内部変数を用いた粘弾性体の構成方程式と その数値解析への応用

大阪大学 工学部 中 村 喜代次(会員)
" 山 本 正 人
" 大 東 照 夫
" 堀 川 明(")

Viscoelastic Constitutive Equation with Internal Variables and Its Application to Numerical Analysis.

Kiyoji Nakamura, Masato Yamamoto, Teruo Ohhigashi and Akira Horikawa,
Department of Mechanical Engineering, Osaka University, Suita, Osaka.

Abstract

A constitutive equation applicable to viscoelastic materials with/without initial elastic responses has been derived by using internal variables. This equation has been applied to viscoelastic composite materials. Moreover, stress analyses have been carried out by the finite element method, using a linear and a non-linear viscoelastic constitutive equations with internal variables.

(Received December 10, 1980)

摘 要

内部変数表示の粘弾性体の構成式として、初期弾性応答を持つ物質にも持たない物質にも適用できる式を導き、さらに、これらの式を粘弾性体からなる複合材料に適用した。最後に、内部変数表示の式を用いて有限要素法による応力計算を行い、線形粘弾性、非線形粘弾性のいずれの場合も容易に計算できることを示した。

(昭和55年12月10日受理)

1. まえがき

粘弾性体の構成式は通常微分または積分形で表現されるが、このほかに内部変数を用いた構成式も提案されている。Coleman¹⁾は粘弾性体に限ることなく、さらに広い範囲の物質に対して、その構成式を内部変数表示の形で求めている。Valanis²⁾は粘弾性体に限定して、Onsagerの原理から粘弾性ポテンシャルと構成式を求めている。しかし、得られた式の適用範囲は初期弾性応答を持つ物質に限られている。さらに、これらの研究は、いずれも内部変数表示の構成式について述べているが、それを用いて応力解析などはしておらず、またいままでのところ内部変数を用いた形で応力解析をした例もないようである。

本論文においては、対象を粘弾性体に限定して、まず

Legendre変換により初期弾性応答を持つ物質にも持たない物質にも適用できる内部変数表示の構成式を導く。つぎに、これらの構成式を粘弾性体から成る複合材料に適用することを考える。最後に、内部変数表示の構成式を用いて数値解析を行う。粘弾性体の構成式を内部変数を用いて表現すると、線形応答、非線形応答のいずれの場合でも内部変数に関しては発展方程式の形となる。この発展方程式に対しては、時間の経過による内部変数の変化を容易に計算することができるので、各瞬間では弾性解析と等価となり、従来の弾性問題の手法をそのまま用いることができるという利点がある。

2. 内部変数を用いた粘弾性体の構成式

粘弾性体の構成式を内部変数を用いて表わすと、

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \dots \dots \dots (1)$$

$$\dot{\xi}^{(r)} = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi^{(r)}} \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (2)$$

である²⁾。ここで、 ϕ は単位体積あたりの自由エネルギーで、

$$\phi = \phi(\sigma, T, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}) \dots \dots \dots (3)$$

で与えられる。この ϕ が粘弾性ポテンシャルに相当する。 ε はGreen-Lagrangeのひずみテンソル³⁾、 σ はPiola-Kirchhoffの応力テンソル³⁾、 T は温度、 $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ は内部変数である。(1), (2)式で表わされる力学挙動は初期弾性応答を持つ場合に限られる。

つぎに、(3)式を考慮して、Legendre変換により熱力学ポテンシャル⁴⁾

$$\Omega = \Omega(\sigma, T, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)})$$

を

$$\Omega = \sigma : \varepsilon - \phi \dots \dots \dots (4)$$

なる関係として導入する。ここで、 $\sigma : \varepsilon$ は $\sigma \varepsilon^T$ のトレースである。(1), (4)式から

$$d\Omega = \varepsilon : d\sigma - \frac{\partial \phi}{\partial T} dT - \sum_{r=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial \xi^{(r)}} : d\xi^{(r)} \dots \dots \dots (5)$$

