2次元繊維集合体の確率幾何

(第1報) 平面内のランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性

大阪大学 工学部 山 田 國 廣 (会員)

大阪大学 工学部 堀 川 明 ( )

Stochastic Geometry of Two-Dimensional Fiber Assemblies.

Part 1: Geometrical Properties of Polygons Formed by Random Lines in a Plane.

Kunihiro Yamada and Akira Horikawa,

*Department of Mechanical Engineering, Osaka University,
Suita, Osaka.*

Abstract

Papers, nonwoven fabrics, fiber filters are considered as systems of straight lines in different directions, distributed at random and homogeneously throughout a plane. This paper presents some theoretical and experimental discussions on the stochastic properties of aggregates of polygons formed by random lines.

The probability, $P(n)$, of finding a polygon having n sides in the system is estimated as $P(3)=0.3554$, $P(4)=0.3817$, $P(5)=0.1902$, $P(6)=0.0587$, $P(7)=0.0125$, $P(8)=0.0020$ and $P(9)=0.003$.

The mean area of n sided polygons, $E(a/n)$, is calculated as $E(a/4)=3.284$, $E(a/5)=7.277$, $E(a/6)=13.02$, $E(a/7)=20.56$, $E(a/8)=29.88$ and $E(a/9)=40.96$ with the normalization of $E(a/3)=1.000$. As the number of sides increases, the mean area increases exponentially.

Let $S(n)$ be the fraction of total area covered by all n sided polygons. Making use of the above results, $S(3)=0.0870$, $S(4)=0.3064$, $S(5)=0.3884$, $S(6)=0.1874$, $S(7)=0.0634$, $S(8)=0.0146$ and $S(9)=0.0025$ are obtained. From these it is apparent that the area covered by pentagons has the largest proportion. The experimental values obtained by Monte-Carlo simulations agree well with the theoretical results.

(Received February 4, 1983)

摘 要

目的 平面内のランダム直線によって生成される多角形の辺の数の分布, 平均面積比, 占有面積分率を理論的に求め, モンテカルロ シミュレーションによる実験結果との比較検討を行う。

成果 (1)ランダム直線による多角形の生成過程はエルボーディクなマルコフ連鎖として表わされ, 唯一の定常分布が存在する。

(2) 多角形の辺の数 n の定常分布を $P(n)$ とすれば $P(3)=0.3554$, $P(4)=0.3817$, $P(5)=0.1902$, $P(6)=0.0587$, $P(7)=0.0125$, $P(8)=0.0020$, $P(9)=0.003$ である。

(3) n 角形の平均面積を $E(a/n)$ として $E(a/3)=1$ のように規格化すると $E(a/4)=3.284$, $E(a/5)=7.277$, $E(a/6)=13.02$, $E(a/7)=20.56$, $E(a/8)=29.88$, $E(a/9)=40.96$ となる。多角形の辺の数が増えるにしたがって平均面積は指数関数的に増加する。

(4) すべての n 角形が平面内で占有する面積分率を $S(n)$ とすると $S(3)=0.0870$, $S(4)=0.3064$, $S(5)=0.3884$, $S(6)=0.1875$, $S(7)=0.0634$, $S(8)=0.0146$, $S(9)=0.0025$ となる。

(昭和58年2月4日受理)

1. まえがき

紙, 不織布, 繊維状フィルタなどの幾何学構造をモデル化して考えると, 平面の直線によるランダム分割であると考えられる。分割によって生成される多角形の幾何学特性は辺の数 n , 周の長さ l , 面積 a などによって与えられる。繊維集合体の物理的, 力学的な特性はこれら

幾何学特性分布のなんらかの次数のモーメントに依存している。例えば繊維フィルタを通過する流体輸送量¹⁾は多角形の流体半径(面積と周長の比)の分布の4次モーメントに依存していることが報告されている。他方, 平面上のランダム直線の系に関する幾何学的な確率の問題は従来, 積分幾何学^{2,3)}の一分野として研究されてきた。たとえば最近の E. F. Harding, D. G. Kendall らの確

