織物の曲げ剛さの異方性の理論的研究

信州大学 繊維学部 篠 原 昭 (会員)
 長野女子短期大学 篠 原 房 江
 " 榮 原 恵 子*

A Theoretical Study on the Anisotropy of the Bending Rigidity of Woven Fabrics.

Akira Shinohara*, Fusae Shinohara** and Keiko Sakaebara**

* Faculty of Textile Science and Technology, Shinshu University,
Ueda-shi, Nagano-ken.

** Nagano Women's Junior College, Miwa, Nagano-shi, Nagano-ken.

Abstract

A general method has been formulated to analyse the three-dimensional elastica and has been applied to an analysis of the bending rigidity of woven fabrics in any direction.

The stiffness of a fabric may vary with the direction of bending in different ways, and the stiffness in any direction may be determined by the measurements along warp- and weft-wise direction. An equation has previously been formulated which was derived by neglecting the twisting effects of constituent yarns occurred by the bending of fabrics⁹⁾.

Dealing with this problem as a three-dimensional elastica in this paper, the authors have theoretically derived a more versatile equation (19) in terms of twisting effects of yarns. Assuming that yarns are elastic and homogeneous and no interaction exist among yarns, the twisting effects could be described as a function of the flexural rigidities in principal directions of woven fabrics, and Poisson's ratio of yarns (eq. 25). However, because observed values not always coincide with the theoretical values, the authors have introduced a parameter, n (eq. 27), which relates to V introduced by D. N. E. Cooper as equation 28. (Received January 12, 1978)

摘 要

目 的 織物の曲げ剛さは著しく方向に依存するが、大別して2つの類型のあることが知られている。筆者らはこの2つの類型について別々の式で記述することを提唱した。本研究では従来の式で無視していた糸のねじり効果を考慮した理論式を誘導し、その適用方法について検討することを目的とする。

結 果 織物が純曲げ状態に曲げられたときに構成糸がとる形態がヘリックスであることに注目し、3次元エラスチカの問題としてこれを解析し、従来 Cooper や Chapman, Hearle らによって導かれていたものと同じ形の式を導き、その物理的な意味を明かにすることができた。しかし、この式には4個のパラメータが含まれており、これを適用する上で不便である。これを実用的に便利な形にするため Cooper によって導入されたパラメータ V の物理的な意味を明かにすることができた。

(昭和54年1月12日受理)

1. 緒 言

織物の曲げ剛さが折り曲げる方向に依存した典型的な異方性体であることはすでに多くの報告¹⁾もあり、経験

的にも周知の事実である。このことについて筆者らはすでにいくつかの実験結果ならびにそれを記述する経験式を提出した。しかし、織物を たて、よこ糸とある角をなす軸のまわりに曲げたときに重要な役割を演じる構成糸

* 現勤務先：倉敷紡績株式会社

のねじりの効果について定量的な取扱いをしなかった。一方、D. N. E. Cooper²⁾は たて糸、よこ糸のねじり剛さを考慮した式を提出し、また B. M. Chapman, J. W. S. Hearle³⁾はエネルギー法によってこれを証明している。

筆者は別な角度から Cooper の式と同じ式を理論的に誘導し、Cooper の提示した補正項のもつ力学的内容を明確化するとともに、実用的に便利な取扱い方法について論じてみたいと思う。

2. 従来の研究の概要

織物の曲げ剛さの方向依存性については、すでに1930年 F. T. Peirce⁴⁾によって報告されている。Peirce は直交異方性板のヤング率に関する関係⁵⁾

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} \dots\dots\dots (1)$$

を織物の曲げ剛さに適用した。式(1)で E_1, E_2 は直交方向のヤング率、 E_θ は E_1 の方向と θ をなす方向のヤング率、 G は剛性率、 ν_{12} はポアソン比である。右辺は剪断およびポアソン効果を表わすものであり、織物ではこれに対応する物理量を求めることができない。そのため

$$\frac{1}{G} - \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{2}{\sqrt{E_1 E_2}} \dots\dots\dots (2)$$