を得る。いっぽう

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial \Omega}{\partial T} dT + \sum_{r=1}^n \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(r)}} : d\xi^{(r)} \dots \dots \dots (6)$$

注)

図のような三要素固体モデルで表わされた物質を力 Q で引張ったとき、

$$Q = E_1 x + \eta \dot{x}$$

$$Q = E_2 (q - x)$$

が成立つ。これより、 x を消去すると三要素固体モデルの式

$$(E_1 + E_2)Q + \eta \dot{Q} = E_1 E_2 q + \eta E_2 \dot{q}$$

を得る。ところで、実際に測定できる量は Q と q で、 x を知ることはできない。この x のような実際には測定できないが、物質内の変数として頭の中で考えられる量を内部変数という。例えば、高分子と高分子の交点などの変位を想定すれば、これが内部変数と考えられ、マクロな力学挙動を扱うにあたっては消去される変数となる。

が成立するから、

$$\varepsilon = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi^{(r)}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(r)}} \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

を得る。この式と(2)式から、

$$\dot{\xi}^{(r)} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(r)}} \quad (r=1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (8)$$

となる。

(7), (8)式は(1), (2)式と異なり、初期弾性応答を持つ力学挙動も初期弾性応答を持たない力学挙動も表現することができる。

3. 構成式の展開

(1), (2)式および(7), (8)式は ϕ, Ω の関数形が与えられれば、構成式の展開が可能となる。ここでは、簡単な場合として、自由エネルギー ϕ を二次形式で与え、さらに等温で等方性とする。

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{\lambda_a}{2} \varepsilon_{ii}^2 + \mu_a \varepsilon_{ij}^2 + \sum_{r=1}^n (\lambda_b^{(r)} \varepsilon_{ii} \xi_{ij}^{(r)} \\ & + 2 \mu_b^{(r)} \varepsilon_{ij} \xi_{ij}^{(r)}) + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\lambda_c^{(r)}}{2} \xi_{ii}^{(r)2} \right. \\ & \left. + \mu_c^{(r)} \xi_{ij}^{(r)2} \right) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

(9)式を(1), (2)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \lambda_a \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_a \varepsilon_{ij} + \sum_{r=1}^n (\lambda_b^{(r)} \xi_{kk}^{(r)} \delta_{ij} \\ & + 2 \mu_b^{(r)} \xi_{ij}^{(r)}) \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij}^{(r)} = & -\lambda_c^{(r)} \xi_{kk}^{(r)} \delta_{ij} - 2 \mu_c^{(r)} \xi_{ij}^{(r)} \\ & - \lambda_b^{(r)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu_b^{(r)} \varepsilon_{ij} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

を得る。いま

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \int_0^t f_K(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau \\ & + 2 \int_0^t f_\mu(t-\tau) \left\{ \dot{\xi}_{ij}(\tau) - \frac{\dot{\varepsilon}_{kk}(\tau)}{3} \delta_{ij} \right\} d\tau \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

とおき、さらに

$$K_a^{(r)} = \lambda_a^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_a^{(r)}$$

$$K_b^{(r)} = \lambda_b^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_b^{(r)}$$

$$K_c^{(r)} = \lambda_c^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_c^{(r)}$$

とすると、緩和関数 $f_K(t)$ 、 $f_\mu(t)$ は、時刻 $t \leq 0$ で内部変数 $\xi_{ij}^{(r)} = 0$ ($r=1, 2, \dots, n$)なる条件のもとで、(10), (11)式から

$$f_K(t) = K_a - \sum_{r=1}^n \frac{K_b^{(r)2}}{K_c^{(r)}} + \sum_{r=1}^n \frac{K_b^{(r)2}}{K_c^{(r)}} \times \exp(-3K_c^{(r)}t) \dots\dots\dots(13)$$

$$f_\mu(t) = \mu_a - \sum_{r=1}^n \frac{\mu_b^{(r)2}}{\mu_c^{(r)}} + \sum_{r=1}^n \frac{\mu_b^{(r)2}}{\mu_c^{(r)}} \exp(-2\mu_c^{(r)}t) \dots\dots\dots(14)$$

