流れ中における線状体の運動

(第1報) 運動方程式の導出と一様流れ中での運動への適用

大阪大学 工学部 堀 川 明 (会員)
大阪大学 工学部 千 葉 訓 司 ()

Motion of a Slender Body in Flow.

Part 1: Fundamental Equation and its Application to the Motion in the Uniform Flow.

Akira Horikawa and Kunji Chiba,

*Department of Mechanical Engineering, Osaka University,
Suita, Osaka.*

Abstract

The motion of fibers in a fluid is a fundamental phenomenon for the textile technology. In this paper, a slender body is used as the simplest model of a single fiber. Equations of motion of a slender body in the flow have been derived and they have been applied to the falling motion in horizontal uniform flow. Influences of fluid velocity and slender body length on the behaviors of the body have been investigated by numerical calculation. The obtained results are as follows:

(1) A slender body, which begins to move in an inclined direction to the vertical, approaches to the vertical direction immediately after the beginning of the motion. Thereafter, its direction of the motion slowly approaches to the horizontal direction and the trajectory of its mass center has an inflection point. then the body begins to approach to the vertical direction again. Finally it approaches to the horizontal posture asymptotically, it falls vertically at the same constant speed as that in still liquid and moves horizontally at the same speed as the fluid velocity without rotation.

(2) The fluid velocity influences the motion of the body only within the small region after the starting in motion (until the body inclines to about 15° to the vertical for 30 mm in length). Beyond this region the relative translational motion of the body to the fluid is independent of the fluid velocity. Therefore, the body rotation is also unaffected by the fluid velocity. And there is a tendency for fluid velocity to have more remarkable influences on the behaviors with decreasing length.

(Received July 1, 1982)

摘 要

流体中における繊維の運動は、繊維工業の各種工程で重要な基本現象の1つである。ここでは、繊維のもっとも簡単なモデルとして線状体を考え、線状体が単一で流れ中を運動する場合について理論式を導いた。そして、それを水平一様流れ中での線状体の自由落下運動に適用し、数値計算により流速と線状体長さが運動特性に及ぼす影響を調べた。得られた結果はつぎのとおりである。

- (1) 最初鉛直な姿勢で落下した線状体は、鉛直方向に対してある角度をもって運動し始めるが、すぐに重心の運動方向がいったん鉛直方向に近づく。その後、運動方向は徐々に水平方向に近づくが、やがてふたたび鉛直方向に近づく始める。そして、最終的に線状体の姿勢は水平方向に漸近し、線状体は水平姿勢を保ったまま鉛直方向には静止流体中での場合と同一の一定速度で落下し、水平方向には流速と同一速度で移動する。
- (2) 流速は、運動開始後の小さい領域 ($l=30$ mm の場合、 $\theta < 15^\circ$ の領域) でのみ運動特性に影響を与える。その後は流れに対する線状体の相対的な並進運動が流速に関係なく同じになる。このため、線状体の回転運動も流速の影響を受けない。また、流速の影響は長さが小さいほど顕著に現われる傾向にある。

(昭和57年7月1日受理)

1. まえがき

繊維工業の各種工程において、繊維あるいは繊維集団を流体輸送する技術は広く応用されており、それに関する研究も、生産性、省力化ならびに製品品質と関連させておこなわれている。このように応用面で先行している繊維の流体輸送も、その基本的事項、たとえば流れ中で繊維がどのように姿勢や速度を変えるか、また、その運動状態が繊維製品の品質にいかに関与するかなどほとんど不明である。

一方、管内流れ中での繊維の運動に関する研究としては、オープン エンド精紡機のコミング ローラとロータ入口間の短いダクト内を空気輸送される繊維の速度を調べた Ripka¹⁾の研究、縮小管を使用して流れ方向に繊維を配列させる方法に関する Edberg²⁾の研究、同じく縮小管の代りに主流を横断するシェットを用いて繊維の配列化を計った Bangert ら³⁾の研究、さらに真直な管路内を気流によって運ばれる繊維の挙動に関する宇野ら⁴⁾の研究などがある。しかし、それらはいずれも現象論にとどまり、繊維の運動状態に着目してその挙動を詳細に検討したものはほとんどない。

そこで、本研究では繊維のもっとも簡単なモデルとして直線の線状体（以下、本報では単に線状体という場合には、長さや直径の比が大きい円柱を意味する）を考え、これが単一で粘性流体の流れ中で自由落下する場合について理論解析と実験をおこない、線状体の基本的運動特性を明らかにする。既報⁵⁾では、H. Lamb による静止した非粘性流体中での物体の運動に関する解析結果⁶⁾を基にして、静止した粘性流体中での線状体の運動を解析した。流れ中での場合、この結果を直接適用することはできないが、H. Lamb の考え方を拡張することにより線状体の運動方程式を導くことができる。そして、得られた運動方程式をつぎの3つの場合

- (1) 一様流れ中
- (2) 矩形管内の十分に発達した流れ中
- (3) 矩形管内の助走域

へ適用し、数値計算をおこなう。また、矩形管内の助走域での線状体の運動を実験により調べる。

本報では、流れ中における線状体の運動方程式の導出とそれを水平な一様流れ中での自由落下運動に適用したときの結果について報告する。そして、続報で矩形管内流れ中での線状体の運動特性に関して数値計算結果と実験結果を比較検討する。

