粘弾性体に対する最小原理とその複合材料への応用

大阪大学 工学部 中 村 喜 代 次 (会員)

” 堀 川 明 (”)

Minimum Principles in the Linear Theory of Viscoelasticity and Its Application to Composite Materials.

Kiyoji Nakamura and Akira Horikawa,

Department of Mechanical Engineering, Osaka University, Suita, Osaka.

Abstract

The variational and minimum principles have been derived by using the Carson transform for the linear quasi-static viscoelastic solids. The minimum principles have been applicable to the inhomogeneous and anisotropic solids requiring no restriction conditions to separate the spatial and temporal variables. Moreover, the upper and lower bounds of relaxation and creep tensors have been determined by applying the minimum principles and Carson transform to the viscoelastic multiphase materials.

(Received December 4, 1979)

摘 要

線形粘弾性固体に対し、カールソン変換を用いて、変分原理と最小原理を導いた。最小原理は空間変数と時間変数の分離という制限条件を必要とせず、また不均質異方性材料に対して成立する。さらに、最小原理とカールソン変換の方法を、粘弾性複合材料に適用し、緩和関数およびクリープ関数の上限と下限を明らかにした。

(昭和54年12月4日受理)

1. まえがき

線形粘弾性体に対する変分原理、最小原理は、弾性体に比べると、まだ不十分である。Gurtin¹⁾ は、線形粘弾性体に対する変分原理を合成積の概念を用いて最も一般的な形で表現している。さらに、Leitman²⁾ とReddy³⁾ は Gurtin の仕事を基に、慣性項の効果を考慮している。ところが、線形粘弾性体に対する最小原理に関しては、Christensen^{4,5)} の報告があるが、これは空間変数と時間変数が分離できる場合に限られている。

本論文では、まず Mandel^{6,7)} によって提案されているカールソン変換を導入する。この方法は、線形粘弾性体に対し弾性体との対比が容易で計算を進めるのに都合がよい。つぎに、カールソン変換を用いて変分原理を導く。この結果は、Gurtin によって求められたものと同じであるが、Gurtin は最小原理には至っていない。そ

こで、さらにこの結果を発展させて、線形粘弾性体に対する最小原理を導く。これは、Christensen の最小原理のように空間変数と時間変数を分離するという制約条件を必要とせず、より一般的な場合に対して成立する。最後に、この原理とカールソン変換の方法を粘弾性複合材料に応用し、緩和関数、クリープ関数の上限、下限、さらに粘弾性複合材料の体積弾性係数、せん断弾性係数、ヤング率、ポワソン比の間の関係およびその上限、下限などを求める。

2. 線形粘弾性力学とカールソン変換

B で 3 次元ユークリッド空間の有界な閉領域を、 ∂B で B の境界を表わす。また、 $\mathbf{n}$ で境界 ∂B における外向きの単位法線ベクトルを表わし、さらに ∂B を ∂B_u と ∂B_σ に分割する。

$$\partial B_u \cup \partial B_\sigma = \partial B, \quad \partial B_u \cap \partial B_\sigma = \emptyset$$

$Q(\mathbf{x}, t)$ と $f(\mathbf{x}, t)$ を $B \times [0, \infty)$ で定義された関数とすると、スティエルチェスの合成積は

$$q(\mathbf{x}, t) = \int_0^t f(\mathbf{x}, t-\tau) dQ(\mathbf{x}, \tau) \dots\dots\dots (1)$$

と書ける. 同様に, $g(\mathbf{x}, t)$ を $B \times [0, \infty)$ で定義された関数とすると, カールソン変換は $p > 0$ に対して, つぎのように書ける.

$$g^*(\mathbf{x}, p) = p \int_0^\infty e^{-pt} g(\mathbf{x}, t) dt \dots\dots\dots (2)$$

いま, この変換をスティエルチェスの合成積(1)に適用すると,

$$g^*(\mathbf{x}, p) = f^*(\mathbf{x}, p) Q^*(\mathbf{x}, p) \dots\dots\dots (3)$$

となる.