率幾何学⁴⁾は、その代表的なものといえよう。

S. Goudsmit⁵⁾ はランダム直線によって生成される多角形の幾何学特性の平均値について研究を行い $E(n)$, $E(l)$, $E(a)$, $E(a^2)$ の値を理論的に求めた。ただし、ここで $E(x)$ は変数 x の期待値 (平均値) のことである。R. E. Miles^{6,7)} は $E(n^2)$, $E(nl)$, $E(na)$, $E(l^2)$, $E(la)$ などの 2 次モーメントを求めた。3 次モーメント⁸⁾ については $E(la^2)$ は P. I. Richards によって、 $E(na^2)$ は R. E. Miles によって、 $E(a^3)$ は D. G. Kendall によって与えられているが、その他のものについてはわかっていない。

多角形の辺の数の分布 $P(n)$ については R. E. Miles⁹⁾ によって三角形の存在確率が $P(3)=2-\pi^2/6=0.3551$ で与えられている。また彼は n 角形の周長の分布 $Q(l/n)$ が自由度 2 ($n-2$) の χ^2 分布であることを証明している。しかし、すべての多角形の周長の分布 $Q(l)$ はまだ求められていない。そして n 角形の面積分布 $R(a/n)$ およびすべての多角形面積分布 $R(a)$ については両方とも理論的にはわかっていない。

S. Goudsmit, R. E. Miles らの結果は主として積分幾何によって解析的に求められているため理論値は厳密であるが、各モーメントについては 3 次の一部と 4 次以上のものが、 $P(n)$ については $n \geq 4$ のものがわかっていない。

本研究では平面のランダム直線による分割過程がある種の理想化によってマルコフ過程として扱えることを示し、推移確率行列を理論的に求め、それがエルゴード性であることを証明する。その結果、辺の数の分布 $P(n)$ をエルゴード性な、マルコフ連鎖の定常分布として求めるとともに、 k 次モーメント $E(n^k)$, n 角形の平均面積 $E(a/n)$, n 角形の占有面積分率 $S(n)$ についても理論的に誘導する。さらに分割過程の各段階における頂点の数 A , 辺の数 B , 多角形の数 C , 1 点に接している辺の数 h の平均値 $E(h)$, そして $E(n)$ などの位相幾何学的特性についても検討を行っている。

一方、コンピュータおよび線描画によるモンテカルロシミュレーション実験により $P(n)$, $E(a/n)$, $S(n)$ を求め、それらが理論値とよく合うことを確かめ、その結果が有限繊維長の場合にも適用できることを証明する。

2. モンテカルロ シミュレーション

平面上のランダム直線をつぎのように与える。

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = N \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで θ は原点から直線に引いた垂線と X 軸のなす角、 N はこの垂線の長さである。 θ , N は $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq N \leq M$ の範囲で分布する。ただし M は適当な正の定数

である。

直線の測度 dG は

$$dG = dN \wedge d\theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。ここで $\wedge$ は微分形式間の外積演算を表わしている。 N , θ を一様乱数で置換えると位置と方向がランダムな直線群になることが積分幾何³⁾によって証明されている。(1)式によって、つぎつぎに新しいランダム直線を生成し、その過程で形成される多角形の辺の数、周長、面積などを計算した。実験はコンピュータと線描画によるものとの 2 種類で行い、初期形状は半径 10 cm の円に内接する正三角形とした。直線本数は初期 3 角形内に 100 本入るまで続けた。線描画による実験の様子を図 1 に示す。

図 1 線描画によるモンテカルロ シミュレーション

3. 理 論

3.1 第 I 種分割過程によって生成される多角形の辺の分布および平均面積

1 つの多角形が直線分の新たな導入により 2 つになり、さらに直線分を導入して、分割されたまへの 2 つの多角形が両方とも分割されて 4 つになる。このように進む分割過程を第 I 種分割過程と呼ぶことにする。この種の分割を i 段階進めると生成される多角形の数 2^i となる。初期多角形の辺の数を $n_0=3$ として第 I 種分割過程の進行の様子を図 2 に示す。図からわかるように第 I 種

