紐の運動学(3)*

(原著者) 團 爺**
 (注 釈) 堀 川 明***
 (訳) 矢井田 修****

第5章 振子の運動

5.1 紐が近似的に直線状を維持するものとみなし得る条件

本章では振子の運動を研究するのであるが、振子の紐は普通直線状をなすとみなされてその運動が調べられているから、予論としてここでまずどのような場合に直線状を維持し得るかを検討してみる。

はじめに、紐が真に直線形を維持する条件を考える。これがため紐が無延伸で一平面内でのみ運動する場合を対象しよう。

紐が直線であるときはいたるところ $C=0$ で、かつ θ は S に無関係である。したがってつねに直線形を維持するためにはつねに $dC/dt=0$ であり、 ω , $d\omega/dt$ もまたつねに S に無関係でなくてはならない。

第4章の諸式で $C=0$ とするとつぎの関係式が得られる。

$$(31) \text{ 式から } v_1' = 0 \quad v_2' = \omega \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(32) \text{ 式から } a_1' - \omega^2 \quad a_2' = \frac{d\omega}{dt} \quad \dots\dots\dots (2)$$

結局、紐がつねに直線状である場合にはつぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{array}{l} C, \frac{dC}{dt}, \frac{d\omega}{dS}, v_1' \text{ はいずれも } 0 \\ \theta, \omega, \frac{d\omega}{dt}, a_1', a_2', v_2' \text{ はいずれも } S \text{ に無関係} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

第1章 総論

第2章 紐の運動微分方程式

第3章 紐運動の伝播

第4章 無延伸の紐

第5章 振子の運動

第6章 曳紐弾道 (太字は本号掲載)

$$v_1' = 0 \text{ から } v_1 = \text{const.}$$

$$v_2' = \omega \text{ から } v_2 = (k+S)\omega \text{ (ただし } k \text{ は定数)}$$

これによって、直線状の紐は ω なる速度で回転することと、直線の方向に滑動する運動があるだけで、これ以外の運動は存在しないことがわかる。

$$\text{第4章の(15)式から } T' = \rho(a_1 - a_{r1}) \dots\dots\dots (4)$$

(2)式の第1式を積分して

$$a_1 = k_1 - \omega^2 S \text{ (ただし } k_1 \text{ は積分定数)}$$

これに(4)式に代入すると

$$T' = \rho(k_1 - \omega^2 S - a_{r1})$$

積分して

$$T = \rho \left(k_0 + k_1 S - \frac{\omega^2}{2} S^2 - \int a_{r1} dS \right) \dots\dots\dots (5)$$

ただし k_0 は積分定数

これが直線状紐内の張力分布を示す公式で、端末もしくは他の一点の条件がわかれば積分定数を決定すること

*On the Dynamics of Strings (3).

**Dan Dohya (Original Writer), 元陸軍技術研究所長 陸軍中將

***A. Horikawa (Translator), Member. 大阪大学工学部 教授(工博)

****O. Yaida (Translator), Member. 大阪大学 工学部 助手(工博)

ができる。

第4章の(3)式の2番目の式で $C=0$ とすれば、

$$\frac{d\omega}{dt} = a_{fz}' \dots\dots\dots (6)$$

左辺は S に無関係であるから、 a_{fz}' もまた S に無関係である。

すなわち

$$a_{fz} = h_0 + h_1 S \quad (h_0, h_1 \text{ は定数})$$

$$a_{fz}'' = 0$$

すなわち、法線方向の外力には(6)式や(7)式のような関係が成立するのでなければ直線状を維持することができない。いいかえれば、(6)式と(7)式は直線状維持のための一つの条件である。

いま、有限長の紐 AB の両端を保持し、その間隔をつねに紐の長さに等しくして任意の運動をさせるものとする。これは弓に糸を張ったまま弓弦を動かすような場合である。紐は無延伸であるから、 AB 間の紐はつねに直線状を維持するしかなく実際に弓を動かす実験からもその判断が誤りでないことが認められる。しかし、この場合に紐に対する法線方向の外力は両端 A, B 以外に作用し得ないから(6)式と(7)式の条件は成立していない。ではなぜ直線状を維持し得るのであろうか。

この矛盾は無延伸でない紐を無延伸と仮定したことから起っている。

紐は AB 両端から法線外力を受けるだけであるから、紐の中部は運動に遅れ多少とも伸張することにより図1

図1 弓の場合

の APB のような弧形となる。そのとき紐中の1点 P には法線加速度 $PD = \frac{1}{\rho} (TC)$ が作用するから、これによって両端の運動に追従するのであろう。ただし、紐が無延伸とみなし得るような場合は弾性率 E が非常に大きく、きわめて小さい伸張によって大きな T が生じるから、ほとんど無視できるほど小さい C の値ではすでに T の値が追従の大きさに達したものと判断できる。