準静的な(不均質で異方性のある)線形粘弾性固体の力学的な挙動を支配する式は, 平衡方程式, ひずみと変位の関係, 応力とひずみの関係である. u_i , ε_{ij} , σ_{ij} , F_i , r_{ijk} , f_{ijk} をそれぞれ変位ベクトル $\mathbf{u}$, ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$, 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$, 物体力 $\mathbf{F}$, 緩和テンソル $\mathbf{r}$, クリープテンソル $\mathbf{f}$ のカーチアン成分とすると, これらは $B \times [0, \infty)$ で位置と時間の関数である. 平衡方程式はカールソン変換をすると, $B \times (0, \infty)$ において,

$$\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + F_i^*(\mathbf{x}, p) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \sigma_{ji}^*(\mathbf{x}, p)$$

ひずみと変位の関係は

$$\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}, p) \} \dots\dots (5)$$

となる.

線形粘弾性体の応力とひずみの関係は, 緩和関数を用いると,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= r_{ijk}(\mathbf{x}, t) \varepsilon_{km}(\mathbf{x}, 0) \\ &+ \int_0^t r_{ijk}(\mathbf{x}, t-u) d\varepsilon_{km}(\mathbf{x}, u) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t r_{ijk}(\mathbf{x}, t-u) \varepsilon_{km}(\mathbf{x}, u) du \right\} \dots\dots (6) \end{aligned}$$

となり, クリープ関数を用いると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) &= f_{ijk}(\mathbf{x}, t) \sigma_{km}(\mathbf{x}, 0) \\ &+ \int_0^t f_{ijk}(\mathbf{x}, t-u) d\sigma_{km}(\mathbf{x}, u) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t f_{ijk}(\mathbf{x}, t-u) \sigma_{km}(\mathbf{x}, u) du \right\} \dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる. これらの式にカールソン変換を適用すると,

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = r_{ijk}^*(\mathbf{x}, p) \varepsilon_{km}^*(\mathbf{x}, p) \dots\dots\dots (8)$$

$$\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = f_{ijk}^*(\mathbf{x}, p) \sigma_{km}^*(\mathbf{x}, p) \dots\dots\dots (9)$$

と書ける.

特別な場合として, 等方性を考え, さらに表記を簡単にするため $\sigma^*(\mathbf{x}, p)$ を σ^* と書くと,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= \lambda^* \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \varepsilon_{ij} \\ &= K^* \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \left\{ \varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} \dots\dots (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{9K^*} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu^*} \left\{ \sigma_{ij}^* - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right\} \\ &\dots\dots\dots (10b) \end{aligned}$$

ここで, $K^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*$ で体積弾性係数に相当する. δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $i=j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 である. ヤング率, ポワソン比に相当する係数を E^* , ν^* とおくと,

$$\frac{3}{E^*} = \frac{1}{\mu^*} + \frac{1}{3K^*} \dots\dots\dots (11a)$$

$$\nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{2(3K^* + \mu^*)} \dots\dots\dots (11b)$$

$$E^* = 2\mu^*(1 + \nu^*) = 3K^*(1 - 2\nu^*) \dots\dots\dots (11c)$$

となる.

3. 最小原理

線形粘弾性体の力学挙動は(4), (5), (8)または(9)式と境界条件によって表わされる. (8), (9)式における r_{ijk}^* と f_{ijk}^* に対しては, 対称性の条件が成立する.

$$r_{ijk}^* = r_{jik}^* = r_{ikj}^* = r_{kji}^* \dots\dots\dots (12a)$$

$$f_{ijk}^* = f_{jik}^* = f_{ikj}^* = f_{kji}^* \dots\dots\dots (12b)$$

さらに, 熱力学的な考察⁷⁾から,

$$r_{ijk}^* \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{km}^* \geq 0 \dots\dots\dots (13a)$$

$$f_{ijk}^* \sigma_{ij}^* \sigma_{km}^* \geq 0 \dots\dots\dots (13b)$$

が成立する.