図 2 第 I 種分割過程の進行

分割過程は理想化された割れ目の進行過程である。

いま三角形が1本の直線分によって分割されるとき、直線分が三角形の頂点に交わる確率は0であるので、元の三角形は必ず三角形から四角形に分割される。したがって、三角形から三角形が生成される推移確率 $T(3/3)$ と三角形から四角形が生成される推移確率 $T(4/3)$ はそれぞれ $T(3/3)=0.5$, $T(4/3)=0.5$ となる。同様の推移確率を四角形以上の場合についても考える。任意の形の m 角形が直線分によって分割されて2つになるとき、1つは n 角形、他は自動的に $m-n+4$ 角形が生成される。ここで $3 \leq n \leq m+1$ である。 m 角形の形が固定されていると m 角形から n 角形になる推移確率 $T(n/m)$ が決定できる。ところで、実際の分割過程から生じる多角形は一義的に形が決まらず、まったく確率的なものである。そのため $m \geq 4$ についてはこの確率 $T(n/m)$ を幾何学的に計算することができない。そこでつぎのような理想化を行う。つまり、各分割段階で着目する多角形を同じ辺数を持つ正多角形であるとみなして $T(n/m)$ を計算する。

m 角形が分割されて n 角形が生成される場合、分割された辺と辺の間には $n-3$ 本の分割されない辺が存在する。例として $m=8$, $n=5$ の場合を図3に示す。この

図3 八角形の分割

ような状態の起こる確率 t は図4の(i)~(iv)において直線が斜線部に交わらずに白い部分のみに交わる確率を t_1 , t_2 , t_3 , t_4 とすると

$$t = t_1 + t_4 - t_2 - t_3 \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。

ところで積分幾何学の知識から凸閉領域 Γ_1 に交わるランダム直線がその内部の凸閉領域 Γ_2 にも交わる確率³⁾ は Γ_1 , Γ_2 の周長の比に等しいことがわかっているの

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{\text{多角形 } CDEFG \text{ の周長}}{\text{正八角形の周長}} \\ t_2 &= 1 - \frac{\text{多角形 } BCDEFG \text{ の周長}}{\text{正八角形の周長}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} t_3 &= 1 - \frac{\text{多角形 } CDEFGH \text{ の周長}}{\text{正八角形の周長}} \\ t_4 &= 1 - \frac{\text{多角形 } BCDEFGH \text{ の周長}}{\text{正八角形の周長}} \end{aligned} \right\}$$

図4 分割領域の分類

で与えられる。

正 m 角形において注目する2つの頂点の間に K 本と $m-K$ 本の辺が存在するとき、それら頂点間の距離を $L(m, K)$ で表わせば、簡単な幾何学的誘導より

$$L(m, K) = D \sin(K\pi/m) \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。

ここで D は正 m 角形の外接円の直径である。(4)式の各表現は正八角形から五角形が生成される場合の確率を与えているが、これを正 m 角形から n 角形になる場合に一般化すると(4), (5)式より

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{(m-n+1) D \sin(\pi/n) + D \sin\{(n-1)\pi/m\}}{D \cdot m \sin(\pi/m)} \\ &= \frac{n-1}{m} - \frac{\sin\{(n-1)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)} \\ t_2 &= t_3 = \frac{n}{m} - \frac{\sin\{(n-2)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)} \\ t_4 &= \frac{n-1}{m} - \frac{\sin\{(n-3)\pi/m\}}{m \sin(\pi/m)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

となる。

m が奇数の場合、図3で直線の通らない領域(斜線部)のとり方は m 種類存在する。さらに(6)式の $t_1 \sim t_4$ は m 角形が分割されて n 角形と $m-n+4$ 角形ができる確率になっているので m 角形から n 角形が生成される推移確率としてはその半分であることを考慮すると $T(n/m)$ はつぎようになる。

$$T(n/m) = m(t_1 + t_4 - t_2 - t_3) / 2 \quad \dots\dots\dots(7)$$

m が偶数の場合、分割された多角形の両方が $(m+4)/2$

角形になる場合があるが、直線の通らない領域のとり方が $m/2$ 種類となるので、このときも $T(n/m)$ は結局(7)式で与えられる。

(7)式へ(6)式を代入して整理すると

$$T(n/m) = \frac{[-\sin\{(n-3)\pi/m\} + 2\sin\{(n-2)\pi/m\} - \sin\{(n-1)\pi/m\}]/[2\sin(\pi/m)]}{\dots\dots\dots(8)}$$

