高分子流体力学のためのベクトル・テンソル(2)*

代 数 (その2)

会 員 中 村 喜代次**

4. ユークリッド ベクトル空間

前回に述べたベクトル空間 V では、ベクトルの長さや2つのベクトルの成す角を考えていなかった。ここでは、それらを測る物指しをもつベクトル空間について述べる。これによって V の双対空間 V^* と V は同じ空間となる。

4.1 計量テンソル

ベクトル空間 V の任意の元を $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ とすると、2次の共変テンソルは $(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ に実数 $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ を対応させる双線形形式 $\mathbf{T}$ のことであった。いま、任意の0でない $\mathbf{v} \in V$ に対し正の実数 $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ を対応させる双線形形式 $\mathbf{g}$ を考える。(21)~(23)式から

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \mathbf{g}(v^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) = v^i v^j \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= g_{ij} \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{f}^j (\mathbf{v}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

いっぽう、

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \mathbf{g}(v^j \mathbf{e}_j, v^i \mathbf{e}_i) = v^j v^i \mathbf{g}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \\ &= v^i v^j \mathbf{g}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji} \mathbf{f}^j \otimes \mathbf{f}^i (\mathbf{v}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

とも書けるから

$$g_{ij} = g_{ji} \quad \dots\dots\dots (34)$$

を得る。したがって、 g_{ij} は2次の対称共変テンソルの成分である。

このような $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in V \times V$ に正の実数 $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ を対応させる2次の対称共変テンソル $\mathbf{g}$ が与えられたとき、 V と $\mathbf{g}$ の組を $\mathbf{g}$ を計量テンソルとするユークリッドベクトル空間といい、 $\{V, \mathbf{g}\}$ と書く。以下、特に断わらなければ計量テンソルを常に $\mathbf{g}$ と書き、 V で $\{V, \mathbf{g}\}$ を表わすことにする。

4.2 内 積

V の任意の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ に関する $\mathbf{g}$ の成分 g_{ij} は

$$g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

であった。これを

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in V \quad \dots\dots\dots (35)$$

一 目 次 (太字は本号掲載)

1. ベクトル
 2. 双対ベクトル
 3. テンソル
 4. ユークリッド ベクトル空間
 - 4.1 計量テンソル
 - 4.2 内 積
 - 4.3 ベクトルの大きさと直交性
 - 4.4 添字の上げ下げ
 - 4.5 テンソルの内積
 - 4.6 基底 $\mathbf{e}_i$ と双対基底 $\mathbf{e}^i$
 - 4.7 物理成分
 5. テンソルの不変量と極分解
 - 5.1 不変量
 - 5.2 極分解
 6. 純粘性流体
 7. アフィン空間
 - 7.1 アフィン空間
 - 7.2 アフィン空間の座標
 8. 基底の変換
 - 8.1 自然基底
 - 8.2 基底の変換
 - 8.3 計量テンソルの計算
 9. 共変微分
 - 9.1 クリストッフエル記号
 - 9.2 共変微分
- (引続いてベクトル・テンソルの解析的取扱いついて連載の予定)

とおき、 $\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{e}_j$ の内積と呼ぶことにする。

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ とすると $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の内積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ は

* Vector and Tensor in Dynamics of Polymeric Liquids (2).

** K. Nakamura, Member. 大阪大学 工学部 助教授(工博)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{u}^i \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{v}^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= g_{ij} u^i v^j \quad \dots\dots\dots (36)\end{aligned}$$

となる。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \dots\dots\dots (37)$$

とも書ける。

(8)式で $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u}^* \in V^*$ に対して $\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle$ なる形で内積を定義した。この内積はベクトル空間 V と V^* の元に対するものであり、(35)式で定義した内積は V の元のみに対するものである。したがって、一般にはこの2種の内積は異なった概念であるから、記号 $\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle$ と $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ を混同しないよう注意が必要である。しかし、 V がユークリッド空間のときには、この2つの内積はつぎのようにして関連づけることができる。

$\mathbf{u}$ を固定したとき、 $\mathbf{v}$ から $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{R}$ への対応は V から $\mathbf{R}$ への線形形式であるから、これは V^* の元である。これを $\mathbf{u}^*$ と書くと、 V の元 $\mathbf{u}$ に対して

$$\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (38)$$

が成立つ。このように、 $\mathbf{u}^*$ は $\mathbf{u}$ によって決まる (V が3次元空間であるから、 V^* も3次元空間である)。逆に、 $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}^*$ によって決まるとも考えられる。したがって、任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して常に $\mathbf{u} \in V$ と $\mathbf{u}^* \in V^*$ の間には(38)式の関係が成立するように、 $\mathbf{u}$ に対しては $\mathbf{u}^*$ が、 $\mathbf{u}^*$ に対しては $\mathbf{u}$ が対応することになる。(このようにして、 V と V^* の元の間には、内積すなわち計量テンソルが定義されていれば対応している元は同じベクトル、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ であると考えることができ、 V と V^* は同一の空間とみなしてよいことになる)。

4.3 ベクトルの大きさと直交性

ベクトル $\mathbf{v}$ の大きさを記号 $\|\mathbf{v}\|$ と書き、

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

あるいは

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{v} \rangle \quad \dots\dots\dots (39)$$

