots (19)$$

3.2 各部の変位 $U(\xi, \tau)$

つぎに各部分の変位 $U(\xi, \tau)$ を調べる。この変位の像関数は(8)式で示されるので、これを逆変換すればよい。この逆変換は相当面倒であるがJ.A. Morrisonによって巧みに導かれている。しかしその結果はあまり簡明な形ではないので、ここでは近似解を求めてみる。(8)式より

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\xi, s) &= -\frac{\varphi}{s^2} \exp\left[-s\sqrt{\frac{s+1+\alpha}{s+1}}\xi\right] \\ &= -\frac{\varphi}{s^2} \exp\left[-\sqrt{s^2+\alpha s-\alpha}\alpha/(s+1)\xi\right] \\ &= -\frac{\varphi}{s^2} \exp\left[-\sqrt{s^2+\alpha s-\alpha}\xi\right] + \beta \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$\alpha\tau$ があまり大きくない範囲では β の値は小さいものと考えられる。上式の右辺の第1項の逆変換は次のように容易に得られる。

$$\begin{aligned} & L^{-1}[\exp(-\sqrt{s^2+\alpha s-\alpha}\xi)] \\ &= \exp(-\alpha\xi/2) L^{-1}[\exp(-\xi s)] \\ &+ \sqrt{\alpha+\alpha^2/4}\xi \exp(-\alpha\tau/2) I_1(\sqrt{\alpha+\alpha^2/4} \\ &\quad \sqrt{\tau^2-\xi^2}) / \sqrt{\tau^2-\xi^2} \end{aligned}$$

したがって合成積分より

$$\begin{aligned} U(\xi,\tau)/(-\varphi) &= (\tau-\xi) \exp(-\alpha\xi/2) \\ &+ \sqrt{\alpha+\alpha^2/4}\xi \int_{\xi}^{\tau} (\tau-\xi) \exp(-\alpha\tau/2) I_1 \\ &\quad \{\sqrt{\alpha+\alpha^2/4}\sqrt{\tau^2-\xi^2}\} / \sqrt{\tau^2-\xi^2} d\tau \dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで I_1 は第1種第1次変形ベッセル関数で、

$$I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^{2n+1} / \{n!(n+1)!\}$$

で示されるものである。いまその第2項までをとって (21)式を計算すると

$$\begin{aligned} U(\xi,\tau)/(-\varphi) &= [\tau-\xi+(1+\alpha/4)\xi] \{ \frac{12+7\alpha}{2\alpha^2} \\ &+ \frac{2(1+\alpha/4)}{\alpha}\xi \} \exp(-\alpha\xi/2) - (1+\alpha/4)\xi \\ &\{ \frac{12+7\alpha}{2\alpha^2} + \frac{12+7\alpha}{4\alpha}\tau + \frac{3}{4}(1+\alpha/4)\tau^2 + \frac{\alpha}{8}(1+\alpha/4)\tau^3 \\ &- (\frac{4+5\alpha}{4\alpha} + \frac{1+\alpha/4}{2}\tau + \frac{\alpha(1+\alpha/4)}{8}\tau^2)\xi \\ &- \frac{1+\alpha/4}{8}(2+\alpha\tau)\xi^2 + \frac{\alpha(1+\alpha/4)}{8}\xi^3 \} \exp(-\alpha\tau/2) \end{aligned} \dots\dots (22)$$

上式により各部の変位を近似的に計算することができる。また各部の歪みは変位の微分より次のように得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi,\tau)/\varphi &= [1 - \frac{(1+\alpha/4)(6+7\alpha/2)}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{2}\tau \\ &- \frac{2-\alpha+5\alpha^2/8}{2\alpha}\xi + (1+\alpha/4)\xi^2] \exp(-\alpha\xi/2) \\ &+ (1+\alpha/4) \{ \frac{12+7\alpha}{2\alpha^2} + \frac{12+7\alpha}{4\alpha}\tau + \frac{3(1+\alpha/4)}{4}\tau^2 \\ &+ \frac{\alpha(1+\alpha/4)}{8}\tau^3 - \{ \frac{4+5\alpha}{2\alpha} + (1+\alpha/4)\tau \\ &+ \frac{\alpha(1+\alpha/4)}{4}\tau^2 \} \xi - \frac{3(1+\alpha/4)(2+\alpha\tau)}{8}\xi^2 \\ &+ \frac{\alpha(1+\alpha/4)}{2}\xi^3 \} \exp(-\alpha\tau/2) \dots\dots (23) \end{aligned}$$