を得る。この緩和関数の形は、初期弾性応答を持たない場合の線形粘弾性体の構成式を表わしている。

同じように、熱力学ポテンシャル Ω を二次形式

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{\lambda_a}{2} \sigma_{ii}^2 + \mu_a \sigma_{ij}^2 + \sum_{r=1}^n (\lambda_B^{(r)} \sigma_{ii} \xi_{ij}^{(r)} \\ & + 2\mu_B^{(r)} \sigma_{ij} \xi_{ij}^{(r)}) + \sum_{r=1}^n \left(-\frac{\lambda_\gamma^{(r)}}{2} \xi_{ii}^{(r)2} \right. \\ & \left. + \mu_\gamma^{(r)} \xi_{ij}^{(r)2} \right) \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

で与えると、(7)、(8)式から

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = & \lambda_a \sigma_{ii} \delta_{ij} + 2\mu_a \sigma_{ij} - \sum_{r=1}^n (\lambda_B^{(r)} \xi_{ii}^{(r)} \delta_{ij} \\ & + 2\mu_B^{(r)} \xi_{ij}^{(r)}) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij}^{(r)} = & -\lambda_\gamma^{(r)} \xi_{ii}^{(r)} \delta_{ij} - 2\mu_\gamma^{(r)} \xi_{ij}^{(r)} \\ & - \lambda_B^{(r)} \sigma_{ii} \delta_{ij} - 2\mu_B^{(r)} \sigma_{ij} \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となる。さらに、(17)式の特別の場合として、

$$\dot{\xi}_{ij}^{(\infty)} = -\lambda_B^{(\infty)} \sigma_{ii} \delta_{ij} - 2\mu_B^{(\infty)} \sigma_{ij} \dots\dots\dots(18)$$

を考慮して、遅延関数 $g_K(t)$ 、 $g_\mu(t)$ は(16)、(17)、(18)式から

$$\begin{aligned} g_K(t) = & K_a + \sum_{r=1}^n \frac{K_B^{(r)2}}{K_\gamma^{(r)}} \{1 - \exp(-3K_\gamma^{(r)}t)\} \\ & + 3K_B^{(\infty)2}t \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_\mu(t) = & \mu_a + \sum_{r=1}^n \frac{\mu_B^{(r)2}}{\mu_\gamma^{(r)}} \{1 - \exp(-2\mu_\gamma^{(r)}t)\} \\ & + \mu_B^{(\infty)2}t \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(t) = & \int_0^t g_K(t-\tau) \dot{\sigma}_{ii}(\tau) \delta_{ij} d\tau \\ & + 2 \int_0^t g_\mu(t-\tau) \left\{ \dot{\sigma}_{ij}(\tau) - \frac{\dot{\sigma}_{ii}(\tau)}{3} \delta_{ij} \right\} d\tau \\ K_a^{(r)} = & \lambda_a^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_a^{(r)} \\ K_B^{(r)} = & \lambda_B^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_B^{(r)} \\ K_\gamma^{(r)} = & \lambda_\gamma^{(r)} + \frac{2}{3} \mu_\gamma^{(r)} \end{aligned}$$

である。この遅延関数の形は線形粘弾性体を表わしており、初期弾性応答を持つ場合も持たない場合もいずれを

も含んでいる。

以上のように、 ϕ 、 Ω を二次形式で与えれば(1)、(2)式および(7)、(8)式は線形粘弾性体の構成式となる。さらに、 ϕ 、 Ω を高次の項まで考慮するなど、関数形を変えることによって、非線形粘弾性体の構成式を得ることができる。

なお、これらの式を構造物の応力解析に適用する場合、内部変数に関する発展方程式を解くという手順が必要である。しかし、数値解析を用いると、この手順は容易に実行可能である。

4. 粘弾性複合材料への応用

複合材料は、微視的には非等質で複雑な応力あるいはひずみ分布を示す。しかし、ここでは複合材料が等質とみなせる程度に巨視的な立場をとる。したがって、応力やひずみなどは平均的な量、すなわち応力またはひずみなどの量を積分し、それを考えている領域の体積で割ったものを用いる。これを $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\epsilon}$ などと表わす。

