弾性と繊維間摩擦をもつ糸の大たわみ変形の 理論的解析

京 都 大 学 工 学 部 川 端 季 雄 (会 員)

奈 良 女 子 大 学 家 政 学 部 丹 羽 雅 子 (")

Theoretical Analysis of the Large Deflection of the Elastic Yarn with Inter-Fiber Friction.

Sueo Kawabata* and Masako Niwa**

*Department of Polymer Chemistry, Kyoto University, Kyoto.

**Department of Clothing Science, Nara Women's University, Nara.

Abstract

In this paper, the large deflection of a thin elastic rod having internal friction is analysed.

The analyses have been made for the two processes, the one is the increasing bending process and another is the recovering process where the forces are applied at the two free-ends of the rod.

The obtained results shows following properties. At the increasing process, the effect of the internal friction on the force-deflection property is small except in the very small deflection region, in which there is small rising of the force caused by internal friction.

At the recovering process, the internal friction causes remarkable hysteresis phenomena, and it was found that the hysteresis behavior depends on a parameter α where,

$$\alpha = \frac{2H_B}{B} l_0$$

B ; Slope of the bending property (torque-curvature property) of the rod. $2H_B$; hysteresis-width in the bending property. l_0 ; length of the rod.

An experiment was carried out for the purpose to examine the calculated results using a ring shape specimen of spun yarn, and it was confirmed that the prediction by the theoretical calculation has good accuracy for both increasing and recovering processes of actual spun yarn.

(Received August 26, 1975)

摘 要

目 的 繊維間摩擦をもつ糸に大たわみ変形を与えたときの力と変形の関係を、変形過程および変形からの戻り過程の挙動について理論的に誘導する。

成 果 (1) 通常の糸がもつ程度の繊維間摩擦は、力の増加過程については力と変形との関係にその影響はほとんど現れない。しかし、初期特性に差がみられ、繊維間摩擦の増大により立ち上り現象の生じることが導かれた。

(2) 戻り過程のたわみ形状および力と変形の関係には繊維間摩擦の影響が大きく、また糸の長さが異なると繊維間摩擦の影響が異なり、 α 値 $\left(= \frac{2H_B}{B} l_0 \right)$ で支配されることがわかった。ここで B は糸の曲げ剛性、 $2H_B$ は糸の曲げヒステリシス幅、 l_0 は糸の長さである。

(3) 理論の妥当性がリング状の糸の変形試験によって確かめられ、実験値と理論計算値との一致が認められた。
(昭和50年8月26日受理)

1. 緒 言

糸を弾性体としたときの各種の大たわみ変形挙動、たとえば図2のような変形挙動は、すでに Skelton¹⁾ や川端²⁾ によって導かれている。しかし、実際の糸は純弾性体でなく、たとえば曲げ特性は、図1のような曲率—モーメント関係を示し、(1)式に示すような繊維間摩擦に基づくヒステリシスを示す。

$$M = BK \pm H_B \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 M ；曲げモーメント、 B ；曲げ剛性、 H_B ；曲げヒステリシス幅、 K ；曲率。

図1 糸の曲げ変形特性

このため、たわみ増加過程とたわみ減少過程とは異なる形態をとるという性質が生まれる。この性質をもつ糸の大たわみの力と変形の関係を理論的に把握することは、特に曲げ挙動が初期特性を決める編布などの変形解析に重要であるがまだ解かれていない。

本研究では、このような大たわみ変形および変形からの戻り過程を理論的に誘導し、実験データと比較する。また、弾性体としたときのたわみ形状と繊維間摩擦を導入したときの相違についても明らかにする。

2. 理 論

編布の解析に実際に応用できるという実用的見地から、図2のように曲率 K_0 の両端固定の糸に力 F をその両端に加えて左右に引伸ばす場合について解く。

解き方の方法はこのほかのいろいろな境界条件をもつ変形過程に対しても共通に適用できる。

図2の曲率 K_0 の円弧状の糸の端（接線角 θ_{0n} ）を固定し、力 F で引張ると、図3のように曲がる。このとき糸には3つの部分、

- 〔I〕 曲率が減少する部分（図3での O から P_1 ）
- 〔II〕 曲率が増加する部分（ Q から P_2 ）
- 〔III〕 モーメント M が H_B 以下の部分で、初期曲率 K_0 を保つ部分（ P_1 から P_2 ）