境界条件は ∂B_u 上で,

$$u_i^* = \hat{u}_i^* \dots\dots\dots (14)$$

∂B_σ 上で,

$$\sigma_i^* = \hat{\sigma}_i^* \dots\dots\dots (15)$$

とする. ここで σ_i は $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$ である. さらに, $t < 0$ では $u_i = \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} = 0$ と仮定する.

まず, 緩和関数を用いた場合として, つぎの汎関数,

$$\begin{aligned} J^* &= \int_B \left\{ \frac{1}{2} r_{ijk}^* \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{km}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - (\sigma_{ij,j}^* \right. \\ &\quad \left. + F_i^*) u_i^* \right\} dv + \int_{\partial B_u} \sigma_i^* \hat{u}_i^* ds + \int_{\partial B_\sigma} (\sigma_i^* - \hat{\sigma}_i^*) \\ &\quad u_i^* ds \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

を考える. この第1変分 δJ^* は,

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \int_B (r_{ijk}^* \varepsilon_{km}^* - \sigma_{ij}^*) \delta \varepsilon_{ij}^* dv - \int_B (\sigma_{ij,j}^* \\ &\quad + F_i^*) \delta u_i^* dv - \int_B \left\{ \varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \right\} \end{aligned}$$

$$\delta\sigma_{ij}^* dv - \int_{\partial B_u} (u_i^* - \hat{u}_i^*) \delta\sigma_i^* ds \\ + \int_{\partial B_\sigma} (\sigma_i^* - \hat{\sigma}_i^*) \delta u_i^* ds \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。従って、 $\delta J^* = 0$ であれば、 δu_i^* 、 $\delta \varepsilon_{ij}^*$ 、 $\delta \sigma_{ij}^*$ は任意であるから、(4)、(5)、(8)式および境界条件(14)、(15)式が満足される。逆に、(4)、(5)、(8)、(14)、(15)式が成立すれば、 $\delta J^* = 0$ となる。ゆえに、汎関数 J^* に対して、変分原理が成立する。

つぎに、平衡状態において、この汎関数が最小となることを示す。平衡状態での変位を u_i とし、

$$u_i' = u_i + \delta u_i \dots\dots\dots (18)$$

と置く。ただし、 δu_i は変位が与えられている境界 ∂B_u では 0 である。(18)式をカールソン変換し、(16)式に代入すると、

$$J^{*'} - J^* = \int_B \left\{ (r_{ijk}^* \varepsilon_{km}^* - \sigma_{ij}^*) \delta \varepsilon_{ij}^* - (\sigma_{ij,j}^* + F_i^*) \delta u_i^* + \frac{1}{2} r_{ijk}^* \delta \varepsilon_{ij}^* \delta \varepsilon_{km}^* \right\} dv \\ + \int_{\partial B_\sigma} (\sigma_i^* - \hat{\sigma}_i^*) \delta u_i^* ds$$

さらに、(4)、(8)、(12a)、(15)式を用いると、

$$J^{*'} - J^* = \int_B \frac{1}{2} r_{ijk}^* \delta \varepsilon_{ij}^* \delta \varepsilon_{km}^* dv \dots\dots\dots (19)$$

を得る。従って、(13a)式から

$$J^{*'} - J^* \geq 0 \dots\dots\dots (20)$$

となり、平衡状態で汎関数 J^* は最小値をとることがわかる。

つぎに、クリープ関数を用いた場合として、汎関数

$$L^* = \int_B \left\{ \frac{1}{2} f_{ijk}^* \sigma_{ij}^* \sigma_{km}^* - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + F_i^* u_i^* \right\} dv + \int_{\partial B_u} \sigma_i^* (u_i^* - \hat{u}_i^*) ds \\ + \int_{\partial B_\sigma} \hat{\sigma}_i^* u_i^* ds \dots\dots\dots (21)$$