である。

(8)式より明らかに

$$T(n/m) = T(m-n+4/m) \dots\dots\dots(9)$$

である。

このような分割過程での多角形の辺の数の推移は1段階前の状態のみに依存して順次進行していくのでマルコフ連鎖とみなすことができる。このとき(8)式はこのマルコフ過程の推移確率行列の要素であると考えることができる。そこで推移確率行列を $[T(n/m)]$ で表わし、その計算値を表1に示す。分割された多角形の辺の数は $m+1$ 以上はとりえないので $n > m+1$ では $T(n/m) = 0$ である。表1より、任意の辺の数の多角形から任意の辺の数の多角形が生成されることがわかる。すなわち、推移確率行列 $[T(m/n)]$ は既約⁸⁾でありエルゴードイク⁸⁾である。その結果、任意の初期状態に対して唯一の定常分布⁸⁾を持つことが証明できる。

表1に示された各推移確率は、等辺等角の状態からさまざまに変形した多角形を同じ辺数を持つ正多角形として理想化した場合の理論値である。この理論値が実際の多角形の推移確率に対して、どのような近似になっているかを検討する。図2のような第I種分割過程を $i=8$ まで行い分割されてできる多角形の状態を分類し推移確率の実測値を求めた。5回の実測値の最大、最小、平均

値と(8)式による理論値との比較を図5に示す。理論値と実測値の平均値は、ほぼ合っていることがわかる。この

図5 m 角形が分割されて n 角形が生成される推移確率 $T(n/m)$ の理論値と実測値の比較

ことは正多角形で理想化した場合の推移確率が、さまざまに変形した多角形の推移確率の平均値になっていることを示唆している。

第I種分割過程の段階 i において m 角形の存在確率を $P_i(n)$ 、その確率行列を $[P_i(n)]$ と表わすとマルコフ性⁸⁾より

$$\begin{aligned} [P_i(n)] &= [P_{i-1}(n)] [T(n/m)] \\ &= [P_0(n)] [T(n/m)]^i \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

表1 第I種分割過程において m 角形から n 角形になる推移確率行列 $[T(n/m)]$ (実際には無限行列であるがその一部を示す)

$m \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	0.5000	0.5000											
4	0.2929	0.4142	0.2929										
5	0.1910	0.3090	0.3090	0.1910									
6	0.1340	0.2321	0.2680	0.2321	0.1340								
7	0.9903×10^{-1}	0.1784	0.2225	0.2225	0.1784	0.9903×10^{-1}							
8	0.7612×10^{-1}	0.1407	0.1838	0.1989	0.1838	0.1407	0.7612×10^{-1}						
9	0.6031×10^{-1}	0.1133	0.1527	0.1736	0.1736	0.1527	0.1133	0.6031×10^{-1}					
10	0.4894×10^{-1}	0.9310×10^{-1}	0.1281	0.1506	0.1584	0.1506	0.1281	0.9310×10^{-1}	0.4894×10^{-1}				
11	0.4051×10^{-1}	0.7773×10^{-1}	0.1087	0.1308	0.1423	0.1423	0.1308	0.1087	0.7773×10^{-1}	0.4051×10^{-1}			
12	0.3407×10^{-1}	0.6583×10^{-1}	0.9309×10^{-1}	0.1140	0.1271	0.1316	0.1271	0.1140	0.9309×10^{-1}	0.6583×10^{-1}	0.3407×10^{-1}		
13	0.2906×10^{-1}	0.5643×10^{-1}	0.8052×10^{-1}	0.9993×10^{-1}	0.1135	0.1205	0.1205	0.1135	0.9993×10^{-1}	0.8052×10^{-1}	0.5643×10^{-1}	0.2906×10^{-1}	
14	0.2507×10^{-1}	0.4889×10^{-1}	0.7025×10^{-1}	0.8809×10^{-1}	0.1015	0.1098	0.1126	0.1098	0.1015	0.8809×10^{-1}	0.7025×10^{-1}	0.4889×10^{-1}	0.2507×10^{-1}

で与えられる。

初期状態を $P_0(3)=1$, $P_0(13)=1$ の 2 種類の場合について $i=100$ まで (10) 式の計算を行った。その結果を図 6, 7 に示す。いずれの場合も $i=10$ でほぼ収束していることがわかる。