図2 変形前の曲がり形状と変形後の曲がり形状

がある。このとき糸軸上のモーメントは部分〔III〕の内部に零モーメントの点があり図3のような状態となる。

図3 糸の曲げ変形過程の形状とモーメントの分布

図4 糸の曲げ変形過程の形状

図4に示すようにそれぞれの部分の糸の長さを l_1, l_2, l_3 とし、 y 方向について y_1, y_2, y_3 、 x 方向を x_1, x_2, x_3 とする。伸長比 λ は

$$\lambda = \frac{d}{d_0} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{d_0} \dots\dots\dots (2)$$

糸自身は伸びないとして、円弧が伸びきったときの伸長比を λ_c とする。

$$\lambda_c = \frac{\theta_{0n}}{\sin \theta_{0n}} = \frac{l_0}{d_0} \dots\dots\dots (3)$$

曲率 K_0 は、

$$K_0 = \frac{\theta_{0n}}{l_0} \dots\dots\dots (4)$$

図5 部分〔I〕および部分〔II〕の座標系

もとの円弧曲率 K_0 を保つ部分〔III〕の両端 P_1 , P_2 点には H_B のモーメントが作用しているが、このモーメントは糸の曲げヒステリシスのため〔I〕,〔II〕の部分の曲げ変形を増減することには働いていないモーメントである。そこで、たわみの単調増加過程にかぎって考えるとき部分〔I〕および〔II〕については図5のように P_1 , P_2 点にそれぞれ原点をとり、そして各部分の糸上のモーメントから H_B を減じると一端固定、他端自由の弾性挙動をとる糸として扱える。各部分について、それぞれ F と d_1 の関係や F と d_2 の関係の解をはじめとし、変形時の形状等の解が得られる²⁾。たわみの増加過程から減少過程への移り変り時および戻り過程の扱いは2.3で述べる。

2.1 一般式

糸の曲げ剛性を B とし、部分〔I〕では

$$B \left(-\frac{d\theta}{ds} + K_0 \right) - F y = 0 \dots\dots\dots (5)$$

部分〔II〕では

$$B \left(-\frac{d\theta}{ds} - K_0 \right) - F y = 0 \dots\dots\dots (6)$$

の基礎式に境界条件を入れて解くと解が得られる。

ここで、 s は原点から曲線にそった長さ、 θ_{01} , θ_{02} は自由端における θ の値である。

いま

$$a = \frac{F}{B} \dots\dots\dots (7)$$

とおき、境界条件は、部分〔I〕について $s=0$ で $\theta=\theta_{01}$ 、部分〔II〕については $\theta=\theta_{02}$ となる。また、いずれも $y=0$ 。

(5)式から部分〔I〕については、すでに報告²⁾ したよ

うに次式が誘導される。

$$\frac{d\theta}{ds} = -2\sqrt{-\frac{1}{K_1} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \dots\dots\dots (8)$$

また、(6)式から部分〔II〕について

$$\frac{d\theta}{ds} = 2\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{K_2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \dots\dots\dots (9)$$

ただし

$$K_1 = \frac{K_0^2}{4a} - \sin^2 \frac{\theta_{01}}{2} \dots\dots\dots (10)$$

$$K_2 = \frac{K_0^2}{4a} - \sin^2 \frac{\theta_{02}}{2} \dots\dots\dots (11)$$

一方、

$$dx = ds \cos \theta \dots\dots\dots (12)$$

$$dy = ds \sin \theta \dots\dots\dots (13)$$

である。

部分〔I〕の形状および寸法は、(8), (12), (13)式より、

$$l_1 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{\theta_{01}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{1}{K_1} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \dots\dots\dots (14)$$

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{\theta_{01}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\frac{1}{K_1} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \dots\dots (15)$$

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{\theta_{01}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\frac{1}{K_1} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \dots\dots (16)$$

同様に、部分〔II〕は、(9), (12), (13)式より

$$l_2 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{\theta_{02}}^{\theta_{0n}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{1}{K_2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \dots\dots\dots (17)$$

$$x_2 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{\theta_{02}}^{\theta_{0n}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\frac{1}{K_2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \dots\dots (18)$$

$$y_2 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{\theta_{02}}^{\theta_{0n}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\frac{1}{K_2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \dots\dots (19)$$