を考える。この第1変数 δL^* は、

$$\delta L^* = \int_B \left\{ f_{ijk}^* \sigma_{km}^* - \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \right\} \delta \sigma_{ij}^* dv + \int_B (\sigma_{ij,j}^* + F_i^*) \delta u_i^* dv \\ + \int_{\partial B_u} (u_i^* - \hat{u}_i^*) \delta \sigma_i^* ds + \int_{\partial B_\sigma} (\hat{\sigma}_i^* - \sigma_i^*) \delta u_i^* ds \dots\dots\dots (22)$$

で与えられる。 $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$ のもとで(4)、(9)(14)、(15)式が満足されれば、 $\delta L^* = 0$ となる。また、逆に $\delta L^* = 0$ であれば、 δu_i^* 、 $\delta \varepsilon_{ij}^*$ 、 $\delta \sigma_{ij}^*$ は任意であ

るから、 $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$ が成立つ。従って、汎関数 L^* に対して変分原理が成立つ。

さらに、平衡状態において、この汎関数が最小となることを示す。いま、物体 B は物体力 F_i と境界 $\partial B_\sigma \times [0, \infty)$ で表面力 $\hat{\sigma}_i$ が働いて平衡状態にあると考える。境界 $\partial B_u \times [0, \infty)$ では、変位 u_i は既知とする。さらに、つぎの σ_{ij}' を考える。

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij} \dots\dots\dots (23)$$

ただし、

$$(1) \quad B \times [0, \infty) \quad \text{で}$$

$$\sigma_{ij,j}' + F_i = 0$$

$$(2) \quad \partial B_\sigma \times [0, \infty) \quad \text{で}$$

$$\sigma_{ij}' n_j = \hat{\sigma}_i$$

$$(3) \quad \partial B_u \times [0, \infty) \quad \text{で } \sigma_{ij}' \text{ は任意}$$

(23)式をカールソン変換し、(21)式に代入すると、

$$L^{*'} - L^* = \int_B \left\{ f_{ijk}^* \sigma_{km}^* - \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \delta \sigma_{ij}^* + \frac{1}{2} f_{ijk}^* \delta \sigma_{ij}^* \delta \sigma_{km}^* \right\} dv \\ + \int_{\partial B_u} (u_i^* - \hat{u}_i^*) \delta \sigma_i^* ds$$

さらに、(9)、(5)、(12)、(14)式を用いると、

$$L^{*'} - L^* = \int_B \frac{1}{2} f_{ijk}^* \delta \sigma_{ij}^* \delta \sigma_{km}^* dv \dots\dots\dots (24)$$

を得る。従って、(13b)式から

$$L^{*'} - L^* \geq 0 \dots\dots\dots (25)$$

となり、平衡状態で汎関数 L^* は最小値をとることがわかる。

4. 粘弾性複合材料への応用

複合材料は、微視的には非等質であり、複雑な応力あるいはひずみ分布を示す。しかし、ここでは複合材料が等質とみなせる程度に巨視的な立場をとる。したがって、応力やひずみなどは平均的な量、すなわち応力またはひずみなどの量を積分し、それを考えている領域の体積で割ったものを用いる。これを $\bar{\sigma}_{ij}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ などと表わす。

2つの成分から成る複合材料を考え、各成分に関係する量を添字 (1)、(2) によって区別する。巨視的な立場からみた複合材料としての量には (1)、(2) などの添字をつけないで表わす。複合材料の中に含まれる成分 1 および 2 の体積比を $v^{(1)}$ 、 $v^{(2)}$ と書き、 $v^{(1)} + v^{(2)} = 1$ とする。任意の領域内で、

$$\bar{\sigma}_{ij} = v^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + v^{(2)} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \dots\dots\dots (26a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = v^{(1)} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + v^{(2)} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(2)} \dots\dots\dots (26b)$$