2. 流れ中における線状体の運動に関する理論

2.1 線状体の運動方程式

線状体の運動を理論的に考えるため、つぎの仮定を設

ける。

- (1) 線状体は長さや直径の比の大きいまっすぐな円柱とする。
- (2) 線状体の軸の回りの回転は考えない。
- (3) 線状体は一平面内で運動する。
- (4) 流体を非粘性とみなし線状体の運動方程式を導く。
- (5) 線状体が粘性流体中で運動する場合、粘性の効果は線状体に作用する外力として取扱う。

なお、仮定(2)は既報⁷⁾の線状体回りの流れ模様の観察から、さらに、仮定(3)は矩形管内の助走域での線状体の落下実験から確かめられている。

今、図1に示すように線状体とともに運動する座標系

図1 座標系および線状体に作用する外力

を ox, oy , その原点（線状体の重心）の座標を (X, Y) とし、 X 軸、 Y 軸をそれぞれ水平方向および鉛直方向に定め、 x 軸の X 軸に対する角度を θ とする。以下では θ を線状体の回転角と呼ぶ。また、線状体重心の並進速度の x, y 方向成分を u, v , z 軸回りの角速度を r とすると、仮定(1)~(3)により、線状体の運動にともなって増加するこの運動系の全運動エネルギー T は、線状体が非粘性流体に与える運動エネルギー T_1 と線状体の運動エネルギー T_2 の和であり、

$$T = T_1 + T_2 \dots\dots\dots(1)$$

で表わされる。

T_2 は静止流体中での場合と同様に

$$2T_2 = A_2u^2 + B_2v^2 + R_2r^2 \dots\dots\dots(2)$$

となり、係数 A_2, B_2 は線状体の質量、 R_2 は z 軸回り

の慣性モーメントであるので、線状体の直径、長さおよび密度を d , l , ρ_b とすると、

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= B_2 = \rho_b \pi d^2 l / 4 \\ R_2 &= \rho_b \pi d^2 l^3 / 48 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。

一方、 T_{1x} は x , y 方向の並進運動に関する項 T_{1x} , T_{1y} と z 軸回りの回転に関する項 T_{1z} に分けて計算する。また、 T_1 は速度ポテンシャルを ϕ とすると、

$$2T_1 = -\rho \iint \phi \partial \phi / \partial n ds \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。ただし、 ρ は流体の密度、 n は表面の任意の点での外向き単位法線であり、積分は線状体の全表面にわたっておこなう。

(a) T_{1x} の計算

図2に示すように、流速 W_x の流れ中を直径 d , 長さ

図2 流速 W_x の流れ中を速度 u で動く円柱

l の円柱が軸に直角な方向に速度 u で運動する場合を考える。ここで、無限長円柱に対する速度ポテンシャルを用いると、このときの流れは

$$\phi = W_x (\sigma + d^2/4\sigma) \cos \varphi - (ud^2/4\sigma) \cos \varphi \dots\dots\dots (5)$$

となる。ただし、 (σ, φ, y) は円柱重心を原点とする円柱座標である。したがって、(4)式より、

$$2T_{1x} = (\rho \pi d^2 l / 4) [u^2 - (2u/l) \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy] \dots\dots\dots (6)$$

となる。有限長円柱の場合、端面近傍では(5)式は適用できないが、 l/d が大きい場合には(6)式は十分な精度で成立つ。

ここで、 $A_1 = \rho \pi d^2 l / 4$ とおくと（静止した非粘性流体中では、 $2T_{1x} = A_1 u^2$ で表わされた。既報⁵⁾の(5)式参照）、

$$2T_{1x} = A_1 [u^2 - (2u/l) \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy] \dots\dots\dots (7)$$

である。

(b) T_{1y} の計算

図3に示すように、両端面付近の流速が W_{y1} , W_{y2}

図3 流れ中を速度 v で動く円柱

である流れ中を円柱が軸方向に速度 v で運動する場合を考える。ここで、静止した非粘性流体中での場合と同様に、円柱に対する ϕ が直径 d の円板が面に直角な方向に速度 v で運動する場合の ϕ と同じであると仮定すると、非粘性流体が得る運動エネルギー T_{1y} は、円板が流速 W_{y1} の流れ中を動くときの片面に対するエネルギーと流速 W_{y2} の流れ中を動くときの片面に対するエネルギーの和で表わされ、

$$2T_{1y} = (\rho d^3 / 3) [v^2 - v(W_{y1} + W_{y2})] \dots\dots\dots (8)$$

となる。

ここで、 $B_1 = \rho d^3 / 3$ とおくと（静止した非粘性流体中では、 $2T_{1y} = B_1 v^2$ で表わされた。既報⁵⁾の(7)式参照）、

$$2T_{1y} = B_1 [v^2 - v(W_{y1} + W_{y2})] \dots\dots\dots (9)$$

である。

(c) T_{1z} の計算

流速 W_x の流れ中において円柱が z 軸回りを角速度 r で回転するとき、非粘性流体に与えられるエネルギーは T_{1z} の結果を利用して、

$$\begin{aligned} 2T_{1z} &= (\rho \pi d^2 / 4) \int_{-l/2}^{l/2} (r^2 y^2 - 2ryW_x) dy \\ &= \rho \pi d^2 l^3 r^2 / 48 - (\rho \pi d^2 r / 2) \int_{-l/2}^{l/2} yW_x dy \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $R_1 = \rho \pi d^2 l^3 / 48$ とおくと（静止した非粘性流体中では、 $2T_{1z} = R_1 r^2$ で表わされた。既報⁵⁾の(9)式参照）、

$$2T_{1z} = R_1 r^2 - 2R_1 (12/l^3) r \int_{-l/2}^{l/2} W_x y dy \dots\dots\dots (11)$$