で定義する。これは(36)式から

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= g_{ij} v^i v^j \\ &= g_{11} v^1 v^1 + g_{22} v^2 v^2 + g_{33} v^3 v^3 + 2g_{12} v^1 v^2 \\ &\quad + 2g_{23} v^2 v^3 + 2g_{31} v^3 v^1 \quad \dots\dots\dots (40)\end{aligned}$$

と成分表示することができる。

いっぽう、0でない2つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対し

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

が成立つとき、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は直交するという。あるいは $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}$ に対して

$$\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

が成立つとき、 $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}$ は直交すると定義することもできる。

いま、 V の基底を $\{\mathbf{e}_i\}$ とすると、計量テンソル g_{ij} は(35)式から

$$g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1$$

$$g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2$$

$$g_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$g_{12} = g_{21} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$$

$$g_{23} = g_{32} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$g_{31} = g_{13} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1$$

と書ける。すなわち、計量テンソルを行列の形で書いたとき、対角線上の要素 g_{11}, g_{22}, g_{33} はそれぞれ基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の大きさの2乗である。

さらに、基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が互に直交している、すなわち直交基底であるとする

$$g_{12} = g_{21} = g_{23} = g_{32} = g_{31} = g_{13} = 0$$

となることも明らかである。したがって、

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (43)$$

円筒座標 (r, θ, z) や球座標 (r, θ, φ) は直交基底であるから、(43)式の形をしている。特に、基底の大きさが1で互いに直交しているとき、これを正規直交基底という。このとき計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (44)$$

となる。このような座標を (x, y, z) を用いて表わすことにする。そしてベクトルの成分を (v_x, v_y, v_z) と書くとき、 $\mathbf{v}$ の長さ $\|\mathbf{v}\|$ は(40)式から

$$\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

と書ける。円筒座標 (r, θ, z) における計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

球座標 (r, θ, φ) における計量テンソルは

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (46)$$

となる(証明は8.3項で述べる)。

4.4 添字の上げ下げ

計量テンソルによって、ベクトル・テンソルの成分の添字を上げ下げする演算について説明する。 V と V^* の間で定義された内積

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^* \rangle &= \langle \mathbf{u}^i \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_j \mathbf{f}^j \rangle = u^i v_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{f}^j \rangle \\ &= u^i v_j \delta_i^j = u^i v_i\end{aligned}$$

と、 V のなかで定義された内積

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{u}^i \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{v}^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= g_{ij} u^i v^j\end{aligned}$$

の間には、ユークリッドベクトル空間では(38)式が成立つから

$$u^i v_i = g_{ij} u^i v^j$$

となる。これから

$$v_i = g_{ij} v^j \quad (47)$$

なる関係が成立つ。この式は、共変成分 v_i が計量テンソル g_{ij} によって反変成分 v^j から得られることを示している。

e_1, e_2, e_3 をユークリッドベクトル空間 V の任意の基底とすると $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ を要素とする 3×3 行列は正則である (行列式は 0 でない)。したがって、逆行列が存在する。これを g^{ij} と書く。

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (48)$$

が成立つから、3 節で述べたテンソルの商法則によって g^{ij} は 2 次の反変テンソルであり、さらに g_{ij} が対称であるから

$$g^{ij} = g^{ji}$$

も成立つ。(47) 式に g^{ik} をかけ i について総和をとると

$$g^{ik} v_i = g^{ik} g_{ij} v^j = \delta_j^k v^j = v^k \quad (49)$$

(49) 式は

$$v^i = g^{ij} v_j \quad (50)$$

と書ける。この式は、反変成分 v^i が g^{ij} によって共変成分 v_j から得られることを示している。(47), (50) 式は計量テンソルによって反変ベクトルの成分と共変ベクトルの成分の間に 1 対 1 の対応があり、かつその変換則も与えている。

V の元 $\mathbf{v}$ は基底 $\{e_i\}$ を決めておけば、この基底に対する成分 v^i によって決まるが、 v^i と v_i の間に 1 対 1 の対応があるので、 v_i によっても決めることができる。したがって、 V の元 $\mathbf{v}$ を成分で示すとき v^i と v_i のいずれを用いてもよい。この意味で v_i を $\mathbf{v}$ の $\{e_i\}$ に関する共変成分といい、これに対して v^i を $\mathbf{v}$ の $\{e_i\}$ に関する反変成分という。

2 節では、3 次元ベクトル空間 V の双対空間 V^* を考え、 V^* も 3 次元ベクトル空間であることを示した。そして、この段階では V に対し V^* というベクトル空間が存在していた。しかし、ユークリッドベクトル空間では計量テンソルが定義され、 V と V^* の元の間に 1 対 1 対応が 1 つ存在することがわかった。これによって、対応する元 $\mathbf{v} = v^i e_i$ と $\mathbf{v}^* = v_i f^i$ は同じものであると考えることができるようになった。すなわち、 $\mathbf{v}^* \in V$ となり、 V と V^* は同一の空間とみなし得る。そこで、 $\{e_i\}$ の双対基底 $\{f^i\}$ を $\{e^i\}$ と書くことにし、 $\{e^i\}$ をベクトル空間 V の 1 つの基底と考える。すると

$$\mathbf{v} = v^i e_i = v_i e^i \quad (51)$$

と書け、 v^i と v_i を共に $\mathbf{v}$ の成分と呼ぶ。そして、内積 $\langle f^i, e_k \rangle = \langle e^i, e_k \rangle$ を $e^i \cdot e_k$ と書くことにする。