が成立つと考える。各成分の応力とひずみの関係を、

$$\bar{\sigma}_{ij}^{*(1)} = r_{ijk}^{*(1)} \bar{\epsilon}_{km}^{*(1)}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{*(2)} = r_{ijk}^{*(2)} \bar{\epsilon}_{km}^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

または,

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{*(1)} = f_{ijk}^{*(1)} \bar{\sigma}_{km}^{*(1)}, \quad \bar{\epsilon}_{ij}^{*(2)} = f_{ijk}^{*(2)} \bar{\sigma}_{km}^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

で表わすと, (26式)は,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^* &= v^{(1)} r_{ijk}^{*(1)} \bar{\epsilon}_{km}^{*(1)} + v^{(2)} r_{ijk}^{*(2)} \bar{\epsilon}_{km}^{*(2)}, \\ \bar{\epsilon}_{ij}^* &= v^{(1)} f_{ijk}^{*(1)} \bar{\sigma}_{km}^{*(1)} + v^{(2)} f_{ijk}^{*(2)} \bar{\sigma}_{km}^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる.

つぎに, 複合材料としての ひずみと各成分の ひずみとの関係を,

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{*(1)} = A_{ijk}^{*(1)} \bar{\epsilon}_{km}^*, \quad \bar{\epsilon}_{ij}^{*(2)} = A_{ijk}^{*(2)} \bar{\epsilon}_{km}^* \quad \dots (30)$$

と置く. (26b)式から,

$$v^{(1)} A_{ijk}^{*(1)} + v^{(2)} A_{ijk}^{*(2)} = \delta_{ik} \delta_{jm} \quad \dots\dots\dots (31)$$

で, 一般に $A_{ijk}^{*(1)}$, $A_{ijk}^{*(2)}$ は非対称である. 複合材料の応力と ひずみの関係を,

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = r_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{km}^* \quad \dots\dots\dots (32)$$

とする. (29), (30)式から,

$$\begin{aligned} r_{ijk}^* &= v^{(1)} r_{ijpq}^{*(1)} A_{pqk}^{*(1)} + v^{(2)} r_{ijpq}^{*(2)} A_{pqk}^{*(2)} \\ &\quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となり, 複合材料の緩和関数を得られる. 同様に,

$$\bar{\sigma}_{ij}^{*(1)} = B_{ijk}^{*(1)} \bar{\sigma}_{km}^*, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{*(2)} = B_{ijk}^{*(2)} \bar{\sigma}_{km}^* \quad \dots (34)$$

とおくと, (26a)式から,

$$v^{(1)} B_{ijk}^{*(1)} + v^{(2)} B_{ijk}^{*(2)} = \delta_{ik} \delta_{jm} \quad \dots\dots\dots (35)$$

を得て, 複合材料のクリープ関数は,

$$\begin{aligned} f_{ijk}^* &= v^{(1)} f_{ijpq}^{*(1)} B_{pqk}^{*(1)} + v^{(2)} f_{ijpq}^{*(2)} B_{pqk}^{*(2)} \\ &\quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

となる.

いま, 特別な場合として, 複合材料内で各成分のひずみの間に,

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(1)} = \bar{\epsilon}_{ij}^{(2)} \quad \dots\dots\dots (37)$$

が成立つと考えると, (33)式は(30)式から

$$r_{ijk}^{*(V)} = v^{(1)} r_{ijk}^{*(1)} + v^{(2)} r_{ijk}^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで, (38)式はフォークトモデルを表わしているので, 添字 (V) をつけた.

