布の洗浄に関する研究

(第2報) 拡散理論に基づく繊維集合体中の物質移動に関する解析

東洋紡績 総合研究所	松	井	宏	仁(会員)
〃	森	山	和	夫(〃)*
〃	福	岡	重	紀

Washing of Fabrics.

Part 2: Analysis of Substance Transfer in Fiber Assembly Based on the Diffusion Theory.

Hirohito Matsui, Kazuo Moriyama and Shigenori Fukuoka,
Katata Research Center, Toyobo Co., Ltd.,
Otsu City, Shiga Prefecture.

Abstract

When a fiber assembly such as cloth or yarn is washed, a chemical to be washed off from fiber assembly migrates in fiber phase and also water phase in a fiber assembly and subsequently transfers to water.

In such processes the diffusion coefficient of a chemical agent in a fiber differs largely from that in water. These processes were analyzed on the basis of a diffusion theory. Assuming that a single fiber is a column and a fiber assembly is a column or a plane, the following theoretical relations, representing residual fraction of a chemical agent in a fiber assembly during washing, were obtained:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \exp\left(-D_f \frac{\mu_{ij}^2}{R^2} t\right)$$

where, t ; washing time (s)

$y(t)$; residual fraction of a chemical in a fiber assembly

D_f ; diffusion coefficient of a chemical in a fiber (cm²/s)

R ; radius of fiber (cm)

$$A_{ij} = \left\{ \frac{2Q_i}{(1+\alpha)\beta^2\mu_{ij}^2} \right\}^2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{J_1^2(\mu_{ij})}{J_0^2(\mu_{ij})}} \quad (\text{column})$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2Q_i}{(1+\alpha)\beta^2\mu_{ij}^2} \right\}^2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{J_1^2(\mu_{ij})}{J_0^2(\mu_{ij})}} \quad (\text{plane})$$

Q_i ; roots of $J_0(Q_i)=0$ (column)

roots of $\cos(Q_i)=0$ (plane)

$$\mu_{ij}; \text{ roots of } Q_i = \beta\mu_{ij} \sqrt{1 + \alpha \frac{2J_1(\mu_{ij})}{\mu_{ij}J_0(\mu_{ij})}}$$

J_0, J_1 : Bessel functions of order 0 and 1

α, β : constants depending on a diffusion coefficient of a chemical in a fiber and water, geometrical characteristics of a fiber assembly and so on.

* 現在, 名古屋電気学園勤務

The theoretical results calculated by using the above equations agree closely with the experimental values and also very closely with the results obtained using the simplified equation on which we had previously reported.

(Received May 27, 1977)

摘 要

目 的 繊維集合体である編織物などの洗浄の場合洗浄の対象となる薬品は、拡散係数の非常に異なる繊維と水の中を移動することになる。この繊維と水の複合体中の拡散移動に関する解析を行い、洗浄中の薬品残留量を示す理論式を求める。ついで、この結果を既報の簡略式¹⁾ および実験結果と比較した。

結 果 (1) 1本の繊維を円柱とみなし、繊維と水の複合体を円柱または平板とみなした場合、その中における洗浄対象薬品の残留率を示す式として下記を得た。

$$\frac{T(t)}{T_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \exp\left(-D_f \frac{\mu_{ij}^2}{R^2} t\right)$$

ここに

$$A_{ij} = \left\{ \frac{2Q_i}{(1+\alpha)\beta^2\mu_{ij}^2} \right\}^2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{J_1^2(\mu_{ij})}{J_0^2(\mu_{ij})}} \quad \cdots \cdots (\text{円柱})$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2Q_i}{(1+\alpha)\beta^2\mu_{ij}^2} \right\}^2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{J_1^2(\mu_{ij})}{J_0^2(\mu_{ij})}} \quad \cdots \cdots (\text{平板})$$

J_0, J_1 : 零次および1次のベッセル関数。

Q_i : $J_0(Q_i)=0$ の根 (円柱)

$\cos(Q_i)=0$ の根 (平板)

μ_{ij} : $Q_i = \beta\mu_{ij} \sqrt{1 + \frac{2\alpha J_1(\mu_{ij})}{\mu_{ij} J_0(\mu_{ij})}}$ の根

$$\alpha = \frac{\varepsilon \nu_f}{(1-\varepsilon)\nu_w}$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda_f \nu_w (1-\varepsilon)}{\lambda \nu_f} \frac{\rho^2}{R^2}$$

$T_0, T(t)$: 洗浄開始時および t 秒後の単位長または単位面積の繊維集合体中の薬品量 ($\text{g/cm} \cdots$ 円柱, $\text{g/cm}^2 \cdots$ 平板)

D_f : 繊維中における薬品の拡散係数 (cm^2/s)

ε : 繊維集合体中の繊維の体積比率

ν_f, ν_w : 繊維および水の洗浄対象薬品に対する比濃度溶量 ($\text{g/cm}^3 \cdot ^\circ\text{E}$)

λ_f, λ : 繊維中および繊維と水の複合体中における薬品の移動率 ($\text{g/cm} \cdot ^\circ\text{E} \cdot \text{S}$)