任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ は

$$\mathbf{v} \cdot e_j = v_i e^i \cdot e_j = v_i \delta_j^i = v_j$$

であるから

$$\mathbf{v} = v_j e^j = (\mathbf{v} \cdot e_j) e^j$$

となる。この式で $\mathbf{v} = e_i$ とおくと

$$e_i = (e_i \cdot e_j) e^j = g_{ij} e^j$$

が得られる。この式に g^{ik} をかけ i について総和をとると

$$g^{ik} e_i = g^{ik} g_{ij} e^j = \delta_j^k e^j = e^k$$

を得る。すなわち、基底と双対基底の間にも

$$\left. \begin{aligned} e_i &= g_{ij} e^j \\ e^i &= g^{ij} e_j \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

の関係が成立つ。また

$$e^i \cdot e^j = g^{ik} e_k \cdot e^j = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}$$

すなわち

$$g^{ij} = g^{ji} = e^i \cdot e^j \quad (53)$$

も成立つ。

ベクトルの 2 つの成分 v^i と v_i の間には

$$v^i = g^{ij} v_j, \quad v_i = g_{ij} v^j$$

なる関係があった。一般のテンソルに対してもベクトルと同じように添字の上げ下げをすることができる。このとき、テンソルの添字の 1 つずつに着目し、その 1 つの添字に対しベクトルと同じであると考えればよい。

共変テンソル T_{ij} に対しては (22) 式から

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \mathbf{T}(e_i, e_j) = \mathbf{T}(g_{ik} e^k, g_{jm} e^m) \\ &= g_{ik} g_{jm} \mathbf{T}(e^k, e^m) = g_{ik} g_{jm} T^{km} \end{aligned}$$

なる関係を得る。同様にして

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= g_{ik} T_j^k = g_{jk} T_i^k = g_{ik} g_{jm} T^{km} \\ T^{ij} &= g^{ik} T_k^j = g^{jk} T^i_k = g^{ik} g^{jm} T_{km} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となる。

(注意) 正規直交基底 $\{e_i\}$ に関する計量テンソルは

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ のとき} \\ 0, & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

であるから、(47), (50) または (54) 式から

$$v^i = v_i, \quad T_{ij} = T^{ij} = T_i^j = T_j^i$$

が成立つ。この場合、反変添字と共変添字を区別する意味がないので、添字はすべて v_i, T_{ij} のように右下にだけ書くことがある。たとえば、 $\mathbf{v} = v^i e_i$ に対しては $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i e_i$ 、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} v^i v^j$ に対しては $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i v_i$ などのように書く。このとき、 $\sum_{i=1}^3$ を省略して書くこともあるが、ここでは 1 節で述べたアインシュタインの総和規約のみを用いることにするので、右下の添字のみに対する総和には $\sum_{i=1}^3$ を書くことにする。なお、正規直交基底以外の直交基底たとえば円筒座標、球座標では $v^i \neq v_i$ であるから、反変添字と共変添字の区別が必要である。これは基底の大きさが 1 でないことに原因がある。

4.5 テンソルの内積

3 次元ユークリッドベクトル空間 V に付随したテンソル空間、たとえば (1, 1) 次のテンソルは 9 次元のベクトル

ル空間とみなせる。

$$\mathbf{T} = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$$

したがって、 V の計量テンソルによって T_i^j もユークリッドベクトル空間となる。いま、2 次のテンソル $\mathbf{T}, \mathbf{S}$ に対して

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle = T_{ij} S^{ij} \quad \dots\dots\dots (55)$$

によって $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定義すれば、 $\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle$ はスカラーであるから基底の選び方に独立にその値が定まり、対称、正定値、双線形形式となっており、内積としての条件を満たしている。

テンソルの大きさは

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{T_{ij} T^{ij}} \quad \dots\dots\dots (56)$$

で与えられる。これを $\|\mathbf{T}_{ij}\|$, $\|\mathbf{T}_i^j\|$, $\|\mathbf{T}^{ij}\|$ のように書く。

4.6 基底 $\mathbf{e}_i$ と双対基底 $\mathbf{e}^i$

内積が0 のとき2つのベクトルは直交している。基底 $\mathbf{e}_i$ と双対基底 $\mathbf{e}^i$ の間には

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$$

なる関係があった。したがって、双対基底 $\mathbf{e}^3$ に対して

$$\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

であるから、 $\mathbf{e}^3$ は基底 $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ に直交している(図1)。