4. 数値計算例

衝撃引張りを受ける糸の挙動に関する近似解法を導びいたが、以下ではそれらの数値計算例の結果を若干示す。計算はコンピュータ FACOM230-60によった。ただし(18), (19), 両式の計算は筆算による。

比較に用いた特性曲線法と直接差分近似法の概要は次の通りである。

(i) 特性曲線法

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/(V/c)$, $\bar{T} = (T/E)/(V/c)$, $\bar{v} = v/V$ と無次元化し, ($v = \partial u/\partial t$, 分子の移動速度) (1), (2), (3) の連立微分方程式を用い, 次の6個の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ d\tau & d\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\tau & d\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\tau & d\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \bar{T}/\partial \tau \\ \partial \bar{T}/\partial \xi \\ \partial \bar{\varepsilon}/\partial \tau \\ \partial \bar{\varepsilon}/\partial \xi \\ \partial \bar{v}/\partial \tau \\ \partial \bar{v}/\partial \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{T} - \bar{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \\ d\bar{T} \\ d\bar{\varepsilon} \\ d\bar{v} \end{pmatrix} \dots\dots (24)$$

但し $a=1+\alpha$

これより特性曲線 (3本の直線) と, その線上で満足される微分関係式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{特性曲線} \quad & \text{微分関係式} \\ d\xi/d\tau &= 1 \quad d\bar{v} - d\bar{T} = (a\bar{T} - \bar{\varepsilon}) d\xi \\ d\tau/d\xi &= -1 \quad d\bar{v} + d\bar{T} = (a\bar{T} - \bar{\varepsilon}) d\xi \\ d\xi &= 0 \quad d\bar{\varepsilon} - d\bar{T} = (a\bar{T} - \bar{\varepsilon}) d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

τ, ξ のきざみを等しく h にとり, $\tau=0, \tau=-h$ において $\bar{V}=\bar{T}=\bar{\varepsilon}=0$ ($\xi>0$) を出発点として, 順次 τ の正方向に逐次節点の値を計算してゆけばよい。試料が自由端をもつ有限長の場合にはその自由端で $\bar{T}=0$ となることを考慮する。

(ii) 直接差分法

ξ, τ 方向のきざみを等しく h にとり $U_{i,j} = U(\xi=jh, \tau=jh)$ として基本方程式 (6) より

$$\begin{aligned} & (U_{i,j+1} - 3U_{i,j} + 3U_{i,j-1} - U_{i,j-2}) + (1+\alpha)(U_{i,j+1} \\ & - 2U_{i,j} + U_{i,j-1})h - [(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) - \\ & (U_{i+1,j-1} - 2U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1})] - (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} \\ & + U_{i-1,j})h = 0 \end{aligned}$$

これは次のような配置様式で示される。

$$\begin{pmatrix} -1 + (1+\alpha)h \\ 1+h & 1+2\alpha h & 1+h \\ -1 & -1 - (1+\alpha)h & -1 \end{pmatrix} U_{i,j} = 0 \dots\dots (26)$$

初期条件, 境界条件は

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= 0 \quad (j \leq 0), \quad U_{i,j} = 0 \quad (i \geq j) \\ U_{0,j} &= -jh\varphi \end{aligned}$$

これらの条件を用いて前進的に逐次 $U_{i,j}$ が求められる。試料が自由端をもつ有限長の場合には仮想点 $\xi = (2n+1)h$ を考え, $U_{2n-1,j} = U_{2n-1,j}$ として取扱えばよい。