このような事実から、一般につきのような条件下においては、運動する紐はほぼ近似的に直線形を維持するものとみなすことができる。

ほぼ $C=0$ とみなし得るような C の微小値中、許容し得る最大値を C_m とし、紐の両端の加速度の最大値を a_m 、紐の張力を T とするとき、

$$\left| \frac{1}{\rho} (TC_m) \right| < |a_m| \dots\dots\dots (8)$$

の場合は紐は近似的に直線形を維持するものとみなすことにする。

この仮定は複雑な場合をもきわめて簡単に処理できるので重要である。

5.2 紐振子

紐の一端を固定し他端に重量を加えて重力場内において振子が振れる。本章では無延伸で平面運動の場合だけを考えることにする。

一端における重量物を質量 Q の質点とみなす。すなわち、その大きさや回転などは考えない。重力加速度 g は方向大ききともつねに一定値をとるものとする。

紐の固定点を $S=0$ とする。紐の全長を S_a とし $Q/\rho S_a = m$ と置く。したがって、振子の全重量は次式で示される。

$$Q + \rho S_a = \rho S_a (1 + m) \dots\dots\dots (9)$$

紐の固定点を座標の原点とし、紐の接線方向が垂直下方 $-y$ 軸に対してなす角を α と示す。したがって、普通に用いる x 軸を横線とした座標軸で接線方向と x 軸とのなす角を θ と示すと次の関係がある (図2 参照)。

図2 紐振子

$$\alpha = \theta + 90^\circ \dots\dots\dots (10)$$

紐がつねに直線状であると考えれば、この振子は剛体の棒でつくった振子と同様である。まずこのような場合について考えよう。

振子の O 点に対する慣性モーメントは

$$I = \rho \int_0^{S_a} S^2 dS + Q S_a^2 = \frac{\rho}{3} S_a^3 + Q S_a^2 = \rho S_a^3 \left(\frac{1}{3} + m \right) \dots\dots\dots (11)$$

0点に関する重力のモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= -g \sin \alpha \left(\rho \int_0^{s_a} S dS + Q S_a \right) \\ &= -g \sin \alpha \left(\frac{\rho}{2} S_a^2 + Q S_a \right) \\ &= -\rho g S_a^2 \left(\frac{1}{2} + m \right) \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = -\frac{3g(1+2m)\sin\alpha}{2S_a(1+3m)}$$

$$\text{よって } \frac{3g(1+2m)}{2S_a(1+3m)} = A \quad \dots\dots\dots (13)$$

とおけば、

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -A \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (14)$$

$t=0$ における初期条件を $\omega=\omega_0$, $\alpha=0$ とすれば上式を積分して

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2A(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\omega_0^2 - 4A \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

これが普通の振子運動で、 α の値が微小で $\sin \alpha = \alpha$ とみなし得る範囲を越えないときは明らかに一つの単位運動である。

(4)式中の a_{r1} は $g \cos \alpha$ であり、また a_t は求心加速度だけであるから $-S\omega^2$ である。

よって(4)式は次のようになる。

$$T' = -\rho(S\omega^2 + g \cos \alpha)$$

積分して

$$T = T_0 - \rho \left(g S \cos \alpha + \frac{1}{2} S^2 \omega^2 \right)$$

ただし T_0 は未知の積分定数で $S=0$ の点の張力である。

端 $S=S_a$ にこの式を適用すれば

$$T_a = Q \left(S_a \omega^2 + g \cos \alpha \right) = T_0 - \rho \left(g S_a \cos \alpha + \frac{1}{2} S_a^2 \omega^2 \right)$$

これから T_0 の値を求め上式に代入すれば

$$T = \rho g \cos \alpha \left\{ (1+m) S_a - S \right\} + \frac{\rho}{2} \omega^2 \left\{ (1+2m) S_a^2 - S^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

はじめに紐は近似的に直線を維持するものと仮定して上記の諸式を得たが、この仮定がどの程度までゆるされるか検討してみよう。

いま張力のもっとも小さいのは紐の外端で加速度のもっとも大きいのは振幅が最大に達したときであり、いいかえれば、直線からもっとも遠ざかりそうなのは $\omega=0$ の最大振幅時の $S=S_a$ の外端である。この場合の T は(16)式から $T = Q g \cos \alpha$

この際の外力による加速度は $g \sin \alpha$ だから、(8)式により C_m の最大値を検討すれば

$$|C_m| < \left| \frac{\rho g \sin \alpha}{Q g \cos \alpha} \right| = \left| \frac{\rho}{Q} \tan \alpha \right| \quad \dots\dots\dots (17)$$