部分〔III〕については、モーメントが H_B 以下で初期曲率を保つ条件

$$y_3 = \frac{2H_B}{F} = \frac{2H_B}{aB} \dots\dots\dots (20)$$

と、部分〔I〕,〔II〕が P_1 , P_2 点で折点をつくらずなめらかに連続するという条件

$$y_3 = \frac{\cos \theta_{01} - \cos \theta_{02}}{K_0} \dots\dots\dots (21)$$

から θ_{02} は θ_{01} から求まる。

$$\cos \theta_{02} = \cos \theta_{01} - \frac{2H_B}{F} K_0 \dots\dots\dots (22)$$

また、

$$l_3 = \frac{\theta_{02} - \theta_{01}}{K_0} \dots\dots\dots (23)$$

$$x_3 = \frac{\sin \theta_{02} - \sin \theta_{01}}{K_0} \dots\dots\dots (24)$$

2.2 曲げ変形過程の計算

F を任意に与えたときの曲がり形状は, θ_{01} をパラメータにして部分〔I〕, 〔II〕, 〔III〕についてそれぞれの長さ l_1, l_2, l_3 を求め,

$$l_1 + l_2 + l_3 = l_0 \quad (25)$$

を満足する θ_{01} を求める. これで P_1, P_2 点が確定する.

ただし, 計算では l_0 の値に関せず解を一般化するため次の規格化値を用いる. すなわち,

$$c_1 = l_1/l_0, c_2 = l_2/l_0, c_3 = l_3/l_0 \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{2H_B}{B} l_0 \quad (27)$$

$$Z = (l_0 2\sqrt{a})^2 = 4 \frac{F}{B} l_0^2 \quad (28)$$

実際の計算にはこの規格化値を用い, Z を任意に与え

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad (29)$$

の条件を満たす θ_{01}, θ_{02} を求める.

以上から, λ は (2) 式, すなわち $\lambda = \sum_{i=1}^3 x_i/d_0$ で求まり, λ 対 F すなわち Z の関係が求まる. また同時に曲げ過程における糸の曲がり形状が得られる.

図6 曲げ過程における Z と λ との関係

図7 曲げ過程における Z と c_i との関係, 弾性体とした $\alpha = 0$ の場合と繊維間摩擦をもつ場合の計算例 (一点鎖線は弾性体で微小変形を仮定したときの計算例で大曲げ変形の場合と比較して示した.)

図6は円弧が伸びきったときの伸長比 λ_c を1.1~1.57に変化させ, λ_c をパラメータとした Z と λ との関係の計算例を示している. $\alpha = 0$, すなわち弾性体としたときの挙動に比べて内部摩擦を導入すると曲げの初期特性に立ち上りがみられる. F が大きくなると Z と λ との間に大差はみられない. しかし, 曲がり形状は次のように大きく異なる.

図7は固定端角 $\theta_{0n} = 90^\circ$ のときの計算例で Z と (25) 式の $c_i (i=1,3)$ との関係を示している. $\alpha = 0$, すなわち弾性体の場合には初期曲率を保って曲がらない部分〔III〕はなく, $c_3 = 0$ で c_1 と c_2 は規格化した力, すなわち Z とともに図のように変化する. いま弾性体で微小変形を仮定すると $M=0$ の位置は変わらず c_1 と c_2 は力に関せず一定で図7に一点鎖線で示しているように $c_1 = 0.561$ となる. 繊維間摩擦をもつ糸の場合は, 図中に $\alpha = 0.5$ のときを示しているが, c_1, c_2, c_3 は力とともに変化したがつてその曲がり形状も異なってくる.

図8 曲げ過程における Z と c_i との関係, α が異なる場合の計算例

図8は $\alpha = 0.3$ と 0.7 のときの図7と同様の Z と c_i の関係の計算例で, 内部摩擦成分が大きくなると図のように曲がらない部分 c_3 の割合の増加が認められる.