図1 3次元空間の基底 $\mathbf{e}_i$ と双対基底 $\mathbf{e}^i$ の関係

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ が直交基底でない場合、 $\mathbf{e}_3$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ には直交していないから、 $\mathbf{e}_3$ と $\mathbf{e}^3$ は同じベクトルではない。 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を直交基底に選ぶと $\mathbf{e}_3$ は $\mathbf{e}^3$ と同じ方向をもつベクトルとなる。同様に、 $\mathbf{e}^1$ と $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^2$ と $\mathbf{e}_2$ も同じ方向をもつベクトルである。しかし、 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ が正規直交基底でなければ、基底の長さは1でないから

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^i$$

すなわち、直交基底 $\mathbf{e}_i$ とその双対基底 $\mathbf{e}^i$ は方向は同じであるが大きさの異なるベクトルである。これに対し、 $\{\mathbf{e}_i\}$ が正規直交基底であれば、 $\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{e}^i$ は方向も大きさも一致するので

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$$

となり、反変添字と共変添字の区別は不要となる。

4.7 物理成分

V の元 $\mathbf{v}$ は基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ を定めれば、 $\mathbf{v}$ の反変成分 v^i と共変成分 v_i が決まった。

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3$$

であるから、 v^i は基底 $\mathbf{e}_i$ 方向の $\mathbf{v}$ の成分である(図2)。

図2 2次元平面のベクトル $\mathbf{v}$ の反変成分 v^i と共変成分 v_i

ところが、一般には $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \neq 1$ であるため $\mathbf{v}$ の $\mathbf{e}_i$ 方向成分 v^i のみから $\|\mathbf{v}\|$ を知ることはできない。そこで、新たに方向は $\mathbf{e}_i$ のままで大きさ1の基底を考え、この基底に対する成分をベクトル $\mathbf{v}$ の物理成分と呼ぶ。

基底 $\mathbf{e}_i$ の長さは

$$\sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = \sqrt{g_{ii}}$$

ここで、 g_{ii} の i 添字は右下のみであるからアインシュタインの総和規約は適用されないことに注意する。新しい基底として $\mathbf{e}_i$ の長さを1にした基底

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \dots\dots\dots (57)$$

を導入し、基底 $\mathbf{e}_i$ に対する $\mathbf{v}$ の成分を $v_{<i>}$ と書いて、これを $\mathbf{v}$ の物理成分と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^3 v_{<i>} \mathbf{e}_i \\ &= v_{<1>} \mathbf{e}_1 + v_{<2>} \mathbf{e}_2 + v_{<3>} \mathbf{e}_3 \quad \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

(57)式から

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 v^i (\sqrt{g_{ii}} \mathbf{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 (\sqrt{g_{ii}} v^i) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

となるから、(58)式と比較して

$$v_{<i>} = \sqrt{g_{ii}} v^i \quad \dots\dots\dots (59)$$

を得る。ただし、 i に対する総和はとらない。(59)式が $\mathbf{v}$ の反変成分から物理成分を求める関係である。

$\mathbf{v}$ の共変成分 v_i が与えられているときは、 v_i を反変成分 v^i に変換してから(59)式を適用すればよい。

$$v^i = g^{ik} v_k \text{ から}$$

$$v_{<i>} = \sqrt{g_{ii}} g^{ik} v_k \quad \dots\dots\dots (60)$$

を得る。ここでは、 i については総和をとらずに、 k についてのみ総和をとる。

特別な場合として、 $\{\mathbf{e}_i\}$ が直交基底であれば、 g^{ij} は $i \neq j$ のときは0で、 $g^{ii}=1/g_{ii}$ であるから

$$v^i = g^{ik} v_k = g^{ii} v_i = \frac{1}{g_{ii}} v_i$$

したがって

$$v_{<i>} = \sqrt{g_{ii}} \frac{1}{g_{ii}} v_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} v_i \quad \dots\dots\dots (61)$$

である (i に対する総和をとらない)。

このようにベクトル $\mathbf{v}$ の成分として、反変成分、共変成分、物理成分の3種類が考えられたが、力学的(物理的)な量としてのベクトル $\mathbf{v}$ の $\mathbf{e}_i$ 方向成分は物理成分 $v_{<i>}$ のことで、反変成分 v^i 、共変成分 v_i はそのままでは力学的(物理的)な量と一致しない。 $\{\mathbf{e}_i\}$ が正規直交基底であれば

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$$

であるから

$$v^i = v_i = v_{<i>}$$

となる。

例として、球座標 (r, θ, φ) を用いて、ベクトル $\mathbf{v}$ の反変成分、共変成分、物理成分の間の関係を示す。計量テンソルは(46)式で与えられているから、(59)式から

$$v_r = v_{<1>} = \sqrt{g_{11}} v^1 = v^1, \quad v^1 = v_r$$

$$v_\theta = v_{<2>} = \sqrt{g_{22}} v^2 = r v^2, \quad v^2 = \frac{v_\theta}{r}$$

$$v_\varphi = v_{<3>} = \sqrt{g_{33}} v^3 = r \sin \theta v^3, \quad v^3 = \frac{v_\varphi}{r \sin \theta}$$