である。

したがって、(7), (9), (11)式から

$$\begin{aligned} 2T_1 &= A_1 u^2 + B_1 v^2 + R_1 r^2 - 2(A_1/l) u \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \\ &\quad - B_1 v (W_{y1} + W_{y2}) - 2R_1 (12/l^3) r \int_{-l/2}^{l/2} W_x y dy \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。

また、線状体の密度 ρ_b , 流体の密度 ρ および線状体の形状（直径 d , 長さ l ）で決まる定数を

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = (\rho + \rho_b) \pi d^2 l / 4 \\ B &= B_1 + B_2 = \rho d^3 / 3 + \rho_b \pi d^2 l / 4 \\ R &= R_1 + R_2 = (\rho + \rho_b) \pi d^2 l^3 / 48 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

とすると、(2)、(12)式から、線状体の運動にともなって増加するこの運動系の全運動エネルギーは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} 2T &= Au^2 + Bv^2 + Rr^2 - 2(A_1/l) u \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \\ &\quad - B_1 v (W_{y1} + W_{y2}) - 2R_1 (12/l^3) r \int_{-l/2}^{l/2} W_x y dy \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

一方、運動方程式は静止流体中での場合には既報⁵⁾の(13)式で表わされるが、流れ中での場合、角運動量の釣合いを表す第3式において流体の角運動量に関する項は u を $u - \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy$ 、 v を $v - (W_{y1} + W_{y2})/2$ と置換える必要がある。したがって、運動方程式はつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\partial T / \partial u) &= r (\partial T / \partial v) + X \\ \frac{d}{dt} (\partial T / \partial v) &= -r (\partial T / \partial u) + Y \\ \frac{d}{dt} (\partial T / \partial r) &= [v - (W_{y1} + W_{y2})/2] \partial T_1 / \partial u \\ &\quad - \left[u - \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \right] \partial T_1 / \partial v \\ &\quad + v (\partial T_2 / \partial u) - u (\partial T_2 / \partial v) + N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 t は時間、 X 、 Y は線状体に作用する外力の x 、 y 方向成分、 N は回転モーメントである。

(2)、(12)、(14)式を(15)式へ代入すると、

$$\left. \begin{aligned} Adu/dt &= rBv - rB_1 (W_{y1} + W_{y2})/2 \\ &\quad + (A_1/l) \frac{d}{dt} \left(\int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \right) + X \\ Bdv/dt &= -rAu + r(A_1/l) \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \\ &\quad + (B_1/2) d(W_{y1} + W_{y2})/dt + Y \\ Rdr/dt &= (A_1 - B_1) \left[u - \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy \right] \\ &\quad \cdot [v - (W_{y1} + W_{y2})/2] \\ &\quad + R_1 (12/l^3) \frac{d}{dt} \left(\int_{-l/2}^{l/2} W_x y dy \right) + N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。

ここで、次式のような置換えをおこなうと、

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} W_x dy, \quad U_2 = (12/l^3) \int_{-l/2}^{l/2} W_x y dy \\ V &= (W_{y1} + W_{y2})/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(16)式は

$$\left. \begin{aligned} Adu/dt &= r(Bv - B_1 V) + A_1 dU_1/dt + X \\ Bdv/dt &= -r(Au - A_1 U_1) + B_1 dV/dt + Y \\ Rdr/dt &= (A_1 - B_1) (u - U_1) (v - V) \\ &\quad + R_1 dU_2/dt + N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。

なお、 U_1 は y 方向に沿って分布する流速の x 方向成分 W_x の平均値、 U_2 中の積分は W_x の線状体重心回りの一次モーメント、そして、 V は両端面での流速の y 方向成分の平均値を表わしている。

一方、線状体重心の X 、 Y 方向速度は次式より求まる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ \dot{Y} &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、記号 $\dot{}$ は時間に関する微分を表わす。また、加速度 $\ddot{X}$ 、 $\ddot{Y}$ は(19)式から次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= \dot{u} \cos \theta - \dot{v} \sin \theta - (u \sin \theta + v \cos \theta) r \\ \ddot{Y} &= \dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta + (u \cos \theta - v \sin \theta) r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

2.2 線状体に作用する外力および回転モーメントの計算

外力および回転モーメントの計算は、静止流体中での場合⁵⁾に詳細に述べているので、ここでは静止流体中と異なる点についてのみ詳細に述べ、その他の点は簡単に説明する。

図1に示すように、線状体の端面に働く抗力を D_d 、端面以外の部分が流体から受ける抗力の x 、 y 方向成分を D_x 、 D_y 、また、重力と浮力の差による外力を F_G とすると、線状体に作用する外力 X 、 Y は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} X &= D_x - F_G \sin \theta \\ Y &= D_y + D_d - F_G \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