ρ, R : 繊維集合体および1本の繊維の半径, また, 平板の場合は厚さの半分 (cm)

(2) この式に、数値を代入計算してみると、既報の簡略式¹⁾ による計算結果とよく一致しており、実験結果とも比較的よく一致していた。
(昭和52年5月27日受理)

1. まえがき

糸あるいは織物などの繊維集合体を洗浄する場合、洗浄の対象となる薬品は、拡散係数の非常に異なる繊維ならびに水の中を拡散移動することになる。従来繊維集合体を均一な拡散係数を持つ円柱、または、平板として解析した例はあるが、これらは必ずしも実験結果と一致しない^{1)~3)}。これは対象薬品の繊維中と水中との拡散係数が非常に異なる場合顕著となる。

筆者らはいくつかの簡略化を前提として、このような場合の繊維集合体中の薬品残留率と洗浄時間の間の関係式を導いた¹⁾。しかし、これは簡略式であり、正確には成立しない。本報においては、更に正確な解析を実施し、その結果を簡略式による結果と比較するとともに、実験結果と比較、考察を試みた。

2. 理論式の誘導

2.1 円柱モデルの場合

A. 濃度ポテンシャルの変化

まず、糸のような繊維集合体を円柱と考えてその内部

の濃度ポテンシャルの解析を試みる。使用する記号はそれぞれ次のように定める (図1, 図2参照)。

図1 単繊維内における座標

図2 繊維集合体 (円柱) 内における座標

t ; 洗浄時間 (s)
 $T_0, T(t)$; $t=0$ および時間 t における単位長さの繊維集合体中の薬品量 (g/cm)
 $T_w(t), T_f(t)$; 時間 t における, 単位長さの繊維集合体内, 水中および繊維中の薬品量 (g/cm)
 ϵ ; 繊維集合体中の繊維の体積比率
 ρ, R ; 繊維束および単繊維の半径 (cm)
 x, r ; 繊維束内および単繊維内での中心からの距離 (cm)…円柱座標表示における動径の長さ.
 ϕ ; 繊維束および単繊維の中心における中心角 (rad)
…極座標表示における偏角
 D_f, D_w ; 繊維中ならびに水中における 洗浄対象薬品の拡散係数 (cm^2/s)
 $U(x, t), V(x, r, t)$; 繊維集合体内の水および繊維中における洗浄対象薬品の濃度ポテンシャル ($^{\circ}\text{E}$)
 ν_f, ν_w ; 繊維および水の洗浄対象薬品に対する比濃度容量 ($\text{g}/\text{cm}^3 \cdot ^{\circ}\text{E}$)
 $\lambda_f, \lambda_w, \lambda$; 繊維中, 水中, および繊維と水の複合体中における洗浄対象薬品の移動率 ($\text{g}/\text{cm} \cdot ^{\circ}\text{E} \cdot \text{s}$)

ここに, 濃度ポテンシャルとは物質拡散現象を熱伝導現象と対比して仮定したもので, 温度に相当するもの. また, 物質移動率, 比濃度容量もそれぞれ熱伝導率, 体積比熱に対応設定したものである. これらの間には次の関係が成立する (表1参照).

$D_f = \lambda_f / \nu_f \qquad D_w = \lambda_w / \nu_w$

理論式の誘導に当っては次の前提をおく.

- (1) 洗浄開始時 ($t=0$), 繊維集合体内の薬品の濃度ポテンシャルは一定で H_0 ($^{\circ}\text{E}$) とする.
- (2) 繊維束の外周 ($x=\rho$), では薬品の濃度ポテンシャルは0とする.
- (3) 薬品が単繊維より出るまでは, 繊維中の薬品移動率 λ_f で計算し, そのあと繊維束内で, その中心部より外周部へ移動する場合は, 繊維と水の複合体の有効薬品移動率 λ で計算する.
- (4) 繊維集合体内での水の移動速度は極めて小さく, 無視してもよいものとする.

(5) $U(x, t), V(x, r, t)$ とともに, x, r, t に関して変数分離型で与えられるものとする.
いま, 図1に示す単繊維内の微小部分 (斜線部分) について, 薬品量のバランスを考えると, (1)式が得られ, 整理して(2)式となる.

$$\lambda_f \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dr \right) (r+dr) d\phi - \frac{\partial V}{\partial r} r d\phi \right\} = \nu_f \frac{\partial V}{\partial t} r dr d\phi \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\nu_f}{\lambda_f} \frac{\partial V}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

ここで, t についてラプラス変換し, $\mathcal{L}(V) \rightarrow M$ と書くと, (3)式を得る.

$$\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM}{dr} = \frac{S}{D_f} M - \frac{H_0}{D_f} \dots\dots\dots (3)$$

(3)式を解いて $\mu^2 = -(R^2 S / D_f)$ とおくと, 次の式を得る.