図 6 初期多角形が三角形である場合の第 I 種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

図 7 初期多角形が十三角形である場合の第 I 種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

つぎに面積について考える。 m 角が分割されて n 角形になるときの辺の長さ、面積、角度などの記号を図 8 に示す。 m 角形とランダム直線との交点が B_1B_2 と

図 8 辺長、面積、角度などの記号

$B_{j-1}B_j$ の間に一様に分布していると近似すると $\triangle A_1A_2A_3$ の平均面積 $E(a'+a'')$ はつぎのように与えられる。

$$E(a'+a'') = \{1/b_1 - b_2\} \{1/(b_j - b_{j-1})\} \int_{b_2}^{b_1} \int_{b_{j-1}}^{b_j} (1/2) xy \sin \theta dx dy \\ = (1/2) \{ (b_1 + b_2)/2 \} \{ (b_{j-1} + b_j)/2 \} \sin \theta \quad \dots \dots \dots (11)$$

この式は B_1B_2 と $B_{j-1}B_j$ の中点を通る直線で分割したと考えたとき $\triangle A_1A_2A_3$ の面積と同じである。こののとは B_1B_2 と $B_{j-1}B_j$ が平行であるときにも適用できる。

a' の平均面積を $E(a'/n)$ とすると

$$E(a'/n) = \text{多角形 } OB_1B_2 \dots B_{j-1}B_j \text{ の面積} \\ - 3 \text{ 角形 } OB_1B_j \text{ の面積} - \text{台形 } B_1A_2A_3B_j \text{ の面積} \quad \dots \dots \dots (12)$$

となる。

右辺の各面積は簡単な幾何学的誘導より

$$E(a'/n) = \{ (n-1)/2 \} (D/2)^2 \sin(2\pi/m) \\ - (1/2) (D/2)^2 \sin \{ (n-2) \pi/m \} \\ - (1/2) \{ (3/2) D \sin \{ (n-1) \pi/m \} \\ + (1/2) D \sin \{ (n-3) \pi/m \} \} (D/2) \\ \sin(\pi/m) \sin \{ (n-2) \pi/m \} \quad \dots \dots \dots (13)$$

である。

$E(a'/m)$ は正 m 角形の面積であるので

$$E(a'/m) = (m/2) (D/2)^2 \sin(\pi/m) \quad \dots \dots \dots (14)$$

である。

(13), (14) 式の比を $G(n/m)$ とすると

$$\begin{aligned}
 G(n/m) &= E(a'/n) / E(a'/m) \\
 &= \frac{n-1}{m} - \frac{\sin\{(n-1)\pi/m\}}{m \sin(2\pi/m)} \\
 &\quad - [3\sin\{(n-1)\pi/m + \sin\{(n-3)\pi/m\}} \\
 &\quad \sin(\pi/m) \sin\{(n-2)\pi/m\}] / [m \sin(2\pi/m)] \quad \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

となる。 $G(n/m)$ は正 m 角形が分割されて n 角形が生成されたとき、その両者の面積比を与えている。

段階 $i-1$ から i に進む過程において、あらゆる多角形にこのような面積変化が生じるので、そのことを考慮して平均化すると段階 i における n 角形の平均面積 $E_i(a/n)$ は(10), (15)式より

$$E_i(a/n) = \frac{\sum_{n=3}^{\infty} P_{i-1}(n) T(n/m) E_{i-1}(a/n) G(n/m)}{\sum_{n=3}^{\infty} P_{i-1}(n) T(n/m)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。

3.2 第 I 種分割過程の位相特性

点の数、辺の数、多角形の数、多角形の辺の数の平均値、1 点に接している辺の数の平均値などは系の連続変形に対して不変な性質を有しているので位相特性であると考えられる。そこで本節では第 I 種分割過程の段階 i の関数として、それらがどのように変化するかを検討する。