4.1 引端張部の歪と張力

ラプラス変換法によって得られた解 (10) 式および (16) 式を用いた計算結果を図2に図示する。歪み, 張力の変化は両者相反する傾向を示すがともに指数関数的な変化である。なお同法の近似解(18)式および(19)式による計算結果, さらに特性曲線法による計算結果との比較を表1に示す。ここで特性曲線法 (3) ではきざみ数は単位長を40等分して計算した。表2に見られように

各法の結果はいずれも $\alpha\tau$ のあまり大きくない範囲ではよく近似している。

なお表の $\tau = 2.0$ の 3) の値が異状を示しているが、これは有限長 ($\xi = 1$) の場合について計算したので反射波の影響を受けているためである。

4.2 各部の歪み，張力，変位および移動速度

試料が有限長 ($\xi = 1$) で，自由端で反射の生ずる場合の各部の挙動について特性曲線法により得られた計算例を図 3 に示す。 $\alpha = 1$ の場合を示した。図中に参考のために $\alpha = 0$ の場合をも示してあるものがあるが、これは完全弾性体の場合に相当する。なお比較のため、表 2 に他の方法による計算結果を併記して変位の結果を数値で示した。いずれも $\alpha\tau$ があまり大きくない範囲ではよく似た値が得られている。

図 2 引張端部の歪み，張力

表 1 各法による計算結果の比較

- 1) ラプラス変換法 (10)式, (16)式
- 2) 同近似解 (18)式, (19)式
- 3) 特性曲線法

a) 引張端部における歪み $\bar{\epsilon}(10, \tau) / \varphi$

$\alpha = 1$						
τ	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
1)	1.000	1.158	1.254	1.314	1.351	1.369
2)	1.000	1.158	1.254	1.313	1.350	1.372
3)	1.000	1.158	1.254	1.314	1.351	—

$\alpha = 2$						
τ	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
1)	1.000	1.302	1.474	1.575	1.635	1.671
2)	1.000	1.302	1.472	1.569	1.622	1.652
3)	1.000	1.302	1.474	1.574	1.634	—

(b) 引張端部の張力 $\bar{T}(0, \tau) / (\varphi E_1)$

$\alpha = 1$						
τ	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
1)	1.000	0.856	0.784	0.747	0.728	0.718
2)	1.000	0.856	0.784	0.747	0.727	0.717
3)	1.000	0.856	0.784	0.747	0.728	—

τ	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
1)	1.000	0.746	0.648	0.609	0.592	0.585
2)	1.000	0.746	0.647	0.605	0.583	0.575
3)	1.000	0.746	0.648	0.609	0.592	—

図3 (a) 歪み ($\alpha=1$)

図3 (c) 変位

図3 (b) 張力

図3 (d) 移動速度 ($\alpha=1$)

図3 各部の挙動 (試長1)

表2 変位 $U(\xi, \tau) / (-\varphi)$ の各法による計算結果の比較

- 1) ラプラス変換法による近似解 (22) 式
- 2) 特性曲線法
- 3) 直接差分法

 $\tau = 1, \quad \alpha = 1$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1)	1.000	0.754	0.524	0.317	0.141	0.0
2)	1.000	0.751	0.521	0.316	0.140	0.0
3)	1.000	0.751	0.521	0.315	0.138	0.0

$\tau = 1, \quad \alpha = 2$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1)	1.000	0.710	0.460	0.254	0.100	0.0
2)	1.000	0.710	0.459	0.254	0.100	0.0
3)	1.000	0.710	0.458	0.252	0.097	0.0

5. 結 言

衝撃引張りを受ける糸の粘弾性的挙動に対する数値解析的解法を試みた。ラプラス変換による近似方法は特性曲線を用いる差分近似法，および前進的な直接差分近似法と実用的な範囲内ではよい近似を示した。なお本報は1973年日本繊維機械学会年次大会において発表したものをまとめたものである。

参考文献

1) T.von Kàrmàn, P.Duwez ; J.Appl. Phys., 21 (1950)

2) H. Kolsky ; Stress Wave in Solid (1953)

3) J. H. Smith C. A. Fenstermaker, R. J. Shouse ; Text. Res. J., 33(1963)

4) J. A. Morrison ; Quart. Appl. Math., 14 No.2

(昭和49年 5 月 2 日 受理)