$$M = A J_0 \left(\mu \frac{r}{R} \right) + \frac{H_0}{S}$$

ここに, J_0 は0次のベッセル関数であり, A は定数. 境界条件として, 繊維外周, すなわち $r=R$ において, $V(t, R, x) = U(t, x)$ を導入, A を決定すると(4)式が得られる.

$$M = \left(L - \frac{H_0}{S} \right) \frac{J_0 \left(\mu \frac{r}{R} \right)}{J_0(\mu)} + \frac{H_0}{S} \dots\dots\dots (4)$$

ここに, L は $U(t, x)$ の t についてのラプラス変換. つぎに, 1本の繊維にその外周から dt 時間内に, 繊維内に移動する薬品量 (g) を $f(t, x) \pi R^2 dt$ とすると, 1本の繊維に関する薬品量のバランスより, 次の式が得られる.

$$f(t, x) \pi R^2 = 2 \pi R \lambda_f \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=R} \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\mathcal{L}(f) \rightarrow F$ としてラプラス変換し, (4)式ならびに $r=R$ を代入計算すると(6)式を得る.

$$F = \nu_f H_0 \left(\frac{L}{H_0} S - 1 \right) \frac{2 J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)} \dots\dots\dots (6)$$

表1 熱伝導と物質拡散の対応

熱 伝 導		物 質 拡 散		
名 称	単 位	名 称	記 号	単 位
温 度	$^{\circ}\text{C}$	濃度ポテンシャル	U, V	$^{\circ}\text{E}$
温 度 伝 導 率	cm^2/s	拡 散 係 数	D	cm^2/s
熱 伝 導 率	$\text{cal}/\text{cm} \cdot ^{\circ}\text{C} \cdot \text{s}$	物 質 移 動 率	λ	$\text{g}/\text{cm} \cdot ^{\circ}\text{E} \cdot \text{s}$
体 積 比 熱	$\text{cal}/\text{cm}^3 \cdot ^{\circ}\text{C}$	比 濃 度 容 量	ν	$\text{g}/\text{cm}^3 \cdot ^{\circ}\text{E}$

つぎに、図2に示す繊維集合体内の微少部分(斜線部分)について薬品量のバランスを考えると、(7)式が得られ、整理すると(8)式となる。

$$\lambda \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx \right) (x+dx) d\phi - \frac{\partial U}{\partial x} x d\phi \right\} \\ = (1-\varepsilon) x \nu_w \frac{\partial U}{\partial t} dx d\phi + f(t, x) \varepsilon x dx d\phi \cdots (7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{(1-\varepsilon) \nu_w}{\lambda} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\lambda} f(t, x) \cdots (8)$$

これを t についてラプラス変換すると(9)式となる。

$$\frac{d^2 L}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dL}{dx} = \frac{(1-\varepsilon)}{\lambda} \nu_w S L \\ + \frac{\varepsilon}{\lambda} F - \frac{(1-\varepsilon)}{\lambda} \nu_w H_0 \cdots (9)$$

これに(6)式を代入すると、(10)式が得られる。

$$\frac{d^2 L}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dL}{dx} + \left(\frac{\beta \mu}{\rho} \right)^2 \left\{ 1 + \alpha \frac{2J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)} \right\} L \\ = \left(\frac{\beta \mu}{\rho} \right)^2 \left\{ 1 + \alpha \frac{2J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)} \right\} \frac{H_0}{S} \cdots (10)$$

ここに $\alpha = \frac{\nu_f \varepsilon}{\nu_w (1-\varepsilon)}$

$$\beta^2 = \frac{\lambda_f}{\lambda} \frac{\nu_w (1-\varepsilon)}{\nu_f} \frac{\rho^2}{R^2}$$

(10)式を解き、繊維集合体周辺部における濃度ポテンシャル零、すなわち、 $U(t, \rho) = 0$ 、したがって $L_{x=\rho} = 0$ を導入すると、次式が得られる。

$$L = \frac{H_0}{S} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(Q \frac{x}{\rho} \right)}{J_0(Q)} \right\} \cdots (11)$$

ここに $Q = \beta \mu \sqrt{1 + \alpha \frac{2J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)}}$

B. 繊維集合体内の薬品量

単位長さの繊維集合体内の総薬品量 T は、集合体内繊維間の中における薬品量 T_w と繊維中の薬品量 T_f の和となる。まず、繊維間水中の薬品量について考えてみる。なお、 T 、 T_w 、 T_f の t についてのラプラス変換をそれぞれ $\mathcal{L}(T)$ 、 $\mathcal{L}(T_w)$ 、 $\mathcal{L}(T_f)$ とする。

$$\mathcal{L}(T_w) = \nu_w (1-\varepsilon) \int_0^\rho 2\pi x L dx$$

ここに(11)式を代入すると(12)式が得られる。

$$\mathcal{L}(T_w) = \pi \rho^2 (1-\varepsilon) \nu_w \frac{H_0}{S} \left\{ 1 - \frac{2J_1(Q)}{Q J_0(Q)} \right\} \cdots (12)$$