と仮定し、式(1)を因数分解できる形にしたが、この理論的根拠は必ずしも明確ではない。等方性体のヤング率と剛性率の関係

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots (3)$$

を用いると式(2)の関係は $2/E_1$ となるから、 E_1 の代りに E_1 と E_2 の幾何平均 $\sqrt{E_1 E_2}$ で置き換えたと考えることができる。曲げ剛さを D_1, D_2, D_θ と書くと、これらはヤング率と断面2次モーメントの積であり、これを幅を単位にとると厚さが一定であるため方向に関係なく一定となる。従って式(1)の弾性率の代りに曲げ剛さを入れても成立することになり、式(1), (2)から

$$\frac{1}{D_\theta} = \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{D_W}} + \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{D_F}} \right)^2 \dots\dots\dots (4)$$

となる。これが Peirce の導いた式にほかならない。 D_W, D_F は たて糸、よこ糸を曲げる方向での曲げ剛さである。これと類似の式として

$$D_\theta = (\sqrt{D_W} \cos^2 \theta + \sqrt{D_F} \sin^2 \theta)^2 \dots\dots\dots (5)$$

も考えられる。図1は式(4)と(5)とを極座標で示したものである。これからわかるように $D_W = D_F$ の場合

図1 Peirce の式による極線図
(1) 式(4) (2) 式(5)

には式(4)も(5)もいずれも等方性になる。また D_W と D_F の差が大きいときにはくびれのある俵形を示す。

ところが実際の織物について測定してみると $D_W = D_F$ のときに等方性を示すものがある反面、 $\theta = \pi/4$ 近くで D_θ が極小を示し、太十字形の極線図を示すものも多いことがわかった。さらに D_W と D_F の差が大きくなっても俵形を示さずバイアス方向に極小点のあるものも多いこともわかった。筆者らはこのようなバイアス方向で極小値を示すものに対する式として

$$D_\theta = D_W \cos^4 \theta + D_F \sin^4 \theta \dots\dots\dots (6)$$

を理論的に誘導した^{6)~9)}。これは式(5)において $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ の項を落とした式に相当する。筆者らはこの式の誘導に当たって糸のねじれ効果を完全に無視した。多くの織物は Peirce の導いた式(4)あるいは式(6)によって近似できることを報告した。

その後 D. N. E. Cooper は たて糸、よこ糸のねじり効果を入れた

$$D_\theta = D_W \cos^4 \theta + D_F \sin^4 \theta + (J_W + J_F) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \dots\dots\dots (7)$$

という式を提唱した。ここで J は糸のねじれの抵抗を示す定数として定義されたものである。この誘導法は筆者らが式(6)の誘導に用いたのと類似のやり方であり、材料力学的には必ずしも厳密ではなかった。

さらに B. M. Chapman と J. W. S. Hearle³⁾ はバイアス方向に曲げた織物の構成糸の変形エネルギーを曲げとねじりによるエネルギーの和として求め、Cooper の式と同じ結果を得ている。

3. 理 論

織物を構成している糸は完全弾性体で、糸相互にはなんらの拘束も摩擦力も働かないものとし、糸のクリンプはないと考え、また糸の断面は円形とし、曲げに対して等方的であると仮定する。このような条件のもとで織物を曲率半径 R の純曲げ状態に曲げた場合を考える。この

図2 織物の純曲げ状態における構成糸の変形

場合 たて糸およびよこ糸はそれぞれ独立に図2のようなヘリックスに変形する。従って糸は曲げとトルクを受けることになるが、おのおのの糸の曲げモーメントおよびトルクの単純なベクトル和の軸方向成分として織物の曲げモーメントを考えることにする。このことから、この現象を3次元エラスチカの問題として解析することができる。3次元エラスチカはいわゆるキルヒホッフのアナログとして知られるように、剛体の空間運動と相似である¹⁰⁾。

図3のように空間に固定された直角座標軸 x, y, z

図3 座標軸のとり方

および空間曲線に沿って変化する直角座標軸を x', y', z' とし、それぞれの座標軸間の方向余弦を表1のよう

表1 方向余弦の関係

	x'	y'	z'
x	λ_1	λ_2	λ_3
y	μ_1	μ_2	μ_3
z	ν_1	ν_2	ν_3

にする。しかるとき、この方向余弦はオイラ角 θ, ϕ, ψ を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \\ \lambda_2 &= -\cos \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \psi \cos \phi \\ \lambda_3 &= \sin \theta \cos \phi \\ \mu_1 &= \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ \mu_2 &= -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ \mu_3 &= \sin \theta \sin \psi \\ \nu_1 &= -\cos \phi \sin \theta \\ \nu_2 &= \sin \phi \sin \theta \\ \nu_3 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