2つの成分からなる複合材料を考え、各成分に係する量を添字〈1〉、〈2〉によって区別する。巨視的な立場からみた複合材料としての量には〈1〉、〈2〉などの添字をつけないで表わす。複合材料の中に含まれる成分1および2の体積比を $v_{\langle 1 \rangle}$ 、 $v_{\langle 2 \rangle}$ と書き、

$$v_{\langle 1 \rangle} + v_{\langle 2 \rangle} = 1$$

とする。

各成分の粘弾性ポテンシャルを

$$\bar{\phi}_{\langle 1 \rangle}(\bar{\epsilon}_{\langle 1 \rangle}, \bar{\xi}_{\langle 1 \rangle}^{(1)}, \bar{\xi}_{\langle 1 \rangle}^{(2)}, \dots, \bar{\xi}_{\langle 1 \rangle}^{(n)})$$

$$\bar{\phi}_{\langle 2 \rangle}(\bar{\epsilon}_{\langle 2 \rangle}, \bar{\xi}_{\langle 2 \rangle}^{(1)}, \bar{\xi}_{\langle 2 \rangle}^{(2)}, \dots, \bar{\xi}_{\langle 2 \rangle}^{(n)})$$

とする。そして、任意の領域内で

$$\bar{\phi} = v_{\langle 1 \rangle} \bar{\phi}_{\langle 1 \rangle} + v_{\langle 2 \rangle} \bar{\phi}_{\langle 2 \rangle} \dots\dots\dots(21)$$

が成立つと考える。

いま、複合材料内で各成分のひずみおよび内部変数の間に

$$\bar{\epsilon}_{\langle 1 \rangle} = \bar{\epsilon}_{\langle 2 \rangle} = \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\xi}_{\langle 1 \rangle}^{(i)} = \bar{\xi}_{\langle 2 \rangle}^{(i)} = \bar{\xi}^{(i)}$$

が成立すると仮定する。ただし、 $p \geq j > q$ のとき

$$\bar{\xi}_{\langle 1 \rangle}^{(j)} = \bar{\xi}^{(j)}$$

$p < j \leq q$ のとき

$$\bar{\xi}_{\langle 2 \rangle}^{(j)} = \bar{\xi}^{(j)}$$

とする。(1)、(2)式から

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}} (v_{\langle 1 \rangle} \bar{\phi}_{\langle 1 \rangle} + v_{\langle 2 \rangle} \bar{\phi}_{\langle 2 \rangle}) \dots\dots\dots(22)$$

$$\dot{\xi}^{(r)} = -\frac{\partial}{\partial \xi^{(r)}}(v_{(1)}\phi_{(1)} + v_{(2)}\phi_{(2)}) \dots\dots\dots(23)$$

が得られ、これはフォークトモデルに相当する複合則を表わしている。

熱力学ポテンシャルを

$$\bar{\Omega}_{(1)}(\bar{\sigma}_{(1)}, \bar{\xi}_{(1)}^{(1)}, \bar{\xi}_{(1)}^{(2)}, \dots, \bar{\xi}_{(1)}^{(p)})$$

$$\bar{\Omega}_{(2)}(\bar{\sigma}_{(2)}, \bar{\xi}_{(2)}^{(1)}, \bar{\xi}_{(2)}^{(2)}, \dots, \bar{\xi}_{(2)}^{(q)})$$

で与え、任意の領域内で

$$\bar{\Omega} = v_{(1)}\bar{\Omega}_{(1)} + v_{(2)}\bar{\Omega}_{(2)} \dots\dots\dots(24)$$