次に繊維中の薬品量について考える。1本の単位長さの繊維中に含まれる薬品量は、上と同様にして

$$\nu_f \int_0^R M \cdot 2\pi r dr$$

繊維集合体全体としては、

$$\mathcal{L}(T_f) = \int_0^\rho \varepsilon \nu_f \left\{ \int_0^R M \cdot 2\pi r dr \right\} \frac{2\pi x}{\pi R^2} dx$$

これに(4)、(11)式を代入計算すると(13)式を得る。

$$\mathcal{L}(T_f) = \pi \rho^2 \varepsilon \nu_f \frac{H_0}{S} \left\{ 1 - \frac{2J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)} \frac{2J_1(Q)}{Q J_0(Q)} \right\} \cdots (13)$$

(12)、(13)式より、(14)式を得る。

$$\mathcal{L}(T) = \pi \rho^2 (1-\varepsilon) \nu_w (1+\alpha) \frac{H_0}{S} \left\{ 1 + \frac{2\lambda Q}{(1+\alpha)(1-\varepsilon)\rho^2 S \nu_w J_0(Q)} \right\} \cdots (14)$$

この(14)式を逆ラプラス変換すると、(15)、(16)式を得る。

$$\frac{T}{T_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \exp \left(-\frac{D_f}{R^2} \mu_{ij}^2 t \right) \cdots (15)$$

$$A_{ij} = \left\{ \frac{2Q_i}{(1+\alpha)\beta^2 \mu_{ij}^2} \right\}^2 \frac{1}{1 + \alpha \frac{J_1^2(\mu_{ij})}{J_0^2(\mu_{ij})}} \cdots (16)$$

ここに Q_i ; $J_0(Q_i) = 0$ の根

$$\mu_{ij}; Q_i = \beta \mu_{ij} \sqrt{1 + \alpha \frac{2J_1(\mu_{ij})}{\mu_{ij} J_0(\mu_{ij})}} \text{ の根}$$

2.2 平板モデルの場合

A. 濃度ポテンシャルの変化

繊維のような繊維集合体を平板と考えた場合について、次に解析を行う。使用する記号はいずれも円柱モデルの場合と同様とする。ただし、平板の厚さを 2ρ とし、平板の中心からその表面へ向かっての距離を x とする(図3参照)。また、単位長さの繊維集合体中の薬品の量 T_0 、 T 、 T_f 、 T_w はそれぞれ単位面積の繊維集合体中の薬品量と考える。

図3 繊維集合体(平板)内における座標

なお、計算に当っては、円柱モデルの場合と同様な前提をおく。

まず単繊維について考えると、円柱モデルの場合とまったく同様に(1)~(6)式が得られる。次に、図3に示す繊維集合体内の微少部分について薬品のバランスを考えると、(17)式が得られる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{(1-\varepsilon) \nu_w}{\lambda} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\lambda} f(t, x) \cdots (17)$$

これを円柱モデルの場合と同様に t についてラプラス変換し、これに(6)式を代入すると、円柱モデルの場合

の(10)式と類似の(18)式が得られる.

$$\frac{d^2 L}{dx^2} + \left(\frac{\beta \mu}{\rho}\right)^2 \left\{1 + \alpha \frac{2 J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)}\right\} L = \left(\frac{\beta \mu}{\rho}\right)^2 \left\{1 + \alpha \frac{2 J_1(\mu)}{\mu J_0(\mu)}\right\} \frac{H_0}{S} \quad \dots\dots\dots (18)$$

これを解き、円柱モデルの場合と同様に、初期条件および境界条件を導入すると、(19)式が得られる.

$$L = \frac{H_0}{S} \left\{1 - \frac{\cos\left(Q \frac{x}{\rho}\right)}{\cos Q}\right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

B. 繊維集合体内の薬品量

この場合も円柱モデルの場合と同様に、計算を進めると、繊維集合体内繊維間水中の薬品量を示す式として、円柱モデルの場合の(12)式に相当する(20)式が得られる.

$$\mathcal{L}(T_w) = 2(1-\epsilon)\rho\nu_w \frac{H_0}{S} \left\{1 - \frac{\tan Q}{Q}\right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

同様に、(13)式に相当するものとして、(21)式を得る.

$$\mathcal{L}(T_f) = 2\rho\epsilon\nu_f \frac{H_0}{S} \left\{1 - \frac{2 J_1(\mu) \tan Q}{\mu J_0(\mu) Q}\right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって、繊維集合体中の全薬品量としては、(22)式を得る.

$$\mathcal{L}(T) = 2\rho(1-\epsilon)\nu_w(1+\alpha) \frac{H_0}{S} \left\{1 + \frac{\lambda Q \tan Q}{(1+\alpha)(1-\epsilon)\rho^2 S \nu_w}\right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

この(22)式を逆ラプラス変換すると、(23)、(24)式を得る.

$$\frac{T}{T_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \exp\left(-\frac{D_f \mu_{ij}^2 t}{R^2}\right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 Q_i}{(1+\alpha)\beta^2 \mu_{ij}} \right\}^2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha J_1^2(\mu_{ij})}{1 + \alpha J_0^2(\mu_{ij})}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに Q_i ; $\cos(Q_i) = 0$ の根

$$\mu_{ij}; Q_i = \beta \mu_{ij} \sqrt{1 + \alpha \frac{2 J_1(\mu_{ij})}{\mu_{ij} J_0(\mu_{ij})}} \text{ の根}$$