これにより、紐の外端に加えた重量が大きいほど、かつ振幅の小さいほど直線形に近い形を維持することがわかる。

重錘に比べて紐の重量が無視できる場合はもちろん近似直線を維持するものと考えられ、この点が初等力学でつねに紐を直線とみなす根拠であろう。

一例として

$$\frac{\rho}{Q} = \frac{1}{100} \quad \tan \alpha = \frac{1}{10} \quad (\alpha \doteq 6^\circ)$$

とすれば $C_m < \frac{1}{1000}$ となり、曲率半径は1000 (ρ の重さの紐の長さが単位)より大となることはないと思われる。

ω_0 の値が十分大きいと、重量附の紐振子は往復運動をしないでたえず紐の緊張を維持しながら回転を継続することは実験上からも知られている。この場合の紐が直線と近似できる程度をつぎに調べてみよう。

(15)式および(14)式の α を θ に代えたと

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2A(1 + \sin \theta)}$$

$$T = -\rho g \sin \theta \left\{ (1+m) S_a - S \right\} + \frac{\rho}{2} \omega^2 \left\{ (1+2m) S_a^2 - S^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

紐がゆるむことなくつねに緊張し、近似的に直線とみなし得るためには、 T は負にならないばかりでなく相当大的な値でなくてはならない。

T が正值を保つ間、 T の最小値はつねに外端 $S=S_a$ の点だからこの点の張力を T_a で示せば(18)式から次式が得られる。

$$T = \rho m \omega^2 S_a^2 - \rho g m S_a \sin \theta$$

法線方向の外力による加速度はつねに $-g \sin \theta$ だから、(8)式の条件式は

$$|C_m| < \left| \frac{g \sin \theta}{m \omega^2 S_a^2 - g m S_a \sin \theta} \right| \quad \dots\dots\dots (19)$$

いま $\theta=0$ のときの ω を ω_1 とすると、(18)式の上の式から

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2A$$

よって(18)式の上式は

$$\omega^2 = \omega_1^2 - 2A \sin \theta$$

これを(19)式に代入し $|C_m| = \frac{1}{R_m}$ とおけば、

$$R_m > \left| \frac{m S_a^2 (\omega_1^2 - 2A \sin \theta) - g m S_a \sin \theta}{g \sin \theta} \right|$$

あるいは

$$R_m > \left| \frac{m S_a}{g} \left\{ S_a \left(\frac{\omega_1^2}{\sin \theta} - 2A \right) - g \right\} \right| \quad \dots\dots\dots (20)$$

これによって、紐が直線に近似する程度を決めることができる。いま、 m は末端の質点と紐全体との重量比であるから、 m が大きいほど直線近似の程度が良好である。紐の全重量が質点にくらべ零とみなし得るならば m

は無限大となり、したがって R_m も無限大となり完全に直線だということができる。

5.3 紐の一端が滑動する振子

普通の振子では一端は固定されているが、この端を紐を回転軸上を滑らせながら、ゆるめたり縮めたりして紐の長さを変化させたら振子の運動はどうなるだろうか。

図3に示すように、ある時期に紐をゆるめて接線方向

図3 紐の一端が滑動する振子

に b の加速度を与えたものとする。端末が完全に固定している場合には紐に作用する接線方向の加速度は求心加速度 $-S\omega^2$ だけであるが、これにさらに b の加速度を与えると全体の加速度 a_1 は次式となる。

$$a_1 = -S\omega^2 + b \quad \dots\dots\dots (21)$$

実際には $b < S\omega^2$ の間は末端Oの紐をゆるめるだけで張力の作用により自然にこの加速度を与えることができる。ここでこのように単に紐をゆるめるだけで得られる場合を取扱い、別に外力を接線方向に加えるような場合は考えないことにする。これがすなわち回転軸で紐をゆるめる場合である。

逆に紐を引き縮めるためには回転軸の方に向い外力を加えるのであるがこの際の b の値については制限を設けない。結局 b は $-\infty$ から $S\omega^2$ までの値を取るものと考えればよい。

(4)式に(21)式の値を代入すると

$$\begin{aligned} T' &= \rho (b - S\omega^2 - a_{r1}) \\ &= \rho (b - S\omega^2 - g \cos \alpha) \end{aligned}$$

積分して

$$T = T_0 + \rho \left\{ S(b - g \cos \alpha) - \frac{1}{2} S^2 \omega^2 \right\}$$

(16) 式を求めた場合と同様にして積分定数 T_0 を求め代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} T &= \rho (g \cos \alpha - b) \left\{ (1+m) S_a - S \right\} \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \omega^2 \left\{ (1+2m) S_a^2 - S^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

この場合 $S=0$ の原点を回転軸にとると、 S も S_a も時間とともに変化するの、 $S=0$ の原点を外端すなわち $S=S_a$ の点に移し逆方向に紐の長さを測りその長さを i で示すこととする。よってこの2つの示し方に