いま曲線の主曲率を κ_1, κ_2 , ねじり率を κ_3 とする。またそれに対応する糸の曲げ剛さおよびねじり剛さを D_1, D_2, D_3 とする。曲線に沿ってはかった長さを s とすると剛体の空間運動に関するオイラの方程式に対応して次の関係が得られる。

$$D_i \frac{d\kappa_i}{ds} = \kappa_j \kappa_k (D_j - D_k) \dots (9)$$

この式で i, j, k はそれぞれ 1, 2, 3 をとる。また曲率は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{d\theta}{ds} \sin \phi - \frac{d\psi}{ds} \sin \theta \cos \phi \\ \kappa_2 &= \frac{d\theta}{ds} \cos \phi + \frac{d\psi}{ds} \sin \theta \sin \phi \\ \kappa_3 &= \frac{d\phi}{ds} \cos \theta + \frac{d\psi}{ds} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

式(9)の各式に $D_i \kappa_i$ を乗じて和をとると

$$\sum D_i^2 \kappa_i \frac{d\kappa_i}{ds} = \sum D_i \kappa_i \kappa_j \kappa_k (D_j - D_k) = 0 \dots (11)$$

となる。これを積分すると

$$\sum D_i^2 \kappa_i^2 = \text{const.} = M^2 \dots (12)$$

M は曲げモーメントのベクトルである。これの x, y, z 成分を M_1, M_2, M_3 とすると

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \sum D_i \kappa_i \lambda_i \\ M_2 &= \sum D_i \kappa_i \mu_i \\ M_3 &= \sum D_i \kappa_i \nu_i \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

となる。

ヘリックスの場合を考える。図4のように半径 R の基準円筒の軸方向に z 軸をとる。また z' 軸をヘリックス接線方向にとり、ヘリックスの接触平面を含む方向にとった法線方向に y' 軸を、それに直角に x' 軸をとる。ヘリックス上の点 (x', y', z') における曲率の成分を κ_1, κ_2 , ねじり率を κ_3 とする。 x', y' 軸はヘリックス軸に垂直な面内にあるから、 $\phi = \pi/2$ であり、また θ は一定であるから $d\theta/ds = 0$, さらに $R\phi = s \sin \theta$ の関係があるから $d\phi/ds = \sin \theta / R$ となる。従って式(10)から

図4 任意方向へ繊維を曲げたときの糸の形態

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= 0 \\ \kappa_2 &= \frac{\sin^2 \theta}{R} \\ \kappa_3 &= \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となる。これを式(13)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\sin^2 \theta \cos \theta \cos \phi}{R} (D_3 - D_2) \\ M_2 &= \frac{\sin^2 \theta \cos \theta \sin \phi}{R} (D_3 - D_2) \\ M_3 &= \frac{\sin \theta}{R} (D_2 \sin^2 \theta + D_3 \cos^2 \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。式(15)の第1, 2式からヘリックスに生ずるベクトル T は

$$T = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \equiv PR \dots\dots\dots (16)$$

となる。この関係は図4に示したとおりである。すなわち z 軸方向に働く軸力 P によるねじりモーメントに等価である。第3式は z 軸まわりに曲げた曲げモーメントを表わしている。

すなわち、繊維を たて糸と角 θ をなす方向と一致した円筒軸を有する円筒状に曲げたとき、その軸の方向が z 軸であり、たて糸の接線方向が z' 軸である。従って角 θ が図3に示したオイラ角 θ になる。繊維はこのようなヘリックス状の たて糸、よこ糸2組の糸群からなっている。仮定により、たて糸とよこ糸との交錯点においてなんらの拘束も抵抗も存在しないことから、繊維を円筒状に曲げるときの曲げモーメントの総和は式(15)の第3式で求めた糸1本の曲げ剛さの単純和として計算することができる。

クリンプがないと仮定したときの たて糸、よこ糸1

本の曲げ剛さを D_{tw} , D_{tf} , ねじり剛さを C_{tw} , C_{tf} とする。クリンプを考慮するとすれば、見掛けの曲げ剛さをとればよいわけで、煩雑になるだけなので、ここでは円形断面の単純エラスチカと考える。たて、よこ糸の密度を n_w , n_f とする。いうまでもなく繊維の単位幅あたりの曲げ剛さを D_w , D_f とすると

$$\left. \begin{aligned} D_w &= n_w D_{tw} \\ D_f &= n_f D_{tf} \\ C_w &= n_w C_{tw} \\ C_f &= n_f C_{tf} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。式(15)の第3式から、たて糸、よこ糸1本についての曲げモーメントの成分は

$$\left. \begin{aligned} RM_{tw} &= (D_{tw} \sin^2 \theta + C_{tw} \cos^2 \theta) \sin \theta \\ RM_{tf} &= (D_{tf} \cos^2 \theta + C_{tf} \sin^2 \theta) \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