が成立つと考える。いま、複合材料内で

$$\bar{\sigma}_{(1)} = \bar{\sigma}_{(2)} = \bar{\sigma}$$

$$\bar{\xi}_{(1)}^{(j)} = \bar{\xi}_{(2)}^{(j)} = \bar{\xi}^{(j)}$$

ただし、 $q < j \leq p$ のとき

$$\bar{\xi}_{(1)}^{(j)} = \bar{\xi}^{(j)}$$

$p < j \leq q$ のとき

$$\bar{\xi}_{(2)}^{(j)} = \bar{\xi}^{(j)}$$

とする。(7)、(8)式から

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}}(v_{(1)}\bar{\Omega}_{(1)} + v_{(2)}\bar{\Omega}_{(2)}) \dots\dots\dots(25)$$

$$\dot{\xi}^{(r)} = \frac{\partial}{\partial \xi^{(r)}}(v_{(1)}\bar{\Omega}_{(1)} + v_{(2)}\bar{\Omega}_{(2)}) \dots\dots\dots(26)$$

が得られ、これはロイスモデルに相当する複合則を表わしている。

(21)、(24)式で表わされた複合則は ϕ および Ω の関数形を適当に与えることによって、線形、非線形粘弾性体のいずれの場合も容易に扱うことができる。

5. 有限要素法による数値計算例

円孔を有する粘弾性平板に対し、有限要素法を用いて平面応力のもとで計算を行う。図1にその形状と要素分割を示す。この図は全体の1/4で、板幅 $2W$ と円孔の直径 2ρ との比 W/ρ は5である。要素分割の節点数は94、要素数は145で、円孔の周辺は特に細かく分割した。平板の上端と下端では X 方向の変位は許さず、 Y 方向には試料幅 $2W$ の20%の初期変位を与え、各時刻での応力とひずみを求める。

5.1 線形粘弾性体の例

線形粘弾性体の構成式として、次式を用いる。

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij} + \lambda_1 \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_1 \dot{\varepsilon}_{ij} \dots\dots\dots(27)$$

$$\dot{\xi}_{ij} = -\lambda_0 \xi_{kk} \delta_{ij} - 2\mu_0 \xi_{ij} - \lambda_1 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 2\mu_1 \varepsilon_{ij} \dots\dots\dots(28)$$

図1 円孔を有する平板の要素分割

なお、計算に使用した材料定数は表1のとおりである。

図2は平板の中心線 OX に沿う断面上の Y 方向の応力分布で、(a)は公称応力 $\sigma_{(n)yy}$ 、(b)は真応力 $\sigma_{(r)yy}$ を示している。各時刻での応力分布の形は、ほぼ相似である。とくに、 $t=0$ と $t=\infty$ では完全な相似形となっている。なお、円孔を有する平板の形状は、時間が経過しても変形直後($t=0$)のものとはほとんど差がなく、 $t=$

表1 計算に使用した材料定数
(単位は cm, kg, min 系)

λ_0	μ_0	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2
200	100	10	5	2	1

図2 XO断面上の応力分布 (a) 公称応力

図2 XO断面上の応力分布 (b) 真応力

∞ ($t \geq 5$ に相当する)での形状は $t=0$ のときと一致した。

図3は OY 軸断面上の X 方向の応力 $\sigma_{(r)xx}$ を示している。ここには真応力のみを示しているが、 OY 軸上では変形があまり大きくないので、公称応力もこれとほとんど同じである。なお、 Y/ρ が5に近づくにつれ応力が増しているのは、平板の上端で X 方向の変位が拘束されているためである。

図3 YO断面上の応力分布

5.2 非線形粘弾性体の例

非線形粘弾性体の構成式として、次式を用いる。

$$\sigma_{ij} = P \left(-\frac{\lambda_a}{2} \epsilon_{kk}^2 + \mu_a \epsilon_{kk} \right)^{P-1} (\lambda_a \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_a \epsilon_{ij}) + \lambda_b \xi_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_b \xi_{ij} \dots \dots \dots (29)$$

$$\dot{\xi}_{ij} = -\lambda_c \xi_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu_c \xi_{ij} - 2 \lambda_b \epsilon_{kk} \delta_{ij} - 2 \mu_b \epsilon_{ij} \dots \dots \dots (30)$$