2.3 たわみ減少過程

まず, $F=0$ に戻したときの形状を解く. 戻りついたとき, すなわち $M=0$ における円弧の曲率を部分〔I〕について K_{m1} , 部分〔II〕について K_{m2} すると,

$$0 = B(K_0 - K_{m2}) + H_B \text{ より } K_{m2} \text{ は,}$$

$$K_{m2} = K_0 + \frac{H_B}{B} \quad (30)$$

K_{m1} は,

$$K_{m1} = K_0 - \frac{H_B}{B} \quad (31)$$

いま, 図10の F の増加過程から $F=F_m$ のとき, 回復過程に移る直前 (ピーク状態とする) では, 曲率は糸軸上に分布する. このとき, 曲率 K_{m2} と K_{m1} をとる点を P_{m2}, P_{m1} とする. いま, 部分〔II〕について考えると,

(i) $K > K_{m2}$ の部分は $F=0$ のとき曲率 K_{m2} まで回復 (P_{m2} から Q).

図9 糸の曲げ変形過程

図11 $F=0$ に戻った形状 図10 曲げ過程における $F=F_m$ のときの曲がり形状と P_{m1} , P_{m2} 点の位置

(ii) $K > K_{m2}$ の部分は $F=0$ のときピーク状態のままの形状を残す (P_2 から P_{m2})

この曲率 K_{m2} をとる点 P_{m2} の接線角 θ_{m2} は (32) 式で求まる。ただし (32) 式は糸上の任意の点での曲げモーメントの釣合い条件から、基礎式 (6) より導かれる²⁾。

$$\cos \theta_{m2} = \frac{K_0^2 + 2 \frac{F_m}{B} \cos \theta_{02} - K_{m2}^2}{2 \frac{F_m}{B}} \quad (32)$$

部分 [I] についても同様に $F=0$ の形状を決定できる。曲率 K_{m1} をとる点 P_{m1} の接線角 θ_{m1} についても同様に²⁾

$$\cos \theta_{m1} = \frac{K_0^2 + 2 \frac{F_m}{B} \cos \theta_{01} - K_{m1}^2}{2 \frac{F_m}{B}} \quad (33)$$

部分 [III] についてはピーク状態を保つ。

以上より、 $F=0$ に戻したときの形態は図11に示すように、曲率 K_{m2} , K_{m1} の円弧に回復する部分と、 $F=F_m$ のときの形状を保つ部分を折点をつくらず各部分を連続の条件でつないで得られる。またこれより残留伸長比が得られ、図で点線が変形前の円弧を示している。

F_m から F を減じていくとき曲がり形態の回復しはじめるのは、力 F_{R1} , F_{R2} のうち大きい F_R 値である。

$$F_{R1} = F_m - \frac{2HB}{y_1} \quad (34)$$

$$F_{R2} = F_m - \frac{2HB}{y_2} \quad (35)$$

$F_m > F > 0$ のときの回復形状は、モーメント M' を $M_{max} - 2HB > M' > 0$ の範囲で任意にとり、(図12参照) 部分 [II] について M' に対応する曲率 K_{R2} を得る。

$$K_{R2} = K_0 + \frac{M' + HB}{B} \quad (36)$$

ただし

$$M_{max} - 2HB > M' > 0 \quad (37)$$

$$M_{max} = F_m y_2 - HB \quad (38)$$

図12 糸の曲げ変形特性

以下、前述の $F=0$ に戻したときと同様の操作で、図13の $F=F_m$ における曲がり形状で曲率 K_{R2} に対応する P_{R2} 点の接線角 θ_{R2} を求め、 P_{R2} 点を逆算して求め、まず部分 [II] の形状を求める。 θ_{R2} は (32) 式と同様の過程²⁾ で、次式で得られる。

図13 曲げ過程における $F=F_m$ のときの曲がり形状と P_{R2} 点の位置

$$\cos \theta_{R2} = \frac{K_0^2 + 2 \frac{F_m}{B} - K_{R2}^2}{2 \frac{F_m}{B}} \quad (39)$$