3. 計算例と簡略式による計算結果との比較

(15)および(23)式は i, j に関する2次元の無限級数である. これは i, j の増加に伴い A_{ij} は減少し、特に μ_{ij} の大きな項 (i の大きな項) の場合特にいちじるしい. また μ_{ij} の大きな項は $\exp\left(-\frac{D_f \mu_{ij}^2 t}{R^2}\right)$ が、時間 t の経過に伴い速やかに減少する. しかしながら、計算に当ってはどの i, j まで計算するかは重要な点であり、 A_{ij} が 5×10^{-5} 以上を計算、これ以下は切捨てた.

また、計算に当っては、実際の糸あるいは織物に近い数値として、それぞれ下記を用いた.

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0.7 & \nu_f/\nu_w &= 1 \\ \rho &= 7.5 \times 10^{-3} \text{ cm} & R &= 7.5 \times 10^{-4} \text{ cm} \\ \lambda/\nu_w &= D = 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s} \\ \lambda_f/\nu_f &= D_f = 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

図4 理論式による計算結果 (円柱)

図5 理論式による計算結果 (平板)

図4, 5はこの計算結果を示したものである. なお、図6, 7に比較のため同じ数値を用い既報¹⁾の簡略式(25)による結果を示した.

$$\frac{T}{T_0} = T_1 e^{-\delta t} + T_2 e^{-\gamma t} \quad \dots\dots\dots (25)$$

図6 簡略式による計算結果 (円柱)

図7 簡略式による計算結果 (平板)

ここに、 δ および γ は次の式で計算される。

$$\delta \text{ または } \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) B_f + \frac{B}{1-\varepsilon} \right\} \pm \sqrt{\left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) B_f - \frac{B}{1-\varepsilon} \right\}^2 + 4 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} B_f} \dots (26)$$

また T_1 , T_2 は(27)式による。

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \varepsilon F_1 + (1-\varepsilon) W_1 \\ T_2 &= \varepsilon F_2 + (1-\varepsilon) W_2 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

この F_1 , F_2 , W_1 , W_2 はまた(28), (29)式により決定される。

$$\left. \begin{aligned} F_1 + F_2 &= A_f \\ W_1 + W_2 &= A_w \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} (\delta - B_f) F_1 + B_f W_1 &= 0 \text{ または } \\ \frac{\varepsilon B_f}{1-\varepsilon} F_1 + \left\{ \delta - \frac{B + \varepsilon B_f}{(1-\varepsilon)} \right\} W_1 &= 0 \\ (\gamma - B_f) F_2 + B_f W_2 &= 0 \text{ または } \\ \frac{F B_f}{(1-\varepsilon)} F_2 + \left\{ \gamma - \frac{B + \varepsilon B_f}{(1-\varepsilon)} \right\} W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

A_f , A_w は洗浄初期、繊維集合体表面部分において、薬品が急速に脱落することに関連する係数で、理論的に検討すると、円柱モデルの場合 $A_w=0.69$, $A_f=0.69 \sim 1$ 、また平板モデルに対しては $A_w=0.81$, $A_f=0.81 \sim 1$ となる。本報においては A_w , A_f とも円柱モデルの場合 0.69、また平板モデルに対し 0.81 を用いて計算した。また、 B , B_f は薬品除去の難易を示すパラメータで、 B_f は(30)式で示され、また B は(31)式で示される B_e 、または B_p である。ただし、ここに Q_1 は零次のベッセル関数の最初の根 (約 2.40) とする。

$$B_f = D_f \left(\frac{Q_1}{R} \right)^2 \dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} B_e &= \frac{\lambda}{\nu_w} \left(\frac{Q_1}{\rho} \right)^2 \dots (\text{円柱}) \\ B_p &= \frac{\lambda}{\nu_w} \left(\frac{\pi}{2\rho} \right)^2 \dots (\text{平板}) \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

また、拡散係数 D (cm^2/s) の均質な円柱または平板の洗浄の際の薬品の残留量は既報¹⁾の解析により、洗浄の極く初期を除き次の式で示される。

$$(\text{円柱}) \quad \frac{T}{T_0} \cong 0.69 \exp \left\{ -D \left(\frac{Q_1}{\rho} \right)^2 t \right\} \dots (32)$$

$$(\text{平板}) \quad \frac{T}{T_0} \cong 0.81 \exp \left\{ -D \left(\frac{\pi}{2\rho} \right)^2 t \right\} \dots (33)$$