第 I 種分割過程によって生成される点の数を A 、辺の数を B 、多角形の数とするとオイラーの定理より

$$A - B + C = 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

点の近傍が位相的に異なっているものを分類すると以下のように 3 種類に分けることができる。初期多角形の頂点になっているものには 1 点に 2 本の辺が接している。その数を A_1 とする。1 点で 3 本の辺が接し、そのうちの 1 本が初期多角形の辺の一部となっている場合がある。そのような点の数を A_2 とする。また 1 点に 3 本の辺が接し、それらのすべてが初期多角形の辺でない場合がある。そのような点の数を A_3 とすると

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad \dots\dots\dots (18)$$

各点に接している辺の数 h の平均値を $E(h)$ とすると

$$E(h) = \{2A_1 + 3(A_2 + A_3)\} / A \quad \dots\dots\dots (19)$$

1 つの辺の両端には必ず 1 つずつの点が接しているので

$$2B = AE(h) \quad \dots\dots\dots (20)$$

すべての多角形の辺の数 n の合計は

$$\sum_{j=1}^c n_j = 2B - A_1 - A_2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで j は、すべての多角形に番号をつけた場合の添字である。

(20), (21)式を(17)式へ代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 E(n) &= \sum_{j=1}^c n_j / c \\
 &= \frac{2E(h)}{E(h)-2} - \frac{2E(h)}{c\{E(h)-2\}} - \frac{A_1 + A_2}{c} \quad \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

となる。

つぎに A , B , C , $E(h)$, $E(n)$ を段階 i の関数として考える。 A_1 は初期多角形の辺の数であるので

$$A_1 = n_0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$A_2 + A_3$ は分割が段階 $i-1$ から i に進むと 2^i 個増加するので

$$A_2 + A_3 = \sum_{j=1}^i 2^j = 2^{i+1} - 2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(18), (23), (24)式より

$$A = n_0 + 2^{i+1} - 2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

(19), (20), (25)式より

$$B = n_0 + 3(2^i - 1) \quad \dots\dots\dots (26)$$

(17), (24), (25)式より

$$C = 2^i \quad \dots\dots\dots (27)$$

(19), (23), (24)式より

$$E(h) = \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{n_0 + 2(2^i - 1)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(22), (24), (27), (28)式より

$$\begin{aligned}
 E(n) &= \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{2^i - 1} - \frac{2n_0 + 6(2^i - 1)}{2^i(2^i - 1)} \\
 &\quad - \frac{n_0 + A_2}{2^i} \quad \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

ところで A_2 の変化は確率的であって一意的に決定されないが $A_2 \leq 2^i$ である。分割段階 i を大きくすると(28), (29)式より

$$\left. \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E(h) &= 3 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} E(n) &= 6 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。

第 I 種分割過程において連結している多角形をばらにしたらのちに点、辺、多角形の数などを計算する場合がある。このときは A_3 の点 1 個につき辺 1 本が数え過ぎになっているので辺の合計から A_3 を引いておく必要がある。すると(21)式は

$$\sum_{j=1}^c n_j = 2B - A_1 - A_2 - A_3 = 2B - A \quad \dots\dots\dots (31)$$

これより

$$E(n) = \sum_{j=1}^n n_j / c = 2B/C - A/C \quad \dots\dots\dots (32)$$

(25), (26), (27)式を(32)式へ代入すると

$$\begin{aligned} E(n) &= \{2n_0 + 6(2^i - 1)\} / 2^i - (n_0 + 2^{i+1} + 2) / 2^i \\ &= 4 + (n_0 - 4) / 2^i \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となる。

図6に示すように $n_0=3$ で $i=10$ のとき(33)式より $E(n)=3.999$ となる。また図7に示すように $n_0=13$ で $i=10$ のとき $E(n)=4.009$ であり、初期値 n_0 にかかわらず段階10で $E(n) \div 4$ となっている。(33)式において i を大きくしていくと

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E(n) = 4 \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。

3.3 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の辺の数の分布

第Ⅰ種分割過程では段階 $i-1$ から i に進む間にすべての多角形が例外なく分割されていくことを意味していた。しかし繊維集合体において繊維が1本ずつ増加していくような場合、すべての多角形のなかで周長の大きな多角形の方が小さなものより分割されやすい。そこで多角形の周長の大きさに応じて分割される確率を考慮に入れる必要がでてくる。このような場合を第Ⅱ種分割過程と呼ぶ。繊維集合体の例を図9に、割れ目の進行過程を図10に示す。理想化した割れ目の進行過程としてつぎの