なお、

$$F_G = (\rho_b - \rho) g \pi d^2 l / 4 \dots\dots\dots (22)$$

となる。ただし、 g は重力加速度である。

ここで、線状体を n 個の微小要素に分け、その長さを Δl 、 i 番目の要素の重心の位置を y_i とする。また、 y_i における流速を W_i 、水平方向に対する角度を θ_{fi} とすると、線状体に対する流体の相対速度の x 、 y 方向成分 U_{ri} 、 V_{ri} は、

$$\left. \begin{aligned} U_{ri} &= W_i \cos (\theta + \theta_{fi}) - (u - y_i r) \\ V_{ri} &= -W_i \sin (\theta + \theta_{fi}) - v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

となる。

対象としている線状体は長さや直径の比が非常に大きいので、軸方向とある角度で運動する線状体回りの流れに対し独立の原理が適用できると仮定する。したがって、 D_x は

$$D_x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho d \Delta l \cdot C_{di} U_{ri}^2 \cdot \text{sgn}(U_{ri}) \quad \dots\dots\dots (24)$$

で表わされる。

抗力係数 C_d は U_{ri} を代表速度とするレイノルズ数

$$Re = |U_{ri}| \cdot d / \nu \quad \dots\dots\dots (25)$$

の関数であり、静止流体中での場合と同様に、 Re の範囲に応じて次式を用いることにする、ただし、 ν は流体の動粘性係数である。

$$C_d = (8\pi/Re) / [2.0022 - \ln(Re)], \quad (Re < 1) \quad \dots\dots (26a)$$

$$C_d = -4.078 + 16.631 Re^{-0.3778}, \quad (1 \leq Re \leq 5) \quad \dots\dots (26b)$$

$$C_d = (0.707 + 3.42 Re^{-1/2})^2, \quad (5 < Re < 37) \quad \dots\dots (26c)$$

$$C_d = 0.95 + 4 Re^{-1/2}, \quad (37 \leq Re) \quad \dots\dots (26d)$$

一方、 D_y は摩擦抗力のみであり、その軸方向が流れに傾いて置かれている柱状体の軸方向の摩擦抗力は、流れに直角に置かれている同一形状の柱状体の表面におけるプラントル数 $Pr = 1$ の場合の強制対流熱移動と相似となるので、

$$D_y = \sum_{i=1}^n \pi \rho \nu V_{ri} \cdot \Delta l \cdot Nu_i \quad \dots\dots\dots (27)$$

で表わされる⁸⁾。

ヌッセルト数 Nu は Re の関数であり、ここでも静止流体中での場合と同様に空気に対する実験式⁹⁾を用いる。

$$Nu = 0.36 + 0.48 Re^{1/2}, \quad (0.1 < Re < 10^3) \quad \dots\dots\dots (28)$$

また、線状体の端面に働く抗力 D_d は、先端部 ($y = -l/2$) と後端部 ($y = l/2$) における抗力を D_{d1} 、 D_{d2} とすると、 $D_d = D_{d1} + D_{d2}$ である。抗力係数の値として $C_d = 1$ を採用すると、

$$D_{d1} = \begin{cases} 1/2 \rho (\pi d^2/4) (V_r|_{y=-l/2})^2, & V_r|_{y=-l/2} > 0 \\ 0, & V_r|_{y=-l/2} \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (29a)$$

$$D_{d2} = \begin{cases} -1/2 \rho (\pi d^2/4) (V_r|_{y=l/2})^2, & V_r|_{y=l/2} < 0 \\ 0, & V_r|_{y=l/2} \geq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (29b)$$

となる。ここで、 $V_r|_{y=-l/2}$ 、 $V_r|_{y=l/2}$ は両端面での流体の相対速度であり、23式の第2式から求められる。

最後に、線状体に作用する回転モーメント $\mathbf{N}$ は D_x に基づくものであり、

$$\mathbf{N} = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho d \Delta l \cdot C_{di} U_{ri}^2 y_i \cdot \text{sgn}(U_{ri}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。

以上のようにして、 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Y}$ および $\mathbf{N}$ を求め、線状体の運動方程式(18式)と重心の速度を表わす(19式)の連立微分方程式を数値計算し、線状体重心の軌跡、速度、加速度および姿勢、角速度を求める。

3. 一様流れ中における線状体の運動の数値計算

3.1 線状体の運動方程式

2章で得られた結果を、流れ方向が水平 (X 方向) である一様流れ中における線状体の運動に適用することを考える。流速を W とすると、水平方向に対する流れの角度は $\theta_f = 0$ であるので、 $W_x = W \cos \theta$ 、 $W_{y1} = W_{y2} = -W \sin \theta$ となる。したがって、(17式)から

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= W \cos \theta, \quad U_2 = 0 \\ V &= -W \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となり、また

$$\left. \begin{aligned} dU_1/dt &= -r W \sin \theta \\ dV/dt &= -r W \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