なお、計算時に用いた定数は $P=0.8$ と表1に示す値である。

図4は円孔を有する平板の $t=0$ および $t=\infty$ ($t \geq 7$ に相当する)の形状を示したもので、実際の変位を2倍に拡大して書いてある。これから、時間が経過するにつれて、円孔の形が細長い楕円状になっていくことがわかる。

図5は OX 軸上のひずみ $\epsilon_{yy}(t)$ で、円孔の付近の ϵ_{yy} が時間とともに増加しており、これが円孔の形状変化となって現われている。

図6は OX 軸断面上の応力 $\sigma_{(n)yy}$ と $\sigma_{(r)yy}$ を示したものである。各時刻における応力分布の形は、線形粘弾性体の場合と異なり、互いに相似とはならず、公称応力 $\sigma_{(n)yy}$ の最大値は時間の経過とともに円孔周辺から内部

図4 円孔を有する平板の変形様式

図5 XO断面上のひずみ分布

(a) 公称応力

(b) 真応力

図6 XO断面上の応力分布

図7 YO断面上の応力分布

へと移行している。これは線形粘弾性モデルでは、円孔の形状は時間が経過しても変形直後の形状とほとんど同じであるのに、非線形粘弾性モデルでは図4に示すように円孔の形が細長い楕円状に引伸ばされている。このため、円孔周辺部の応力が少し低下し、 $\sigma_{(n)yy}$ の最大値の位置が内部へ移行するものと考えられる。

図7はOY軸断面上の真応力 σ_{trxx} を示している。Y軸上では変形が小さいので、公称応力値と真応力値はほぼ等しい。

6. まとめ

力学的挙動においてエネルギーの散逸を伴い、また過去の記憶を有する物質である粘弾性体に対し、内部変数を用いて表現された構成式について検討した。まず、初期弾性応答を有する物質の構成式をもとに、そのLegendre変換を考えることで初期弾性応答を持たない物質にも適用できる構成式を導いた。つぎに、この特別の場合として線形粘弾性体に対する構成式の展開を行った。さらに、粘弾性複合材料への応用として、内部変数を用いた形での複合則を求めた。最後に、ここで求めた構成式をもとにして、有限要素法による応力計算を行い、線形粘弾性の場合も非線形粘弾性の場合も容易に計算できることを示した。

参考文献

- 1) B. D. Coleman and M. E. Gurtin; J. Chem. Phys., **47**, 597 (1967).
- 2) K. C. Valanis; J. Math. Phys., **47**, 262 (1968).
- 3) P. German; Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 1 (1973), p. 98, p. 111, p. 348, Masson et Cie (Paris).

《付録I》 有限要素法による粘弾性解析

1. 基礎式

(1) 平衡方程式

変形前の座標を $\{X_i\}$ 、変形後の座標を $\{x_i\}$ とする。

Piola-Kirchhoffの応力テンソル σ_{ij} を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\sigma_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}) + F_{0i} = 0 \quad \cdots \cdots (A-1)$$

と書ける。

(2) 適合条件

変位を u_i とすると、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad \cdots \cdots (A-2)$$

である。

(3) 構成式

構成式は(27)、(28)式と(29)、(30)式である。

(4) 境界条件

体積 B を持つ連続体の境界 ∂B は、境界条件が外力で

与えられている境界 ∂B_σ と変位で与えられている境界 ∂B_u からなるとすると,

$$\begin{aligned} \partial B_\sigma \text{ 上で } T_i &= T_{0i} \\ \partial B_u \text{ 上で } u_i &= u_{0i} \end{aligned} \quad \text{.....(A-3)}$$

2. 三角形要素

変形前の三角形要素を $P_1P_2P_3$, 要素内の任意の点を $\nearrow$

$\searrow P$, 変形後を $P_1'P_2'P_3'$; P' で表わす. 変位ベクトル (u, v) をつぎの一次式で近似する.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 X + \alpha_6 Y \end{aligned} \quad \text{.....(A-4)}$$

節点 P_k の座標を (X_k, Y_k) , 変位ベクトルを (u_k, v_k) とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} X_2Y_3 - X_3Y_2 & X_3Y_1 - X_1Y_3 & X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} X_2Y_3 - X_3Y_2 & X_3Y_1 - X_1Y_3 & X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{.....(A-5)}$$