図9 第Ⅱ種分割過程の進行(繊維集合体の場合)

図10 第Ⅱ種分割過程の進行(割れ目の場合) 上段の点線は走査線を表わしている。

ようなものを考える。各段階でランダムに走査線(図10の点線)を引き、それに交わった多角形を改めてランダム直線分で分割することによって段階を進めていく。このようにすれば周長の大きな多角形ほど大きな確率で分割されることになる。

ある凸領域 Γ の面積を a 、周の長さを l 、 Γ と同じ面

積をもつ円の周長を l' とするとき形状係数 F をつぎのように定義する。

$$F = l/l' = l/(4\pi a)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

Γ が円の場合は当然 $F=1$ であり、正 n 角形の場合は

$$F(n) = (n/\pi)^{\frac{1}{2}} \{\tan(\pi/n)\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。

第Ⅱ種分割過程において初期多角形の辺の数を n_0 、面積を a_0 、形状係数を $F(n_0)$ とする。この初期多角形にランダム直線が1本交わるごとに段階が1つずつ増加していくと考える。段階 i で生成されている n 角形の平均面積を $E_i(a/n)$ 、形状係数を $F(n)$ とすると n_0 角形と n 角形の周長の比 $K_i(n/n_0)$ は(36)式より

$$K_i(n/n_0) = (a_0)^{\frac{1}{2}} F(n) / \{E_i(a/n)\}^{\frac{1}{2}} F(n_0) \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。

前述のように凸領域 Γ_1 に交わるランダム直線がその内部にある凸領域 Γ_2 にも交わる確率は Γ_1 、 Γ_2 の周長の比によって与えられることを考えると(37)式は段階 i において n 角形が分割される確率を与えていることになる。そこで段階 $i-1$ で n 角形であったものが段階 i でそのまま残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \{1 - K_{i-1}(n/n_0)\} P_{i-1}(n) \quad \dots\dots\dots (38)$$

である。

そして段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i で n 角形になる確率 q_2 は

$$q_2 = 2 \sum_{n=3}^{\infty} K_{i-1}(m/n_0) P_{i-1}(n) T(n/m) \quad \dots\dots\dots (39)$$

段階 $i-1$ でのすべての多角形の数を C_{i-1} 、段階 $i-1$ から i に進む間に増加した多角形の数を $C_i - C_{i-1}$ と与えると(38), (39)式より

$$\begin{aligned} P_i(n) &= \frac{c_{i-1} q_1 + c_{i-1} q_2}{c_{i-1} + (c_i - c_{i-1})} = \frac{q_1 + q_2}{1 + (c_i - c_{i-1}) / c_{i-1}} \\ &= [\{1 - K_{i-1}(n/n_0)\} P_{i-1}(n) + 2 \sum_{n=3}^{\infty} K_{i-1}(m/n_0) P_{i-1}(n) \\ &\quad \cdot T(n/m)] / [1 + \sum_{n=3}^{\infty} K_{i-1}(n/n_0) P_{i-1}(n)] \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

となる。

(40)式において $K_{i-1}(n/n_0)=1$ とおけば第Ⅰ種分割過程となるので当然(40)式と一致する。

第Ⅱ種分割過程で $n_0=3$ 、 $i=100$ までの $P_i(n)$ の推移を(40)式より計算した。その様子を図11に示す。 $i=10$ で分布はすでに定常値に近くなっている。そこで $i=100$ の場合を定常値と考え $P_{100}(n)$ の数値を表2に示す。

図11 初期多角形が三角形である場合の第Ⅱ種分割過程における多角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ の推移

表2 多角形の辺の数の定常分布 $P(n)$ の数値

n	$P(n)$
3	0.3554
4	0.3809
5	0.1901
6	0.5873×10^{-1}
7	0.1258×10^{-1}
8	0.1997×10^{-2}
9	0.2451×10^{-3}
10	0.2404×10^{-4}
11	0.1930×10^{-5}
11	0.1293×10^{-6}
13	0.7345×10^{-8}
14	0.3584×10^{-9}
15	0.1520×10^{-10}