であるから、一様流れ中における運動方程式が、(18式)よりつぎのように得られる。

$$\left. \begin{aligned} Adu/dt &= r Bv - r (A_1 - B_1) W \sin \theta + \mathbf{X} \\ Bdv/dt &= -r Au + r (A_1 - B_1) W \cos \theta + \mathbf{Y} \\ Rdr/dt &= (A_1 - B_1) (u - W \cos \theta) (v + W \sin \theta) + \mathbf{N} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

上式は、静止流体中における線状体の運動方程式 (既報⁹⁾ の(14式)で u 、 v の代りに流体に対する相対速度 $u - W \cos \theta$ 、 $v + W \sin \theta$ を用いても求める。

数値計算は流体として水を考え、 $d = 0.569 \text{ mm}$ とし (ただし、試料は既報⁹⁾ の No. 1 試料である)、表 1 に示すように線状体長さや流速を変えておこなった。なお、流れ中での結果と比較するために静止流体中における数値計算もおこなった。ここで、初期回転角 θ_0 とは初期位置での線状体の回転角である。

また、水の物性値は、水温 18°C に対する値、 $\rho = 1.018 \times 10^{-7} \text{ gs}^2/\text{mm}^4$ 、 $\nu = 1.058 \text{ mm}^2/\text{s}$ とした。

座標系の定義より Y 、 $\dot{Y}$ の結果は負となるが、鉛直方向下向きを正の向きとして線状体の運動特性を図示する。

3.2 線状体の軌跡

図 4 に $l = 30 \text{ mm}$ 、 $W = 0 \sim 80 \text{ mm/s}$ の場合の軌跡を示す。図中の線状体の時間間隔は $\Delta t = 0.4 \text{ s}$ である。

静止流体中では、落下開始直後の領域で水平方向の加速度が鉛直方向の加速度に比べて非常に小さく、線状体はほとんど鉛直方向に運動し始める。そして、線状体が

表 1 数値計算条件

線状体直径 d (mm)	線状体密度 ρ_b (gs ² /mm ⁴)	初期回転角 θ_0 (°)	線状体長さ l (mm)	流 速 W (mm/s)	初 速 度		初期角速度 r_0 (rad/s)
					u_0 (mm/s)	v_0 (mm/s)	
0.569		1 1.659×10^{-7}	30	0	-1.0×10^{-2}	-1.0×10^{-2}	1.0×10^{-4}
				20 40			
				60 80			
			15 45 60	0 60

図 4 落下軌跡に及ぼす流速の影響

徐々に水平方向に回転するにつれて水平方向速度 $\dot{X}$ が増大し、重心の軌跡は変曲点をもつ曲線になる。最終的に θ は 90° に漸近し、しかも線状体は水平方向にはほとんど移動しなくなり、鉛直方向に一定速度で落下する。

これに対し、一樣流れ中では、線状体は運動開始と同時に水平方向にも流体から抗力を受けるため、水平方向にも急激に加速される。したがって、線状体は鉛直方向に対してある角度をもって運動し始める。この角度は流速が大きいほど大きくなる。

軌跡は $d^2Y/dX^2=0$ 、すなわち

$$\dot{Y}/\dot{X} = \ddot{Y}/\ddot{X} \quad \dots\dots\dots (34)$$

が成立つとき変曲点をもつので、軌跡の変曲点は重心の運動方向と加速度の方向が一致する点である。

一樣流れ中では、運動開始直後に線状体は水平方向にも急激に加速されるが、水平方向加速度 $\ddot{X}$ の減少の方が鉛直方向加速度 $\ddot{Y}$ の減少より大きいため、加速度ベクトルはいったん時計回りに回転し始め、速度ベクトル

が鉛直方向に近づく。その後 $\ddot{X}$ の減少が徐々に低下するため、加速度ベクトルは反時計回りに回転するようになり速度ベクトルと一致する。この場合、両ベクトルは方向のみならず向きも一致するので、軌跡の接線勾配 dY/dX は極大になる。この変曲点の生ずる位置は、流速が大きいほど大きい。が、 $W=80$ mm/s の場合でも $Y=30$ mm 付近である。

その後も $\ddot{Y}$ は減少し負の値になるので、加速度ベクトルは反時計回りに回転し続ける。やがて、 $\ddot{X}$ も減少して負となり、速度ベクトルの方向と加速度ベクトルの方向が一致する。ただし、この変曲点では前回の場合と異なり両者の向きが逆になるので dY/dX は最小になる。その後も加速度ベクトルは回転し続け $\theta=90^\circ$ (水平な姿勢) で 0 になる。したがって、一樣流れ中では、運動開始直後に運動方向がいったん鉛直方向に近づき、その後水平方向に近づき、ふたたび鉛直方向に近づく。そして、最終的に線状体は鉛直方向には静止流体中での場合と同一の一定速度で落下し、水平方向には流速と同一速度で移動する。