ここで, $X_{km} = X_k - X_m$, $Y_{km} = Y_k - Y_m$ で, A は三角形要素の面積である. (A-2) と (A-4) から

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_6^2) \\ \epsilon_{yy} &= \alpha_6 + \frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_6^2) \\ 2\epsilon_{xy} &= \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_5\alpha_6 \end{aligned} \quad \text{.....(A-6)}$$

これを行列表示すると,

$$\begin{aligned} \epsilon &= ([B_0] + [B_1])[q] \quad \text{.....(A-7)} \\ \text{となる. ここで} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\epsilon]^T &= [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, 2\epsilon_{xy}] \\ [q]^T &= [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3] \\ [B_0] &= \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} Y_{23}, & 0, & Y_{31}, & 0, & Y_{12}, & 0 \\ 0, & X_{32}, & 0, & X_{13}, & 0, & X_{21} \\ X_{32}, & Y_{23}, & X_{13}, & Y_{31}, & X_{21}, & Y_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[B_1] = \frac{1}{4A} \begin{pmatrix} \alpha_2 Y_{23} & \alpha_5 Y_{23} & \alpha_2 Y_{31} & \alpha_5 Y_{12} & \alpha_2 Y_{12} & \alpha_5 Y_{12} \\ \alpha_3 X_{32} & \alpha_6 Y_{32} & \alpha_3 X_{13} & \alpha_6 X_{13} & \alpha_3 X_{21} & \alpha_6 X_{21} \\ \alpha_2 X_{32} + \alpha_3 Y_{23} & \alpha_5 X_{32} + \alpha_6 Y_{23} & \alpha_2 X_{13} + \alpha_3 Y_{31} & \alpha_5 X_{13} + \alpha_6 Y_{31} & \alpha_2 X_{21} + \alpha_3 Y_{12} & \alpha_5 X_{21} + \alpha_6 Y_{12} \end{pmatrix} \quad \text{.....(A-8)}$$

$[B_0]$ は微小変形のときの要素内の ひずみと節点力の関係を示す行列であり, $[B_1]$ は有限変形のため付加された項である.

$\searrow$ ただし,

$$\begin{aligned} [\sigma]^T &= [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}] \\ [\xi]^T &= [\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{zz}, \xi_{xy}] \\ [\dot{\xi}]^T &= [\dot{\xi}_{xx}, \dot{\xi}_{yy}, \dot{\xi}_{zz}, \dot{\xi}_{xy}] \\ [D_0]_L &= \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_a, & \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a}, & 0 \\ \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a}, & \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_a, & 0 \\ 0, & 0, & \mu_a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 平面応力場における構成式の行列表示

(1) 線形粘弾性体

平面応力場では, $\sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ が成立つことを考慮して,

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [D_0]_L[\epsilon] + [D_1]_L[\xi] \\ [\dot{\xi}] &= -[D_2][\epsilon] - [D_3][\xi] \end{aligned} \quad \text{.....(A-9)} \nearrow$$

$$[D_1]_L = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_b\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_b, & \frac{2\lambda_b\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a}, & \frac{2(\lambda_b\mu_a - \lambda_a\mu_b)}{\lambda_a + 2\mu_a}, & 0 \\ \frac{2\lambda_b\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a}, & \frac{2\lambda_b\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_b, & \frac{2(\lambda_b\mu_a - \lambda_a\mu_b)}{\lambda_a + 2\mu_a}, & 0 \\ 0, & 0, & , & 0 \\ 0, & 0, & , & 2\mu_b \end{pmatrix}$$

$$[D_2] = \begin{pmatrix} \lambda_b + 2\mu_b & \lambda_b & \lambda_b & 0 \\ \lambda_b & \lambda_b + 2\mu_b & \lambda_b & 0 \\ \lambda_b & \lambda_b & \lambda_b + 2\mu_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_b \end{pmatrix}$$