共変成分との関係は直交座標系であるから、(61)式を用いて

$$v_r = v_{<1>} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} v_1 = v_1, \quad v_1 = v_r$$

$$v_\theta = v_{<2>} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} v_2 = \frac{v_2}{r}, \quad v_2 = r v_\theta$$

$$v_\varphi = v_{<3>} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} v_3 = \frac{v_3}{r \sin \theta}, \quad v_3 = r \sin \theta v_\varphi$$

つぎに、テンソルの物理成分について述べる。ここでは直交基底の場合に限ることにする。まず、つぎの式を考える。

$$u^i = T^i_j v^j \quad \dots\dots\dots (62)$$

この式の物理成分表示を

$$u_{<i>} = \sum_{j=1}^3 T_{<i>j} v_{<j>}$$

と書くと、(59)式から

$$u_{<i>} = \sqrt{g_{ii}} u^i, \quad v_{<j>} = \sqrt{g_{jj}} v^j$$

であるから、(62)式は

$$\frac{u_{<i>}}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_{j=1}^3 T^i_j \frac{v_{<j>}}{\sqrt{g_{jj}}}$$

すなわち

$$u_{<i>} = \sum_{j=1}^3 \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T^i_j v_{<j>}$$

となるから、(63)式と比較して

$$T_{<i>j>} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T^i_j \quad \dots\dots\dots (64)$$

この関係から混合テンソル T^i_j の物理成分 $T_{<i>j>}$ が得られる。

反変テンソル T^{ij} は $T^i_j = g_{jk} T^{ik} = g_{jj} T^{ij}$ なる関係を(64)式に用いて

$$T_{<i>j>} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} g_{jj} T^{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} T^{ij} \quad \dots\dots\dots (65)$$

共変テンソル T_{ij} は $T^i_j = g^{ik} T_{kj} = g^{ii} T_{ij}$ と $g^{ii}=1/g_{ii}$ から

$$T_{<i>j>} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} g^{ii} T_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} T_{ij} \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ただし、(64)~(66)式では添字 i, j に関して総和をとらない。

5. テンソルの不変量と極分解

5.1 不変量

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ として、 $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ への線形変換 $\mathbf{T}$ は3節の商法則から (1, 1) 次のテンソルである。

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{v}$$

または

$$u^i = T^i_j v^j \quad \dots\dots\dots (67)$$

不変量とは基底のあらゆる変換に対して変化しない量のことであるから、(1, 1) 次のテンソル $\mathbf{T}$ に基底変換を行ってみる。基底変換の行列を $A = (a^i_l)$ 、その反傾行列を $C = (c^l_i)$ とする。テンソル $\mathbf{T}$ の反変添字に対しては反行列 C が、共変添字に対しては行列 A が作用するから、変換後のテンソルを $\bar{\mathbf{T}}$ とおくと

$$\bar{T}^i_j = c^i_k a^m_j T^k_m$$

ここで、行列と行列の積の法則を用いると

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (68)$$

となる。さらに、 $A = {}^t C^{-1}$ より ${}^t A = C^{-1}$ であるから、(68)式は

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{C}^{-1} \quad \dots\dots\dots (69)$$

と書ける。

つぎに、 $\bar{\mathbf{T}}$ の固有多項式 $\varphi(\lambda)$ を考える。

$$\varphi(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \bar{\mathbf{T}}|$$

に(69)式を代入すると

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{C}^{-1}| \\ &= |C(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{T}) C^{-1}| = |C| |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{T}| |C^{-1}| \\ &= |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{T}| \end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{T}$ と $\bar{\mathbf{T}}$ の固有多項式は等しい。 $\mathbf{T}$ は3行3列の行列の形をしているから

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{T}| = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 \quad \dots\dots\dots (70)$$

なる形に展開できる。そして、固有多項式は基底の変換

に対して不変であるから、(70)式の係数 I_1, I_2, I_3 も基底の変換に対し不変となる。 I_1, I_2, I_3 は $\mathbf{T}$ の主不変量と呼ばれ、つぎの式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{T} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{T} - \text{tr} \mathbf{T}^2) \\ I_3 &= \det \mathbf{T} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

ここで、 $\text{tr} \mathbf{T}$ はスレス $\mathbf{T}$ といひ、

$$\text{tr} \mathbf{T} = T^i_i = g_{ij} T^{ij}$$

$\text{tr}^2 \mathbf{T}$ は $(\text{tr} \mathbf{T})^2$, $\text{tr} \mathbf{T}^2$ は $\text{tr} (\mathbf{T}^2)$, $\det \mathbf{T}$ は $\mathbf{T}$ の行列式を表わす。

このほかに、 $\mathbf{T}$ の不変量として

$$\bar{I}_k = \text{tr} \mathbf{T}^k \dots\dots\dots (72)$$

で定義されるモーメントがある。モーメントと主不変量との間には

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \bar{I}_1 \\ I_2 &= \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2) \\ I_3 &= \frac{1}{6} \bar{I}_1^3 - \frac{1}{2} \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \frac{1}{3} \bar{I}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93)$$