は $S=S_a-i$ という関係がある。

ある時刻の振子の紐の長さを L とすると $L=S_a$ で L は時間とともに変化する値である。 b と $g \cos \alpha$ もまた i と同方向を正とすると符号が変わるから(22)式は次式となる。

$$\begin{aligned} T &= \rho (g \cos \alpha - b) (mL + i) \\ &\quad + \frac{\rho \omega^2}{2} \left\{ 2 mL^2 + i (2L - i) \right\} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

これによると、張力 T の最小なのは $\omega=0$ のときの外端 $i=0$ の点である。よってその値を T_m とすれば、

$$\begin{aligned} T_m &= \rho mL (g \cos \alpha - b) \\ &= Q (g \cos \alpha - b) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

すなわち、直線に近似する程度は b が大きいほど不良で、いいかえればゆるめるときはゆるめる速度が大きいほど直線から遠ざかり、引き縮めるときはその速度が大きいほど直線に近づくことがわかる。

次にこのような場合の $d\omega/dt$ を求めてみよう。紐と質点の合成体の回転軸に対する慣性モーメント I はこの場合には定数でない。 L と同様に時間とともに変化する値である。

外力による偶力が作用しない場合には運動量のモーメント $I\omega$ は一定であるから I が変化すれば ω もまた変化する。

その値は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{外力}=0} &= \frac{dI\omega}{dt I} = I\omega \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{I} \right) \\ &= I\omega \times \left(-\frac{1}{I^2} \right) \frac{dI}{dt} = -\frac{\omega}{I} \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{しかるに } \frac{dL}{dt} = b$$

また (11) 式から

$$I = \frac{1}{3} \rho L^3 + QL^2$$

だから

$$\frac{dI}{dt} = \rho b L^2 + 2QbL = \rho b L^2 (1 + 2m)$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{外力}=0} &= -\omega \times \frac{3bL^2(1+2m)}{L^3(1+3m)} \\ &= -\frac{3b\omega(1+2m)}{L(1+3m)} \end{aligned}$$

外力に起因する $d\omega/dt$ は(14)式で示されるから、これを加えて実際の $d\omega/dt$ を求めると次式となる。

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3(1+2m)}{L(1+3m)} \left\{ \frac{g}{2} \sin \alpha + b\omega \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

この結果によると、振子が上昇しつつあるときにゆるめると回転速度の減少は急激となり α の最大振幅は減少する。逆に、上昇中に引き縮めると最大振幅は増大する。

また、振子が下降中にゆるめると回転速度の増加は鈍り、その程度は ω が大きいときに行われる程効果が大きい。したがって ω が0に近いとき急にゆるめ、つぎに α が0となり ω が大きくなったときに引縮めるならば振幅はしだいに増加する。逆に、 ω の小さいときに引縮め、 ω が大きくなったときにゆるめるならば振幅はすみやかに減衰する。

以上の事実は糸の端に重りをつけた振子で簡単に実験して確かめることができる。ブランコに乗って振る場合に、上りつめたときに足に重みを移して紐たる部分を長くし最大速度付近では手に力を入れて紐たる部分を短くするように動作すると振れがだんだん大きくなり、反対の動作で振れをとめるのもこの性質を応用したものといえることができる。

~~~~~ 良い衣服のための布地の選び方 ~~~~~

テキスト頒布案内

オフセット印刷，B 5 判，78ページ，定価 2,000円（〒200円）

9月20，21日の両日，本学会風合い計量と規格化研究委員会主催により開催された，第2回基礎としてのやさしい衣服材料講習会のテキストを頒布します。

内 容 目 次

(第1部) 布の風合いと服の美しさ，快適さ

風合いと衣服—要点のやさしい解説·····	京都大学	川 端 季 雄
国産の最高の生地と英国製生地の風合いからみた比較·····	元日本毛織	森 岡 益 徳
布の風合いと服の縫製，出来映え·····	大賀クロージング	新 田 勝
スーツの美しさ，快適さと生地·····	三幸衣料	伊 藤 鬼 歳
これからの素材選択の方向を考える·····	メルボ紳士服工業	植 村 正 治
紳士服地の品質に関する一考察·····	ダーバン	斉 藤 景一郎

(第2部) 婦人服地の風合いと服のシルエット，快適さ

婦人服地の風合いと衣服·····	奈良女子大学	丹 羽 雅 子
こし，はり·····	ユニチカ	溝 端 敏 秀
しなやかさ·····	クラレ	山 口 新 司
ふくらみ·····	鐘紡	前 田 宏
しやり，きしみ·····	帝人	和 田 脩
布の冷温感の計測·····	岡山就実短期大学	赤 木 陽 子