逆に, 複合材料内で各成分の応力の間に

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad \dots\dots\dots (39)$$

が成立つと考えると, (36)式は(34)式から,

$$f_{ijk}^{*(R)} = v^{(1)} f_{ijk}^{*(1)} + v^{(2)} f_{ijk}^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここで, (40)式はロイスモデルを表わしているので, 添字 (R) をつけた.

一方, (8), (9)式から,

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} r_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^* \\ &= \frac{1}{2} f_{ijk}^* \bar{\sigma}_{ij}^* \bar{\sigma}_{km}^* \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

を得る. 前節で述べた最小原理から, 複合材料としての $r_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^*$ の値は, いかなる $\bar{\epsilon}_{ij}^*$ に対しても同じ境界条件のもとでは, $(v^{(1)} r_{ijk}^{*(1)} \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^* + v^{(2)} r_{ijk}^{*(2)} \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^*)$ なる仮定の値を越えることはない.

$$r_{ijk}^* \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^* \leq r_{ijk}^{*(V)} \bar{\epsilon}_{ij}^* \bar{\epsilon}_{km}^* \quad \dots\dots\dots (42)$$

すなわち, $(v^{(1)} r_{ijk}^{*(1)} + v^{(2)} r_{ijk}^{*(2)} - r_{ijk}^*)$ は半正値の行列である. 従って, この行列を対角行列に変換して考えれば, 容易に複合材料の緩和関数の上限がフォークトモデルで与えられることがわかる.

同様にして,

$$f_{ijk}^* \bar{\sigma}_{ij}^* \bar{\sigma}_{km}^* \leq f_{ijk}^{*(R)} \bar{\sigma}_{ij}^* \bar{\sigma}_{km}^* \quad \dots\dots\dots (43)$$

となるから, 複合材料のクリープ関数の上限はロイスモデルで与えられることを示している.

つぎに, 複合材料の各成分が等方体の場合を考えると, (10)式からフォークトモデルに対して,

$$\begin{aligned} K^{*(V)} &= v^{(1)} K^{*(1)} + v^{(2)} K^{*(2)}, \\ \mu^{*(V)} &= v^{(1)} \mu^{*(1)} + v^{(2)} \mu^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

を得る. また, ヤング率は(11)式から,

$$\frac{3}{E^{*(V)}} = \frac{1}{\mu^{*(V)}} + \frac{1}{3K^{*(V)}}$$

であるから,

$$E^{*(V)} \leq v^{(1)} E^{*(1)} + v^{(2)} E^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (45)$$

である. ただし, ポアソン比 $\nu^{*(1)}$ と $\nu^{*(2)}$ が等しければ,

$$E^{*(V)} = v^{(1)} E^{*(1)} + v^{(2)} E^{*(2)} \quad \dots\dots\dots (46)$$

が成立する.

また, (10b)式から, ロイスモデルに対して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^{*(R)}} &= \frac{v^{(1)}}{K^{*(1)}} + \frac{v^{(2)}}{K^{*(2)}}, \\ \frac{1}{\mu^{*(R)}} &= \frac{v^{(1)}}{\mu^{*(1)}} + \frac{v^{(2)}}{\mu^{*(2)}} \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

が得られ, ヤング率 $E^{*(R)}$ は,

$$\frac{1}{E^{*(R)}} = \frac{v^{(1)}}{E^{*(1)}} + \frac{v^{(2)}}{E^{*(2)}} \quad \dots\dots\dots (48)$$

となる.

つぎに, 単純引張りと単純せん断を考えると, (42)式から,

$$K^* \leq K^{*(V)}, \quad \mu \leq \mu^{*(V)} \quad \dots\dots\dots (49)$$

を得る. 同様に, (43)式から,

$$K^{*(R)} \leq K^*, \quad \mu^{*(R)} \leq \mu^* \quad \dots\dots\dots (50)$$

を得る. このことから, 各成分が等方体のとき, 粘弾性複合材料の体積弾性係数とせん断弾性係数の上限と下限は, それぞれフォークトおよびロイスモデルによって与えられることがわかる.