の関係がある。最後の I_3 の関係は Hamilton-Cayley の定理：行列はすべてそれ自身の固有多項式の根となっている、すなわち

$$\varphi(\mathbf{T}) = 0$$

から導かれる。この定理により

$$\mathbf{T}^3 - I_1 \mathbf{T}^2 + I_2 \mathbf{T} - I_3 \mathbf{E} = 0$$

であるから、この式のトレースをとると

$$\text{tr} \mathbf{T}^3 - I_1 \text{tr} \mathbf{T}^2 + I_2 \text{tr} \mathbf{T} - I_3 \text{tr} \mathbf{E} = 0$$

となり

$$\bar{I}_3 - I_1 \bar{I}_2 + I_2 \bar{I}_1 - 3 I_3 = 0$$

を得る。(73)式の I_1, I_2 を用いると

$$I_3 = \frac{1}{6} \bar{I}_1^3 - \frac{1}{2} \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \frac{1}{3} \bar{I}_3$$

である。

テンソルの大きさを(56)式で

$$\|\mathbf{T}\|^2 = T_{ij} T^{ij} = \text{tr} ({}^t \mathbf{T} \mathbf{T})$$

として定義した。いま、 $\mathbf{T}$ が対称テンソルであれば

$$\|\mathbf{T}\|^2 = \text{tr} \mathbf{T}^2 = \bar{I}_2 \dots\dots\dots (74)$$

の関係が成立つ。

5.2 極分解

ユークリッドベクトル空間 V 内で内積の値を変えない線形変換 $\mathbf{Q}$ を直交変換という。 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} \dots\dots\dots (75)$$

が成立し

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{v} &= g_{ij} Q^i_k u^k Q^j_m v^m \\ &= Q_{ik} u^k Q^j_m v^m = g_{ki} u^k Q^j_l Q^l_m v^m \\ &= \mathbf{u} \cdot {}^t \mathbf{Q} \mathbf{Q} \mathbf{v} \end{aligned}$$

となるから

$${}^t \mathbf{Q} \mathbf{Q} = \mathbf{E}$$

直交変換 $\mathbf{Q}$ は

$${}^t \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \dots\dots\dots (76)$$

の関係を満たす。直交変換は3次元ユークリッドベクトル空間での回転および鏡像変換を表わしている。

ユークリッドベクトル空間において、極分解定理とは任意の線形変換 $\mathbf{T}$ に対して、これを

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{Q} \dots\dots\dots (77)$$

のように分解することができる。ただし、 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ はある負でない対称変換、 $\mathbf{Q}$ は直交変換である。変換 $\mathbf{U}$ または $\mathbf{V}$ は一意に定まり、もし $\mathbf{T}$ が正則ならば、 $\mathbf{Q}$ もまた一意に定まる。

この定理は行列に対して、つぎのように言換えられる。

実正方行列はすべて負でない固有値をもつ実対称行列と実直交行列の積で表わされる。

この定理はつぎのようにして証明される。 $\mathbf{T}$ は正則としておく。任意の $\mathbf{v}$ に対して

$${}^t \mathbf{T} \mathbf{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} \geq 0$$

であるから、変換 ${}^t \mathbf{T} \mathbf{T}$ は対称で非負である。 ${}^t \mathbf{T} \mathbf{T}$ の対称な負でない平方根を $\mathbf{U}$ とすれば

$$\mathbf{U}^2 = {}^t \mathbf{T} \mathbf{T}$$

いま、1つの変換 $\mathbf{Q}$ を

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \mathbf{U}^{-1}$$

で定義すると

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} &= \mathbf{T} \mathbf{U}^{-1t} (\mathbf{T} \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{T} (\mathbf{U}^2)^{-1t} \mathbf{T} \\ &= \mathbf{T} ({}^t \mathbf{T} \mathbf{T})^{-1t} \mathbf{T} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

が成立つから、 $\mathbf{Q}$ は直交変換である。

$\mathbf{Q} \mathbf{U}$ が $\mathbf{T}$ の一意な極分解であることを示す。 $\mathbf{T}$ が $\mathbf{Q}_0$ $\mathbf{U}_0$ の形にも分解できたとすると

$$\mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}_0$$

であるから、両辺の転置をとると

$$\mathbf{U}^t \mathbf{Q} = \mathbf{U}_0^t \mathbf{Q}_0$$

したがって、

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}^t \mathbf{Q} \mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{U}_0^t \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0^2$$

となるから $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ 、 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ が得られ、一意に分解されることがわかる。

$\mathbf{T} = \mathbf{V} \mathbf{Q}$ に対しても

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{T}^t \mathbf{T}$$

と置くことによって、同様に証明できる。

また、 $\mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{Q}$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= {}^t \mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{Q} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{Q} \mathbf{U}^t \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (78)$$

が成立つこともわかる。

極分解定理 $\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{U}$ はつぎのような幾何学的意味を持っている。3次元空間における線形変換 $\mathbf{T}$ は、まず3つの互に直交する方向に引伸ばす、このとき倍率は負でない