ここで、 dY/dX の最小値およびそのときの θ の値と位置 X, Y を表 2 に示す。

静止流体中、一樣流れ中ともに dY/dX の値と θ の値は、長さが小さいほど大きい傾向にあるがその差はわずかである。これは、 dY/dX が最小になる θ の領域で、長さが θ と $\dot{X}$ および θ と $\dot{Y}$ の関係にほとんど影響を与えず姿勢が同じであれば線状体重心の運動方向が長さにかかわらずほぼ一致することからもわかる。また、一樣流れ中では、 dY/dX が最小になるときの θ の値が静止流体中での場合に比べて大きくなるので、長さの影響はいっそう小さくなる。しかし、長さが大きいほど線状体が回転するのに要する時間が長くなるので、 X, Y の値は大きくなる。

一方、流れの方向が水平であるので、 $\dot{Y}$ は $\theta < 15^\circ$ 程度でのみ流速の影響を受けるが、 $\dot{X}$ は θ の全領域で流速が大きいほど大きくなる (図 5, 6)。したがって、流速が大きいほど同一姿勢における重心の運動方向は水平に近くなる。さらに、 θ と $\ddot{X}$ 、 θ と $\ddot{Y}$ の関係 (図 7,

表 2 軌跡の変曲点における接線勾配、回転角およびその位置

線状体長さ l (mm)	流 速 W (mm/s)	接 線 勾 配		水平方向移動距離 X (mm)	鉛直方向移動距離 Y (mm)
		dY/dX	θ (°)		
15	0	1.934	61.6	20.4	101.8
	60	0.738	73.8	74.7	98.0
30	0	1.908	60.2	82.9	352.8
	20	1.288	65.6	143.5	358.4
	40	0.948	69.9	213.7	373.5
	60	0.739	73.3	291.7	388.2
	80	0.600	75.9	376.9	401.8
45	0	1.894	59.9	188.4	764.9
	60	0.739	73.1	650.5	874.9
60	0	1.885	59.9	337.4	1337.3
	60	0.739	73.1	1151.1	1558.2

8) から、 $\ddot{X}$ 、 $\ddot{Y}$ とともに流速の影響がみられるのは $\theta < 15^\circ$ の領域だけであるので、これ以上の領域では、同一姿勢における加速度ベクトルは流速にかかわらず一致する。また、加速度ベクトルは θ の増加にともない反時計回りに回転する。以上のことから、流速が大きいほど dY/dX の最小値は小さく、そのときの θ の値は大きくなる。

また、図11から、姿勢の変化に及ぼす流速の影響はわずかであるので、変曲点での X 、 Y の値は流速が大きいほど大きくなることがわかる。

つぎに、図 4 において、線状体の姿勢と重心の軌跡に着目すると、静止流体中では運動方向の鉛直線に対する角度はつねに θ より小さく、線状体に対する相対的な流れにより θ を増加させる向きの回転モーメントが作用している。一方、一樣流れ中では運動開始後しばらく運動方向の鉛直線に対する角度が θ より大きくなる。この状態は流速が大きいほど長時間にわたって続く。しかし、この状態においても線状体に対する相対的な流れの方向の鉛直線に対する角度は θ より小さく、線状体には θ を増大させる向きの回転モーメントが作用する。なお、運動方向が線状体の軸方向と一致するときの θ の値は、 $W=20, 40, 60, 80$ mm/s に対し $\theta = 11.6^\circ, 28.9^\circ, 43.2^\circ, 52.9^\circ$ である。

3.3 線状体重心速度

流速が重心の速度の変化におよぼす影響を図 5、6 に示す。静止流体中では、線状体は水平方向に $\theta = 43^\circ$ 程度まで徐々に加速され、その後減速されて姿勢が水平に近づく。線状体に作用する外力が釣り合うようになり、 $\theta = 90^\circ$ で $\dot{X}$ は 0 となる。

これに対し、一樣流れ中では、運動開始と同時に線状体は水平方向にも急激に加速され、その後徐々に加速さ

図 5 水平方向速度に及ぼす流速の影響

図 6 鉛直方向速度に及ぼす流速の影響

れる状態が $\theta = 43^\circ$ 程度まで続く。そして、減速されて $\theta = 90^\circ$ で $\dot{X} = W$ となる。また、静止流体中での水平方向速度を $\dot{X}_s$ とすると、一樣流れ中では $\theta > 15^\circ$ 程度の領域で

$$\dot{X} = \dot{X}_s + W \dots\dots\dots (35)$$

と表わされる。

$\ddot{X}$ および角速度 r の変化を表わす図 7, 12 から, $\theta > 15^\circ$ 程度の領域では θ と $\ddot{X}$ および θ と r の関係が流速にかかわらず同一曲線で表わされる。したがって, $d\ddot{X}/d\theta = \ddot{X}/r$ を考慮すると(35)式が成立つことがわかる。

$\dot{X}$, $\dot{Y}$ の最大値とそのときの θ の値を示す表 3 から流速に関係なく θ の値は一致し, $\dot{X}$ の最大値は(35)式で表わされる。

一方, 線状体は運動開始と同時に重力と浮力の差による外力の作用を受けて鉛直方向に急激に加速される。 $l = 30\text{ mm}$ の場合, $W \leq 80\text{ mm/s}$ の範囲内では $\theta < 5^\circ$ で鉛直方向に加速され, その後抗力が増大するため, θ の増加とともに $\dot{Y}$ は単調に減少する。なお, 図 6 には $W = 0$ と 80 mm/s の曲線しか記載していないが, $W = 20, 40, 60\text{ mm/s}$ の曲線はこの曲線の間に順番に並ぶ。