$$[D_3] = \begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu_c & \lambda_c & \lambda_c & 0 \\ \lambda_c & \lambda_c + 2\mu_c & \lambda_c & 0 \\ \lambda_c & \lambda_c & \lambda_c + 2\mu_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_c \end{pmatrix}$$

$$[D_1]_N = \begin{pmatrix} \frac{2G\lambda_a\mu_a + (G-1)\lambda_a\lambda_b}{G(\lambda_a + 2\mu_a)} + 2\mu_b & \frac{2G\lambda_b\mu_a + (G-1)\lambda_a\lambda_b}{G(\lambda_a + 2\mu_a)} & \frac{2G(\lambda_b\mu_a - \lambda_a\mu_b) + (G-1)\lambda_a\lambda_b}{G(\lambda_a + 2\mu_a)} & 0 \\ \frac{2G\lambda_b\mu_a + (G-1)\lambda_a\lambda_b}{G(\lambda_a + 2\mu_a)} & \frac{2G\lambda_b\mu_a + (G-1)\lambda_a\lambda_b}{G(\lambda_a + 2\mu_a)} + 2\mu_b & 2G(\lambda_b\mu_a - \lambda_a\mu_b) + (G-1)\lambda_a\lambda_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_b \end{pmatrix}$$

④(2) 非線形粘弾性体

$$[\sigma] = [D_0]_N[\varepsilon] + [D_1]_N[\xi]$$

$$[\dot{\xi}] = -[D_2][\varepsilon] - [D_3][\xi] \quad \dots\dots\dots(A-10)$$

ここで

$$[D_0]_N = G \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_a & \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} & 0 \\ \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} & \frac{2\lambda_a\mu_a}{\lambda_a + 2\mu_a} + 2\mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_a \end{pmatrix}$$

4. 仮想仕事の原理の有限要素法への応用

仮想仕事の原理は

$$\int_{B_0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv_0 - \int_{B_0} F_{0i} \delta u_i dv_0 - \int_{\partial B_0} T_{0i} \delta u_i ds_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(A-11)$$

と書ける。右辺第1項は

$$\begin{aligned} \int_{B_0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv_0 &= \int_{B_0} [\delta \varepsilon]^T [\sigma] dv_0 \\ &= [\delta q]^T [K_0] [q] + [\delta q]^T [f_a] \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} [K_0] &= A[B_0]^T [D_0]_{L,N} [B] \\ [f_a] &= 2A[B_1]^T [D_0]_{L,N} [B_0] [q] \\ &\quad + A([B_0]^T + 2[B_1]^T)([\sigma_1] + [\sigma_2]) \end{aligned}$$

である。右辺第2項の物体力は無視する。第3項は、三角形要素では表面力を節点力 $[f]$ に置換える。

$$\int_{\partial B_0} T_{0i} \delta u_i ds_0 = [\delta q]^T [f]$$

したがって、(A-11) から

$$[f] = [K_0] [q] + [f_a] \quad \dots\dots\dots(A-12)$$

を得る。 $[K_0]$ は微小変形論による剛性マトリックスで、 $[f_a]$ は有限変形と粘性効果によるみかけの等価節点力である。この式を与えられた境界条件のもとで解けば解が得られる。

《付録Ⅱ》 穴あき平板の引張試験

中央に半径 20 mm の円孔を有するネオプレン系合成ゴム板 (200 mm×200 mm×1 mm) の表面に、白のマゾ

ックで図1と同じ有限要素分割を記入した。つぎに、この試料の上下端を引張試験機で、上下方向に 50 mm/min の引張速度で引張り、変位が板幅の 30 % になった時点 (1.2 min 後) で停止させ、変位をそのままに保った。図Aは停止時の試料の 1/4 を写真撮影したもので、白い線は初めに書いた有限要素分割の変形後の形状、黒い線は非線形モデル(29), (30)式を用いて計算した結果で、両者はかなりよく一致している。なお、非線形モデルによる計算では変位一定のもとで円孔形状は時間とともに細長く変形するが、このことはこの実験においても確認された。

図A 穴あき平板の変形形状