い実数で、各方向にそれぞれ異なってよい、これにひきつづいて回転を行うことと同等である。

$T=VQ$ の場合は、まず回転を行い、つづいて引伸ばせば、 T と同じになる。物体の変形では回転とストレッチを表わしている。

6. 純粘性流体

これまでに述べてきたベクトル・テンソル計算の1つの例として、純粘性流体のレオロジック（構成式）を考える。ニュートン流体では変形速度テンソルと応力テンソルの間に線形関係が成立つが、高分子流体では非線形な関係が要求される。粘弾性流体では、ある瞬間の応力テンソルはその瞬間の変形速度テンソルのみからは決定されず、それ以前の値すなわち履歴にも関係するが、粘性流体では応力テンソルはその瞬間の変形速度テンソルによって決定される。

純粘性流体のレオロジックに対し、つぎの仮定をおく。

- (i) 応力テンソル T は変形速度テンソル D の連続関数であり、その他の運動学的な量との関係はない。
- (ii) T は位置 x に直接関係することはない。
- (iii) 流体は等方性である、すなわち特別な方向は存在しない。
- (iv) $D=0$ のとき、 $T=-pE$ (p はスカラー) である。

このような仮定を満たす流体を Stokesian fluids または Reiner-Rivlin fluids という。

仮定 (i)(ii) を数式で表現すると

$$T=f(D) \quad \dots\dots\dots (79)$$

である。仮定 (iii) の等方性の条件は直交変換 Q によって

$$QTQ^{-1}=f(QDQ^{-1}) \quad \dots\dots\dots (80)$$

と書ける。これは

$$Qf(D)Q^{-1}=f(QDQ^{-1})$$

であるから、変形速度テンソルに任意の回転を与えたときに生じる応力テンソルと回転前の変形速度テンソルによって生じる応力テンソルに同じ回転を加えた結果が等しいことを表わしている。回転 Q は任意であるから、(80) 式は流体中には特別な方向が存在しないという条件の数式表現になっている。

変形速度テンソル D の固有値を d_1, d_2, d_3 とおくと、 D は対称テンソルであるから固有値は実数である。(80) 式をさらに簡単化することを考える。適当な直交変換 Q によって D は対角化できる。変換後の D を $\bar{D}$ とおくと

$$\bar{D}=QDQ^{-1}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (81)$$

この直交変換 Q によって応力テンソル T も変換を受ける。これを $\bar{T}$ とおくと

$$\bar{T}=QTQ^{-1}$$

(80), (81) を用いると

$$\bar{T}=f(\bar{D})$$

が成立つ。いま、直交変換の1つとして

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶと

$$R\bar{D}R^{-1}=D$$

なる関係が得られる。したがって

$$R\bar{T}R^{-1}=f(R\bar{D}R^{-1})=f(D)=\bar{T} \quad \dots\dots\dots (82)$$

となるから、 $\bar{T}$ は回転（直交変換） R に対して不変である。(82) 式を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & -\bar{t}_{12} & -\bar{t}_{13} \\ -\bar{t}_{21} & \bar{t}_{22} & \bar{t}_{23} \\ -\bar{t}_{31} & \bar{t}_{32} & \bar{t}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & \bar{t}_{12} & \bar{t}_{13} \\ \bar{t}_{21} & \bar{t}_{22} & \bar{t}_{23} \\ \bar{t}_{31} & \bar{t}_{32} & \bar{t}_{33} \end{pmatrix}$$

となり、 $\bar{t}_{12}=\bar{t}_{13}=\bar{t}_{21}=\bar{t}_{23}=\bar{t}_{31}=\bar{t}_{32}=0$ を得る。

同様に、直交変換

$$R'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶと、 $R'\bar{T}R'^{-1}=\bar{T}$ から $\bar{t}_{13}=\bar{t}_{23}=\bar{t}_{31}=\bar{t}_{32}=0$ を得る。したがって、 $\bar{t}_{11}=\bar{t}_1, \bar{t}_{22}=\bar{t}_2, \bar{t}_{33}=\bar{t}_3$ とおくと

$$\bar{T}=\begin{pmatrix} \bar{t}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{t}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{t}_3 \end{pmatrix}$$

と書ける。幾何学的には R, R' はそれぞれ x_1 軸, x_3 軸のまわりに 180° 回転することであり、(82) 式はこの回転に対して $\bar{T}$ が不変であることを表わしている。

このように $\bar{T}$ も対角行列で表わされたから、 $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3$ は $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ の関数となる。

$$\bar{t}_i=f_i(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3), \quad i=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (83)$$

まず、 $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ が互いに異なると仮定し

$$\bar{t}_i=\varphi_0+\varphi_1\bar{d}_i+\varphi_2\bar{d}_i^2, \quad i=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (84)$$

とおく。ここで、 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ は $\bar{d}_i$ の関数である。 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ を未知数と考え、 $\bar{d}_i$ が与えられると $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ は必ず決定できる。すなわち、

$$A=\begin{vmatrix} 1 & \bar{d}_1 & \bar{d}_1^2 \\ 1 & \bar{d}_2 & \bar{d}_2^2 \\ 1 & \bar{d}_3 & \bar{d}_3^2 \end{vmatrix} = (\bar{d}_1-\bar{d}_2)(\bar{d}_2-\bar{d}_3)(\bar{d}_3-\bar{d}_1) \neq 0$$