また, 図 8 から, θ と $\dot{Y}$ の関係は $\theta < 15^\circ$ 程度の領域では流速の影響を受けるが, これを越えると流速にかかわらず同一曲線で表わされる。したがって, $\dot{X}$ の場合と同様に $d\dot{Y}/d\theta = \dot{Y}/r$ を考慮すると, θ と $\dot{Y}$ の関係は $\theta > 15^\circ$ 程度の領域で流速の影響を受けないことがわかる。そして, 流速の影響は, 流速が大きいほど $\dot{Y}$ は小さく, 表 3 から θ がより大きくなるまで加速されるという点である。

つぎに, 加速度の変化について調べる。図 7, 8 には, 流速の影響を明確に表わすため影響が現われる領域での変化だけを示している。

静止流体中では, $\ddot{X}$ はいったん増大して $\theta = 6^\circ$ 程度で最大となり, それから減少するのに対し, 一樣流れ中では, $\ddot{X}$ は運動開始時から急激に減少する。その後 $\ddot{X}$ は徐々に減少するようになり, 静止流体中での曲線に漸近する。そして, $\theta > 15^\circ$ 程度で流速にかかわらず同一

図 7 水平方向加速度に及ぼす流速の影響

図 8 鉛直方向加速度に及ぼす流速の影響

表 3 線状体重心の速度の最大値およびそのときの回転角

線状体長さ l (mm)	流 速 W (mm/s)	水平方向速度の最大値		鉛直方向速度の最大値	
		$\dot{X}_{\max}$ (mm/s)	θ (°)	$\dot{Y}_{\max}$ (mm/s)	θ (°)
15	0	49.49	44.9	242.3	3.32
	60	109.48	45.3	198.6	9.64
30	0	52.14	43.1	297.0	2.36
	20	72.14	42.9	272.1	3.62
	40	92.14	43.0	264.8	4.27
	60	112.14	43.0	261.0	4.51
45	80	132.14	43.1	258.6	4.66
	0	53.32	42.4	329.4	1.88
60	60	113.32	42.2	301.0	3.06
	0	53.99	41.9	351.6	1.67
60	60	113.99	41.8	329.3	2.33

曲線で表わされる. $\theta > 15^\circ$ の領域では, $\dot{X}$ は $\theta = 43^\circ$ 程度で正から負へ移り, $\theta = 65^\circ$ 付近で最小となり $\theta = 90^\circ$ でふたたび 0 になる.

一方, $\dot{Y}$ は急激に減少して, $\theta < 5^\circ$ の領域で正から負へ移り最小値をもち, 増大して $\theta = 90^\circ$ でふたたび 0 になる. θ の小さい領域では $\dot{Y}$ の値は流速により異なるけれども, その変化の様子は同じである. そして, θ が増加するにつれて一様流れ中での曲線は静止流体中での曲線に漸近し, $\theta > 15^\circ$ 程度では同一曲線で表わされる.

最後に, 長さの影響を表わす図9, 10において, $\dot{X}$ は

図9 水平方向速度に及ぼす長さの影響

図10 鉛直方向速度に及ぼす長さの影響

$\theta < 65^\circ$ 程度の領域では l が大きいほど大きい, これ以上の領域では l が小さい方がわずかに大きくなる. しかし, l の影響は $\theta < 65^\circ$ の場合と比較して無視しうるほど小さい. 一方, $\dot{Y}$ は $\theta < 60^\circ$ 程度で l が大きいほど大きい, その後は l の影響を受けない. また, 表3から, l が小さいほど姿勢がより水平に近くなるまで線状体は水平および鉛直方向に加速されることがわかる. 以上述べた長さの影響は, 静止流体中の場合と同じである. なお, 表3から, 静止流体中の場合と一様流れ中の場合の $\dot{Y}$ の最大値の差および θ の値の差は, l が小さいほど大

きいことがわかる. すなわち, l が小さいほど流速の影響を受けやすい.

図11 姿勢に及ぼす流速の影響

図12 角速度に及ぼす流速の影響

3.4 線状体の姿勢

図11, 12において, 一様流れ中でも静止流体中でも, t に対する θ の変化は下に凸の曲線で始まり, $\theta = 16^\circ$ 程度で変曲点をもち $\theta = 90^\circ$ に漸近する曲線になる. すなわち, 角速度 r は $\theta = 16^\circ$ 程度まで加速されるが, r の増大にともない線状体の回転を押える向きに作用する回転モーメント $\mathbf{N}$ が増大するため, これ以上の領域では減速される. 姿勢が水平に近づくとき線状体に作用する外力は釣合ようになり, 流体に対する線状体の相対速度の軸方向成分 $v + W \sin \theta$ と回転モーメント $\mathbf{N}$ が 0 に近づくので, 運動方程式(3)の第3式を考慮すると, 線状体は回転運動しなくなり, もっとも安定した水平姿勢を保ち続けることがわかる. 図11, 12には $W = 0$ と 80 mm/s の曲線しか記載していないが, $W = 20, 40, 60$ mm/s の曲線はこの曲線の間に順番に並ぶ.