さらに, ヤング率に対しても(11a), (49), (50)式から,

$$E^{*(R)} \leq E^* \leq E^{*(V)} \dots\dots\dots (51)$$

が成立する。

最後に、カールソン変換の計算例として、 K および μ が三要素固体モデルの場合の E を求めてみる (他の線形モデルの場合でも、さらに他の材料係数を求める場合でも、まったく同じように計算できる)。

$$K = b_1(1 - e^{-\frac{t}{a_1}}) + \frac{c_1}{a_1} e^{-\frac{t}{a_1}}$$

$$\mu = b_2(1 - e^{-\frac{t}{a_2}}) + \frac{c_1}{a_2} e^{-\frac{t}{a_2}}$$

とおくと、

$$\frac{1}{p+a} \subset \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), \quad \frac{p}{p+a} \subset e^{-at}$$

から、

$$K^* = \frac{c_1 p + b_1}{a_1 p + 1}, \quad \mu^* = \frac{c_2 p + b_2}{a_2 p + 1}$$

を得る。これを(11a)式に代入すると、

$$E^* = n_1 + \frac{n_2 p}{(p+m_1)(p+m_2)} + \frac{n_3}{(p+m_1)(p+m_2)} \dots\dots\dots (52)$$

となる。ここで、

$$n_1 = \frac{9c_1 c_2}{a_1 c_2 + 3a_2 c_1}$$

$$n_2 = \frac{9(b_1 c_2 + b_2 c_1)}{a_1 c_2 + 3a_2 c_1} - \frac{9c_1 c_2(a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + c_2 + 3c_1)}{(a_1 c_2 + 3a_2 c_1)^2}$$

$$n_3 = \frac{9b_1 b_2}{a_1 c_2 + 3a_2 c_1} - \frac{9c_1 c_2(b_2 + 3b_1)}{(a_1 c_2 + 3a_2 c_1)^2}$$

m_1 と m_2 は二次方程式、

$$(a_1 c_2 + 3a_2 c_1)x^2 + (a_1 b_2 + 3a_2 b_1 + c_2 + 3c_1)x + b_2 + 3b_1 = 0$$

の根である。

一方、

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)} \subset \frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \subset \frac{1}{ab} + \frac{1}{a-b}\left(\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b}\right)$$

であるから、(52)式は、

$$E = n_1 + \frac{n_2}{m_1 - m_2}(e^{-m_1 t} - e^{-m_2 t}) + \frac{n_3}{m_1 m_2} + \frac{n_3}{m_1 - m_2}\left(\frac{e^{-m_1 t}}{m_1} - \frac{e^{-m_2 t}}{m_2}\right) \dots\dots\dots (53)$$

となる。

5. ま と め

カールソン変換を導入することによって、線形粘弾性体に対する変分原理、最小原理を導びいた。最小原理は空間変数と時間変数を分離するという制限条件 (Christensen^{4,5)})を必要とせず、また不均質異方性の粘弾性体に対し成立することを示した。さらに、最小原理とカールソン変換の方法を粘弾性複合材料に応用し、体積弾性係数、せん断弾性係数、ヤング率、ポワソン比の間の関係およびその上限、下限などを明らかにした。

文 献

- 1) M. E. Gurtin; Arch. Rat. Mech. Anal., **13**, 179 (1963)
- 2) M. J. Leitman; Quart. Appl. Math., **24**, 37 (1966)
- 3) J. N. Reddy; Int. J. Solids Structures, **12**, 227 (1976)
- 4) R. M. Christensen; ZAMP, **19**, 233 (1968)
- 5) R. M. Christensen; Theory of Viscoelasticity, Academic Press (1971), New York
- 6) J. Mandel; C. R. Acad. Sc. Paris, **241**, 1910 (1955)
- 7) J. Mandel; Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 2, Gauthier-Villars (1966), Paris