だから

$$\varphi_0=\frac{1}{A}\begin{vmatrix} \bar{t}_1 & \bar{d}_1 & \bar{d}_1^2 \\ \bar{t}_2 & \bar{d}_2 & \bar{d}_2^2 \\ \bar{t}_3 & \bar{d}_3 & \bar{d}_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_1=\frac{1}{A}\begin{vmatrix} 1 & \bar{t}_1 & \bar{d}_1^2 \\ 1 & \bar{t}_2 & \bar{d}_2^2 \\ 1 & \bar{t}_3 & \bar{d}_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & \bar{d}_1 & \bar{i}_1 \\ 1 & \bar{d}_2 & \bar{i}_2 \\ 1 & \bar{d}_3 & \bar{i}_3 \end{vmatrix}$$

となる。 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ は $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ に関して対称、 $\bar{D}$ の主不変量は $I_1 = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3$, $I_2 = \bar{d}_1\bar{d}_2 + \bar{d}_2\bar{d}_3 + \bar{d}_3\bar{d}_1$, $I_3 = \bar{d}_1\bar{d}_2\bar{d}_3$ であるから、 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ は I_1, I_2, I_3 の関数と考えられる。したがって

$$\bar{T} = \varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \bar{D} + \varphi_2 \bar{D}^2 \quad (85)$$

ここで、 $\varphi_0 = \varphi_0(I_1, I_2, I_3)$

$$\varphi_1 = \varphi_1(I_1, I_2, I_3)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(I_1, I_2, I_3)$$

つぎに、 $\bar{D}$ の固有値が等しい、たとえば $\bar{d}_1 = \bar{d}_2$ のとき、対応する $\bar{T}$ の固有値も等しい、 $\bar{i}_1 = \bar{i}_2$ 、ので

$$\bar{T} = \varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \bar{D} \quad (86)$$

$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \bar{d}_3$ のときは $\bar{i}_1 = \bar{i}_2 = \bar{i}_3$ となり

$$\bar{T} = \varphi_0 \mathbf{E} \quad (87)$$

となる。

したがって、純粘性流体のレオロジ式は I_D, II_D, III_D を変形速度テンソル D の主不変量とすると

$$T = \varphi_0(I_D, II_D, III_D) \mathbf{E} + \varphi_1(I_D, II_D, III_D) D$$

$$+ \varphi_2(I_D, II_D, III_D) D^2 \quad (88)$$

である。

非圧縮性流体では連続の式から

$$\text{tr} D = I_D = 0 \quad (89)$$

であるから、(88) 式は

$$T = \varphi_0(II_D, III_D) \mathbf{E} + \varphi_1(II_D, III_D) D + \varphi_2(II_D, III_D) D^2 \quad (90)$$

となる。 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ はスカラー値関数である。いま、

$$\varphi_0 = -p \quad \text{とおくと}$$

$$T = -p \mathbf{E} + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2$$

さらに、

$$T = -p \mathbf{E} + \sigma \quad (91)$$

とおき、 σ を偏差応力と呼ぶ。

高分子流体力学でよく用いられるべき乗則モデルは

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1(II_D) \\ \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

とし、さらに

$$\varphi_1(II_D) = 2\eta_0 [4 | II_D |]^{\frac{n-1}{2}}$$

とおいた特別な場合である。ただし、 η_0, n は物質固有の定数である。

書

評

毛製品の防虫加工

The Textile Institute が出版している定期刊行物、Textile Progress の特集号 "Mothproofing" が最近出版された。本書は、防虫加工の現状を最近の文献から紹介する小冊子 (B 5 判15ページ) である。

全体は次の7章から成る。1. 毛製品の害虫、2. 防虫性試験、3. 防虫剤の分析、4. 防虫剤の環境への影響、5. 新しい防虫加工の研究、6. 一時的な防虫加工法、7. 現在の防虫加工剤。毛製品の害虫による被害は、ここ10年世界的に急増しており、特にオーストラリアでは common clothes moth, case-bearing clothes moth という2種の害虫が、ディルドリンに対して抵抗力を増しているといわれる。このような現状に合わせてか、近年防虫性の試験が改訂された (BS 4797, ISO/DIS 3998, AS 2001 など)。一方、防虫剤には環境汚染問題が生じており、現在、ディルドリンはほとんどの国でその使用が制限されている。ピレスロイド系防虫剤は水棲生物に対して毒性をもつといわれるが、最近注目されている防虫剤 Permethrin は生分解されるという研究報告があり、すでに商品化されて各国で使用している。

新しい防虫加工法として、反応染料による染色法と同じ手軽さで処理できる繊維反応型の有機りん系防虫剤の研究が進められている。反応様式は防虫剤の活性部分と繊維とのエステル結合である。このほかに防剤として、アンモニア化合物、陰イオン系界面活性剤、酢酸亜鉛を使った研究報告があるが、それぞれ一長一短がある。また、変わったところではマイクロ ウェーブを照射することで物理的に害虫を死滅させる方法が研究され、4 min 間のマイクロ ウェーブ照射で100%死滅するという。

本書は小冊子ながら、巻末には100以上の文献とそれを主題から検索できる Subject Index が付いていて、利用価値が高く、この分野の研究者に一読を勧めたい文献である。(W)