また、1本の繊維を洗浄した場合には、上記(32)式の ρ を R に、 D を D_f におきかえれば良い。

いま、(32), (33)式に本報における計算例の数値を代入計算すると、 $D(Q_1/\rho)^2 = 0.1024 \text{ s}^{-1}$, $D(\pi/2\rho)^2 = 0.0439 \text{ s}^{-1}$ が得られ、単繊維については、 $D_f=10^{-10}$, 10^{-9} , 10^{-8} , $10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ に対し、それぞれ $D_f(Q_1/R)^2 = 0.001024$, 0.01024 , 0.1024 , 1.024 s^{-1} を得る。図4, 5に示した点線は有効拡散係数 $D = \lambda/\nu_w$ を拡散係数とする円柱、または平板の洗浄情況ならびに $D_f=10^{-10}$, $10^{-9} \text{ cm}^2/\text{s}$ の単繊維の洗浄の情況を示したものである。

これによると、 $D_f=10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ 程度で、繊維集合体の有効拡散係数に近い場合には、有効拡散係数 D を拡散係数とする均一な物質の場合と同様な洗浄状況を示す。また $D_f=10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}$ などと繊維中の拡散係数が繊維集合体中の拡散係数に比較して非常に小さい場合には、繊維中に存在する薬品は単繊維洗浄の場合と同様な挙動で除去されることを示している。

図4, 5, 6, 7は既報の簡略式と本報において導いた理論式が極めて類似した結果を出すことを示している。一般に、洗浄の極く初期を除き、簡略式により精密な解析に近い結果が得られ、簡略式により多くの現象を充分説明できることがわかる。

表2 簡略式におけるパラメータ

モデル型	D_f (cm^2/s)	T_1	δ (s^{-1})	T_2	γ (s^{-1})
円 柱	10^{-10}	0.296	0.344	0.704	0.001
	10^{-9}	0.261	0.367	0.739	0.010
	10^{-8}	0.082	0.628	0.918	0.056
	10^{-7}	0.002	3.667	0.998	0.096
平 板	10^{-10}	0.288	0.149	0.712	0.001
	10^{-9}	0.215	0.172	0.785	0.009
	10^{-8}	0.026	0.455	0.974	0.033
	10^{-7}	0.0003	3.517	0.9996	0.043

表2は簡略式による計算の過程において、算出した T_1 , T_2 , δ , γ を示したものである。

これを先に示した均質な円柱または平板についての数

字と比較すると、先に図4、5において示されたと同様に次のことがわかる。

D_f が 10^{-7} cm²/s などと繊維集合体の有効拡散係数に近い場合には、有効拡散係数 D を拡散係数とする均一物質の場合と同様な洗浄状況を示す。また、 $D_f = 10^{-10}$ cm²/s などと繊維中の拡散係数が繊維集合体中の拡散係数に比較して非常に小さい場合は、繊維間水分中に溶けている薬品は、有効移動係数 λ を移動係数とし、容量が $(1-\epsilon)\nu_w$ とする均一物質を洗浄する場合と同様に除去される。また、繊維中に存在する薬品は単繊維洗浄の場合とまったく同様な挙動で除去されることを示している。

したがって、このような場合は、繊維集合体を単なる均一物質とみなした円柱モデルや、平板モデルとしての取扱いには従わなくなる。

4. 実験結果との比較

比較に使用する洗浄結果はいずれも既報の文献値を使用。また、その考察に用いる数値も主として文献値を利用した。ただし、過去の文献中に見当たらない繊維素中の拡散係数は実測した。

4.1 拡散係数の測定

洗浄対象薬品として、苛性ソーダおよび、繊維素系繊維に親和力を持たない酸性染料スミノールサイアニン 5 R extra (C. I. No. Acid Blue 113) を取り上げ、その繊維素中の拡散速度を測定した。使用した苛性ソーダは試薬 1 級で、またサイアニン 5 R は市販品を 20 倍量のメタノールにて 2 回再結晶したもの。繊維素としては大日本セロハン製の厚さ 20 μ の防湿加工前のセロハン膜をアセトンで洗浄し使用した。

図8 拡散係数測定装置 (単位: mm)

図8は拡散係数測定に使用した装置で、C部にセロハン膜を装着して使用する。

測定に当たっては、まず図8に示す装置全体を所定温度にコントロールした恒温槽中に入れ、次に同じ温度に加温された苛性ソーダ溶液(または染料溶液)をA部に、またB部には同じ温度に加温された蒸留水を入れる。使

用する薬品の濃度は苛性ソーダの場合 5.0%，また染料の場合は 0.01% とした。A、B 各部はその中で温度分布や、濃度分布の斑の発生を防ぐため、ゆるい攪拌をしつつ一定時間ごとに分析用の試料を採取し、対象薬品の分析を行った。分析は苛性ソーダについては塩酸標準液による中和滴定により、また、サイアニン 5 R については 650 μ の吸光度より算出した。

測定値より拡散係数の算出は次の式により、 t と $-\ln \Delta C$ のグラフの勾配より算出した。

$$-\ln \Delta C = \frac{2S_c D_f \nu_f}{v l \nu_w} t \dots \dots \dots (34)$$

ここに、

ΔC ; A、B 部の濃度差 (g/cm³)

v ; A、B 部の溶液量 (cm³)

l ; セロハン膜の厚さ (cm)