従って繊維単位幅当りになおしたときの曲げモーメントを M_θ とすると、

$$\begin{aligned} (M_\theta R) &\equiv D_\theta = D_f \cos^4 \theta + D_w \sin^4 \theta \\ &\quad + (C_w + C_f) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。これは Cooper の求めた結果と同等である。

いま糸のヤング率を E , 剛性率を G , ポアソン比を ν , 円形断面の糸の直径に関する断面二次モーメントを I , 極断面二次モーメントを I_p とすると

$$D_t = EI \dots\dots\dots (20)$$

$$C_t = GI_p = 2GI \dots\dots\dots (21)$$

の関係がある。式(3)および(17)の関係を用いると

$$C_w = \frac{D_w}{1 + \nu_w}, \quad C_f = \frac{D_f}{1 + \nu_f} \dots\dots\dots (22)$$

$$\therefore C_w + C_f = \frac{D_w(1 + \nu_f) + D_f(1 + \nu_w)}{(1 + \nu_f)(1 + \nu_w)} \dots\dots\dots (23)$$

となる。仮に $\nu_w \div \nu_f$ とし、 ν と書くと

$$C_w + C_f \div \frac{D_w + D_f}{1 + \nu} = V(D_w + D_f) \dots\dots\dots (24)$$

となる。ここに

$$V = \frac{C_w + C_f}{D_w + D_f} \div \frac{1}{1 + \nu} \dots\dots\dots (25)$$

は Cooper の定義した量であり、これがポアソン比によって決まる量であることがわかった。式(25)は C_w と C_f の算術平均が たて糸、よこ糸方向の曲げ剛さの算術平均の V 倍すなわち $1/(1 + \nu)$ 倍であることを意味している。理想弾性体では $0 \leq \nu \leq 0.5$ の範囲にあるため、 V の範囲は $0.66 \leq V \leq 1$ になるはずである。

一方、式(19)が因数分解できるためには

$$C_w + C_f = 2\sqrt{D_w D_f} \dots\dots\dots (26)$$

でなければならない。すなわち、たて、よこ方向のねじり剛さ C_w , C_f の算術平均が たて、よこ方向の曲げ

剛さの幾何平均に等しいときには、式(19)は因数分解でき式(5)の形になる。これは図1でもわかるように、Peirce の式(4)と同じタイプの極線図になる。従って式(19)の代りに一般的に

$$D\theta = D_W \cos^4\theta + D_F \sin^4\theta + 2n\sqrt{D_1 D_2} \sin^2\theta \cos^2\theta \quad \dots\dots\dots (27)$$

と書くこともできる。ここで n と V との関係は

$$V = \frac{2\sqrt{D_1 D_2}}{D_1 + D_2} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となり、結局 V/n は D_1 と D_2 の算術平均と幾何平均との比になる。このことから V の代りに n を用いた方が便利な場合もある。この式の V あるいは n を含んだ右辺第3項が、筆者らが前に提出した式の補正項である。図5は式(27)を示す一例である。

図5 式(27)による極線図
(1) $D_F/D_W = 1$ (2) $D_F/D_W = 0.5$

4. 考 察

この理論における第三項は D_W , D_F および糸のポアソン比 ν の値によってほぼ決まってしまうことがわかったが、実際の織物についてみると、 D_W と D_F の大きさが同じ織物に対しても、式(27)で $n=1$ の Peirce 型のものから筆者らの求めた $n=0$ に対応するものまであり、理想弾性体でかつ糸相互の拘束等を完全に無視した式(19)によってすべてを記述することは不可能であることがわかった。さらに $D_W + D_F$ が等しいものでは $C_W + C_F$ もすべて等しくなるという式(24)の結果も実際には必ずしもそうならないことが実験的にわかっている。この原因がどこにあるのかを考えてみる。