ここで, $W = 0$ と $W = 80$ mm/s の r の変化を比較すると, $\theta < 15^\circ$ 程度で差が見られる. θ が 2.5° 付近までは $W = 80$ mm/s の方が r の値は大きい, これを越えると逆に $W = 0$ の方が大きくなる. しかし, $W = 80$ mm/s の曲線は $W = 0$ の曲線に近づき, $\theta > 15^\circ$ では同

一曲線で表わされる。

$\theta > 15^\circ$ で線状体の回転が流速に関係しなくなることについてはつぎのように考えればよい。

前節で述べたように、この領域では $\dot{X}$ に関して (35) 式が成立ち、 $\dot{Y}$ は流速の影響を受けない。したがって、(19) 式から

$$\left. \begin{aligned} u - W \cos \theta &= \dot{X}_s \cos \theta + \dot{Y}_s \sin \theta \\ v + W \sin \theta &= -\dot{X}_s \sin \theta + \dot{Y}_s \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

となる。(36) 式の右辺はそれぞれ静止流体中における u , v である。また、第 1 式から、流体の線状体に対する相対速度の軸に直角方向成分が流速に関係なく等しいので、回転モーメント N も等しくなる。よって、運動方程式 (33) の第 3 式を考慮すると、角加速度 dr/dt は流速にかかわらず等しいことがわかる。すなわち、流れに対する線状体の相対的な並進運動が流速に関係なく同じになる。線状体の回転運動も流速の影響を受けない。

図 11 において同一落下時間での θ の値は $W=80$ mm/s の場合の方が大きくなる。これは運動開始直後の角速度の差によって生じたものである。また、 $W=80$ mm/s の曲線を横軸に沿って平行移動すると、この曲線は $\theta > 15^\circ$ では $W=0$ の曲線に重なる。

つぎに、図 13 から、一樣流れ中でも長さが小さいほど線状体が回転するのに要する時間が短いことがわかる。この長さの影響は静止流体中での場合と同じである (既報⁹⁾, 4.3 節参照)。

図 13 姿勢に及ぼす長さの影響

4. 結 言

流れ中における単一の線状体の運動に関する理論式を導き、水平な一樣流れ中での自由落下運動に適用した。そして、数値計算により流速および線状体長さが運動特

性に及ぼす影響を調べた。得られた結果を要約するとつぎのとおりである。

(1) 最初鉛直な姿勢で落下した線状体は、鉛直方向に対してある角度をもって運動し始め、すぐに重心の軌跡の接線勾配 dY/dX は極大になる。その後、運動方向は徐々に水平方向に近づくが、やがて、軌跡はふたたび変曲点をもち、運動方向は鉛直方向に近づき始める。最終的に θ は 90° に漸近し、線状体は水平姿勢を保ったまま鉛直方向には静止流体中と同一の一定速度で落下し、水平方向には流速と同一速度で移動する。

(2) 運動特性に流速の影響が現われるのは、運動開始後の θ の小さい領域 ($l=30$ mm の場合、 $\theta > 15^\circ$ の領域) だけであり、これを越えると流れに対する線状体の相対的な並進運動が流速に関係なく同じになる。すなわち、静止流体中での速度成分を $\dot{X}_s$, $\dot{Y}_s$ とすると、一樣流れ中では、 $\dot{X}=\dot{X}_s+W$, $\dot{Y}=\dot{Y}_s$ となる。このため、線状体の回転運動も流速の影響を受けない。これは、流速が場所的に変化しないためである。また、流速の影響は長さが小さいほど顕著に現われる傾向にある。

本報の計算は、とくに実用的な面を考慮したものではなく、静止流体中と流れ中で線状体の運動状態がどのように変わるかを明らかにする目的でおこなったものである。したがって、流れ場の影響が適度に入ることが望ましく、そのため流速は比較的に小さくとってある。

もし、繊維の流体輸送などの実用面を重視するのであれば、試料条件を変え (例えば、直径をきわめて小さくする)、流速はもっと大きくし、しかも水平面内での運動特性に着目した方がよい。その場合には、重力は無視するという仮定を設けることにより本報で導いた運動方程式を用いて水平面内での線状体の挙動を求めることができ実用的価値も大きい。

参考文献

- 1) J. Ripka; 海外繊維技術文献集, 19, 448 (1969)
- 2) B. Edberg; Studies in Modern Yarn Production, Text. Inst., p. 96 (1968)
- 3) L. Bangert, P. Sagdeo; Text. Res. J., 47, 773 (1977)
- 4) 宇野, 垣見; 繊維学会第29回年次大会講義集, p. 3 (昭51)
- 5) 堀川, 千葉, 西谷, 上島; 繊維論文集, 33, T118 (1980)
- 6) H. Lamb; Hydrodynamics, 6th ed., p. 160, 1932, Cambridge University Press
- 7) 堀川, 千葉, 西谷, 上島; 繊維論文集, 34, T219 (1981)
- 8) Y. Choo, M. J. Caserella; J. Hydraulics, 5, 126 (1971)
- 9) L. Howarth; Modern Developments in Fluid Dynamics; High Speed Flow, Vol. II, p. 795, 1953, Oxford University Press, London