S_c ; セロハン膜の有効面積 (cm²)

なお、ここで得られる $D_f \nu_f / \nu_w$ を水濃度基準拡散係数と呼ぶことにする。

4.2 各種要素の推定

実測値の解析のために使用する各要素は文献値より、一応実際に近いと考えられる数値を推定使用した。

単繊維半径⁴⁾; 7.5×10^{-4} cm

糸の半径; 織物中の糸について実測

糸中の繊維充填率(水中); 上記糸の半径、綿繊維の比重⁵⁾、綿繊維の水中における膨潤率⁶⁾より算出。 $\epsilon = 0.71$

苛性ソーダの水中拡散係数; 1.5×10^{-5} cm²/s⁷⁾

苛性ソーダの繊維素中の水濃度基準拡散係数; 4.9×10^{-7} cm²/s (実測)

サイアニン 5 R の水中の拡散係数; 8.7×10^{-6} cm²/s⁸⁾

サイアニン 5 R の繊維素中の水濃度基準拡散係数; 3.1×10^{-10} cm²/s (実測)

繊維集合体中の苛性ソーダの有効拡散係数; 繊維集合体中の繊維充填率、苛性ソーダの水中ならびに繊維中の拡散係数より、筆者ら⁹⁾の方法により算出。 $D = \lambda / \nu_w = 3.0 \times 10^{-6}$ cm²/s

サイアニン 5 R の繊維集合体中の有効拡散係数; 上記と同様に算出。 $D = \lambda / \nu_w = 1.5 \times 10^{-6}$ cm²/s

4.3 洗浄実験結果との比較

苛性ソーダの脱着に関する実験値としては筆者ら¹⁾の報告の結果を用い、この報文に記載の織物特性値ならびに、前記の諸データを用いて、本報において導いた理論式による計算を実施し、その結果と比較した。図9、10にこの結果を示す。また表3は図9、10の勾配の絶対値を比較したもので、それぞれの場合の洗浄速度に関連するパラメータであり、大きいほど洗浄速度が速いことを示している。

図9 理論値と実験値の比較 (生地 I)

図10 理論値と実験値の比較 (生地 II)

表3 洗浄速度パラメータの実験結果と理論値の比較 (苛性ソーダ)

		生地 I	生地 II
実験値	攪拌あり	0.052	0.024
	〃 なし	0.017	0.006
理論値	円柱モデル*1	0.13	0.056
	平板モデル*2	0.022	0.007

注) *1 円柱モデルの場合は糸の半径を ρ とする
*2 平板モデルの場合は繊維の厚さを 2ρ とする

図9, 10においては理論値, 実験値とも洗浄の極く初期を除いては $t - \log(T/T_0)$ の関係が直線となっており, この点では一致している。その速度は表3からもわかるように, 生地 I, II いずれの場合も, 攪拌状態での洗浄速度は繊維を平板とみなした場合よりは速く, 糸に着目し円柱とみなした場合よりは遅い。また, 攪拌なしの場合の実験結果は, 繊維を平板とみなした場合よりもわずかに遅いが大体一致している。

これらのことは, 次のように考えると良く説明できる。すなわち, 攪拌なしの場合は, 繊維内における水の

移動はほとんど起こらず, 拡散によって, 繊維外へ出る。ただし繊維表面に存在すると考えられる境界膜のため平板とみなした場合よりわずかに遅くなる。また, 攪拌状態で洗浄した場合には, 繊維内糸間の水中にも水の移動が起こり, 平板モデルの場合よりも早い洗浄が行われる。しかしながら, 糸間の水を完全に移動させ, この中の薬品濃度を零とするまでには至らず, 円柱モデルの場合よりは遅い洗浄となる。なお, 本報においては, 理論値算出に当って, 使用する各要素につき大胆な推定を行っている。たとえば, 綿繊維中の拡散係数として, セロハン膜中のそれを使用した。また, 繊維集合体中の繊維充填率の算出に当っては, 繊維の水中膨潤率として, 純水中のデータを用いたが, 期待以上に実験値と理論値が良く一致した。しかしながら, 苛性ソーダ中では, より大きい繊維の膨潤が起こり, 繊維充填率がさらに高くなり, 繊維集合体中の有効拡散係数を低下させていることも考えられる。これらを考慮すると, 理論値はもう少し遅い洗浄速度を示すようになり, 円柱モデルの理論値が, 攪拌水中での実験結果にさらに近づいてくる可能性がある。

サイアニン5Rを用いての洗浄については脇田ら^{10)~18)}の実験結果があるが, 使用素材のデータについて不明な点あり, 詳しい解析は実施できなかった。しかし, この場合, 染料の繊維集合体中の有効拡散係数 $1.5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, また繊維素中の水濃度基準拡散係数 $3.1 \times 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}$ より考えて, 図4, 5の場合の $D_f = 10^{-9} \sim 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{s}$ の場合と類似のものとなり, 苛性ソーダの場合のごとく, 均一物質として取扱うことは困難と考えられる。この点脇田ら²⁾が繊維集合体を均一物質として扱った場合, 理論式に合致しないとしているのとは一致する。