図14 F_m から任意の F に戻したときの曲がり形状

図14でQ点から P_{R2} 点までは曲率 K_{R2} の円弧にもどり、このときの P_{R2} 点の y_2' 値を求めると P_{R2} 点に作用するモーメント M' から力 F_2 が求まる。すなわち

$$F_2 = \frac{M' - H_B}{y_2'} \quad (40)$$

部分〔I〕の形状は、引張力 F は部分〔II〕と釣合うので F_2 に等しい。

$$F = F_2 = F_1 \quad (41)$$

したがって F_2 を与える形態を前述の方法で逆算することによって部分〔I〕の形状が決定でき、部分〔III〕についてはもとの形態を保つことは同様であり、以上の〔I〕〔II〕〔III〕の各部分を連続の条件でつなぐことにより曲げ戻り過程の任意の F に対する λ および形状が決まる。

3. 実測値と理論計算値との比較

以上の理論の妥当性を確かめるため、川端によって試作された10 mgフル スケールの精度をもつ超精密級の引張試験機を用いて糸の円環での引張り試験を行ない、

引張力 F と固定端距離の伸長比 λ との関係を各種の糸について実測した。図15は引張り試験中の写真である。この場合固定端角度 θ_{0n} は 90° である。また、引張速度 15mm/min で、円環の直径 7, 10, 13 mm について測定した。

図15 円環の曲げ変形，超精密級の引張試験機による

図16 円環にした糸の曲げ変形特性

図17 円環にした糸の曲げ変形特性

一方、理論計算に用いる糸の曲げ特性 B , $2H_B$ は KES-F2³⁾ 純曲げ試験機を用いて測定した。この場合の測定精度は有効数字3桁である。これらの糸の曲げ特性および円環の長さ l_0 (=円環周長の1/4) を用いて計算した F と λ との関係を点線で実測曲線を実線で図16, 17に示している。図16は羊毛50%とポリエステル50%の2/66 s の混紡糸で $\alpha=0.7$ に相当する。また図17は羊毛100%の2/60 s の糸で $\alpha=0.48$ に相当する。

たわみ変形過程および変形からの戻り過程のいずれにおいても実測値と理論計算値との間により一致が認められる。

4. 理論の応用

編布は大きく曲げられた糸の からみあいでも布を構成している。この編布の糸の曲げ効果領域での引張り特性およびヒステリシス挙動の計算には本理論が直ちに適用できる。

図18 インターロック編布の二軸均等引張り特性

これまで、編布の初期の引張り過程で、糸を弾性体として理論計算する方法を開発し⁴⁾、用いてきたが、引張り過程ではごく初期の特性を除いて図18の例にみられるように糸を弾性体として扱っても大きい誤差をもたらさなかった。このことは前述してきた本理論の曲げ変形過程の計算例からも裏付けられる。また、図18の例にみられる編布の引張りのごく初期で、糸の円環の引張り(図16, 17)と同様の立ち上り挙動を示すことが従来から実験で確認されていたが、本理論を用いてこの部分の理論計算も可能となった。

さらに、編布の実用性能として重要な引張りにおける特有の大きなヒステリシス特性の理論計算は糸を弾性体としてできなかったが、本理論を応用して、糸の性質と編布構造とから編布の引張りのヒステリシス特性の理論的誘導を可能とした。

この他カーペットの圧縮特性、その他各方面へも応用できるであろう。

5. 結 語

弾性体の大たわみ変形挙動と繊維間摩擦をもつときとで、力 F の増加過程での力と変形すなわち F と λ との関係はほとんど変わらない。しかし、初期特性に差がみられ、ヒステリシスの増大により立ち上り現象が生じることが導かれた。

戻り過程の形状および力と変形の関係は、繊維間摩擦が大きく影響することがわかった。

また、円弧の長さが異なると繊維間摩擦の影響が異なり、 α 値 ($= \frac{2H_B}{B} l_0$) で支配されることがわかった。

以上、弾性と繊維間摩擦をもつ糸の大たわみ変形過程および変形からの戻り過程の特徴的な挙動を理論的に誘導し、円環にした糸の引張り試験によって理論の妥当性を確かめた。

文 献

- 1) J. Skelton ; J. Text. Inst., **58**, 533 (1967)
- 2) 川端季雄; 繊維誌, **23**, T30 (1970)
- 3) 川端季雄; 繊維誌, **26**, p.721 (1973)
- 4) 川端, 丹羽, 七島, 河合; 繊維誌, **23**, T95, T120 T223 (1970)