式(19)を導くに当っては糸1本の曲げ、ねじり変形に注目し、これが集合した織物に適用するときに単なる重ね合せを行った。しかし織物の たて、よこ方向の曲げ剛さである D_W , D_F は糸1本について求めた曲げ剛さの単純な糸密度倍にはならない。たて糸とよこ糸との交錯状態やクリンプ効果を考慮すると、この値は糸1本の曲げ剛さから期待される値よりも一般に大きくなること

が知られている。従って、糸の曲げ剛さとしては たて糸方向あるいはよこ糸方向の織物の曲げ剛さから求めた糸1本当りの見掛けの曲げ剛さを考えるべきである。測定しやすい たて糸方向やよこ糸方向の曲げ剛さをパラメータとして、測定しにくいバイアス方向の曲げ剛さを推定しようという立場では、この見掛けの曲げ剛さを考えた方が便利である。しかし実際の織物の内部における糸のねじり効果の物理的内容は曲げの場合以上に明確でなく、その点が理論との背違の原因となっているものとおもわれる。

理想弾性体においては伸長によって密度が減少し、体積が増加する。またゴムのように体積が変化しない場合にはポアソン比が0.5となることは周知のとおりである。しかしフィラメント糸でも紡績糸でも伸長によって見掛け上体積が減少することは十分可能なことであり、従ってポアソン比の値が0.5以上になることもありうるはずである。ところが現実には Cooper も指摘しているように V が0.1というような小さな値になる場合があることからみても、このようなポアソン効果のみでこれを説明するのは無理である。

すでに報告したように、一般にタイトなものでは V あるいは n が大きく、スリージなものでは n が小さく0

図6 理論値と実測値
 D_1, D_2 は式(6), (4) D_W, D_F の値は相対値

に近い傾向があることから、この V や n が たて糸、よこ糸の相互作用の程度を示す量であると考えた方が妥当だとも思う。しかし例外も多く、一概に決められないことも事実である。

それゆえ、この式を実用的に利用するためにはバイアス方向、たとえば $\theta = \pi/4$ 方向の測定値が必要になる。バイアス方向にカットした試料について片持梁法、クラーク法あるいはハート ループ法など JIS 規格の方法で曲げ剛さを測定することは技術的にむずかしく、しかも測定値がかなりばらつくことは避けられない。そのため筆者らが報告した Peirce の円形片持梁法を利用した測定装置¹¹⁾を用いるのが便利である。図6はそうようにして測定した一例である。

5. 結 言

織物の たて方向、よこ方向の曲げ剛さの大きさを知って、それと任意な角度をなす方向の曲げ剛さを求めようというのが筆者の年来の目的であるが、バイアス方向の曲げのメカニズムには糸のねじり効果に関係するために、たて糸、よこ糸方向の値だけをパラメータとしてこれを記述することは理論的に不可能である。本報ではこのような糸のねじれ効果を考慮した式を理論的に導いたが、結果的には Cooper の提出した式を証明したこ

とになった。さらにこのねじり項のもつ物理的意味を明らかにし、実際の織物の測定値との背違が奈辺にあるかを論じた。この背違の原因は織物の構造によるものであるが、この背違を示す因子として n を導入し、これが織物特性を示す一つの因子であることを示した。この n と Cooper の導入した因子 V との間には簡単な関係があるが、この n と織物構造との具体的な関係については明かにすることができなかった。従来行った 1,000 種以上の織物についてのデータについて分析すると共に、新しく試織した試料について実験を進めているので、いずれなんらかの結論が出るものと期待している。

参考文献

- 1) 篠原 昭；繊維工学，**19**，P807 (1966)
- 2) D. N. E. Cooper；J. Text. Inst.，**50**，T472 (1959)，**51**，T317 (1960)
- 3) B. M. Chapman and J. W. S. Hearle；ibid.，**63**，385 (1972)
- 4) F. T. Peirce；ibid.，**21**，T377 (1930)
- 5) 例えば A. E. H. Love；“A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”，(4th ed.) p. 161 (1952)
- 6) 呉 祐吉，篠原 昭，松橋房江；織学誌，**14**，170 (1958)
- 7) 篠原 昭，呉 祐吉；織機誌，**14**，507 (1961)
- 8) A. Shinohara and Y. Go；J. Text. Mach. Soc. Japan，**8**，33 (1962)
- 9) 繊維学会編；繊維便覧原料編，pp. 319—320，丸善 (1968)
- 10) R. Frisch-Fay；“Flexible Bar”，Batterworth (1962)
- 11) 呉 祐吉，篠原 昭；織学誌，**14**，860 (1958)