なお, 繊維がポリプロピレンのようにサイアニン5Rを常温ではまったく吸収しない場合の洗浄状況は, (15), (16), (23)および(24)式において, $\nu_f = 0$, すなわち $\alpha = 0$ を代入計算すれば, その特殊解として得られる。これらの式において μ_{ij} は次の式により算出されたが,

$$Q_i = \beta \mu_{ij} \sqrt{1 + \alpha \frac{2J_1(\mu_{ij})}{\mu_{ij}J_0(\mu_{ij})}} \quad \text{の根}$$

$\alpha = 0$ を上式に代入すると, $Q_i = \beta \mu_{ij}$ となり, j は1つとなり, 単に $Q_i = \beta \mu_i$ となる。この結果と $\alpha = 0$ を(16)および(24)式に代入すると(34)および(35)式を得る。

すなわち, 円柱モデルの場合

$$A_i = 4/Q_i^2 \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここに Q_i は $J_0(Q) = 0$ の根

また, 平板モデルの場合

$$A_i = 2/Q_i^2 \quad \dots\dots\dots(35)$$

ここに Q_i は $\cos(Q)=0$ の根

同じように (15) または (23) 式に $\alpha=0$, および $Q_i = \beta\mu_i$ を代入すると (36) 式を得る.

$$\frac{T}{T_0} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp \left\{ -\frac{\lambda Q_i^2}{\nu_w (1-\varepsilon) \rho^2} t \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

これは、繊維集合体を均一な円柱または平板として扱った場合の式と極めて類似しており、既報¹¹⁾のごとく、第2項以下は時間 t の経過とともに急速に減少するので、省略すると次のようになる。

$$(\text{円柱}) \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0.69 \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)\nu_w} \left(\frac{Q_1}{\rho} \right)^2 t \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$(\text{平板}) \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0.81 \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)\nu_w} \left(\frac{\pi}{2\rho} \right)^2 t \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $\log \frac{T}{T_0}$ と t の間に洗浄の極く初期を除いて直線関係が得られる。これらは $\lambda/(1-\varepsilon)\nu_w$ を拡散係数とする均一な円柱または平板の場合とまったく同じ式であり、脇田ら⁹⁾ がサイアニン5Rを用いたポリプロピレン繊維の洗浄実験で、糸を均質な円柱とみなした場合の拡散式に一致するとしているのうなずける。

5. むすび

(1) 繊維と水などのように、その中における拡散係数が異なる複合材料よりの薬品除去について、拡散理論をベースに一般式を導いた。(15), (16), (23) および (24) 式参照。

(2) この式による計算の結果を既報¹¹⁾の簡略式による計算結果と比較すると、よく一致しており、多くの場合、簡略式により現象を説明することができる。

(3) 過去の綿織物上の苛性ソーダ除去試験の結果は今回導いた理論式による結果により、良く説明できる。特に水の攪拌なしで洗浄する場合には、織物を平板として扱い解析した結果と比較的良好一致している。

(4) ここで使用したような、短繊維よりなる糸や織物は攪拌水中でも攪拌の効果は糸中までは及びがたく、織物を平板として扱って計算した結果より速い洗浄速度を示すが、糸に着目して円柱として扱った計算結果ほど速い洗浄速度を示さない。

(5) スミノール、サイアニン5Rを洗浄対象物質とした場合は、この染料の水中と繊維素中における拡散係数が大きく異なり、このような場合、糸あるいは、織物を均質物質として扱った拡散式には従わないことが理論式からいえる。また、この傾向は、実験結果とも一致する。

(6) 本報においては、実験値は主として、既報の結果を利用しており、理論式による結果と十分な比較が出来なかった。今後さらに多くの実例と比較したい。

なお、本研究は昭和51年度繊維機械学会大会にて報告した。

文 献

- 1) 松井宏仁, 小林正宏, 小路一完: 繊維学会誌, **29**, 108 (1976)
- 2) 脇田登美司, 基礎繊維工学 [V], p. 197, 1971, 繊維学会
- 3) A. Meier-Windhorst, et al.: Melliand Textilber., **45**, 1388 (1964)
- 4) 繊維学会: 繊維物理学, p. 23, 1965, 丸善(株)
- 5) 繊維学会: 繊維総覧, p. 15, 1970, 繊維学会
- 6) 繊維学会, 繊維物理学, p. 181, 1965, 丸善(株)
- 7) Öholm, L. W.: Physikal Chem. **50**, 309 (1905)
- 8) 脇田登美司, 黒木宣彦: 繊維学会誌, **30**, 452 (1974)
- 9) 松井宏仁, 森山和夫: 繊維学会第29回大会論文集, p. 81 (1976)
- 10) 脇田登美司, 小西行雄: 学振120委員会年報, **10**, p. 136 (1958)
- 11) idew, ibid, **12**, p. 282 (1960)
- 12) idew, ibid, **13**, p. 190 (1961)
- 13) idew, ibid, **15**, p. 179 (1963)