定常分布 $P_{100}(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ は

$$E(n^k) = \sum_{n=3}^{\infty} n^k P_{100}(n) \quad \dots\dots\dots (41)$$

で与えられる。 $k=10$ までの $E(n^k)$ の計算値を表3に示す。

3.4 第Ⅱ種分割過程によって生成される多角形の平均面積と占有面積分率

段階 i における n 角形の平均面積 $E_i(a/n)$ について考える。それは段階 $i-1$ で n 角形であったものがそのまま残った場合の平均面積 $E_{i-1}(a/n)$ と、段階 $i-1$ で m 角形であったものが段階 i で n 角形になったときの平均面積 $E_{i-1}(a/m)G(n/m)$ とをそれぞれの生起確率 q_1 ,

表3 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の k 次モーメント $E(n^k)$ の数値

k	$E(n^k)$
1	4.000
2	1.693×10
3	7.596×10
4	3.615×10^2
5	1.821×10^3
6	9.691×10^3
7	5.431×10^4
8	3.196×10^5
9	1.970×10^6
10	1.268×10^7

q_2 で加重平均したものであるので

$$\begin{aligned} E_i(a/n) &= \frac{q_1 E_{i-1}(a/n) + q_2 E_{i-1}(a/m) G(n/m)}{q_1 + q_2} \\ &= [1 - K_{i-1}(n/n_0) \{P_{i-1}(n) E_{i-1}(a/n) + 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(n/n_0) P_{i-1}(n) T(n/m) E_{i-1}(a/m) G(n/m)\} / [1 - K_{i-1}(n/n_0) \{P_{i-1}(n) + 2 \sum_{m=3}^{\infty} K_{i-1}(n/n_0) P_{i-1}(n) T(n/m)\}]] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。

(42)式において $K_{i-1}(n/n_0)=1$ とおくと第Ⅰ種分割過程となるので当然(40)式と一致する。(42)式において $E_0(a/n_0)=3$ として $i=100$ までの計算を行った。段階 i における3角形の平均面積を $E_i(a*/3)=1$ と規格化して四角形以上の面積 $E_i(a*/n)$ の推移を図12に示す。ここで

図12 n 角形の相対面積 $E_i(a*/n)$ の推移 (三角形の平均面積を1とする)

の a の添字 $*$ は、上記規格化の下での面積の値であることを意味する。多角形の辺の数が増加するにしたがって面積は指数関数的に増加する。また段階 i とともに増加率が大きくなっているが $i=100$ ではほぼ定常値になっている。

R. E. Miles は、すべての多角形の平均面積 $E(a)$ を交点密度 τ (単位長あたりの交点数) の関数として

$$E(a) = \pi / \tau^2 \quad \cdots \cdots \cdots (43)$$

で与えている。そこで $E_i(a/n)$ を τ の関数として求める。 $i=100$ で図12に示すように n 角形の相対面積は定常値になっているので分割段階を示す添字 i を省略して $E(a*/n)$ と書く。すべての多角形の面積の平均値 $E(a*)$ は

$$E(a*) = \sum_{n=3}^{\infty} P(n) E(a*/n) = 4.038 \quad \cdots \cdots \cdots (44)$$

$E(a)$ と $E(a*)$ はある定数 J によって

$$E(a) = J \cdot E(a*) = \pi / \tau^2 \quad \cdots \cdots \cdots (45)$$

とおける。(44), (45)式より

$$J = \pi / 4.038 \tau^2 \quad \cdots \cdots \cdots (46)$$

すると

$$E(a/n) = JE(a*/n) = \pi E(a*/n) / 4.038 \tau^2 \quad \cdots \cdots \cdots (47)$$

となる。

n 角形の辺の数の分布 $P_i(n)$ と $E_i(a*/n)$ がわかると、すべての n 角形が平面内を占める占有面積分率 $S_i(n)$ は

$$S_i(n) = \frac{P_i(n) E_i(a*/n)}{\sum_{n=3}^{\infty} P_i(n) E_i(a*/n)} \quad \cdots \cdots \cdots (48)$$

で与えられる。

$i=100$ までの $S_i(n)$ の推移の様子を図13に示す。 $i=100$ では $P_i(n)$, $E_i(a*/n)$ も定常値を持つので当然(48)式から決まる $S_i(n)$ も定常値を持つ。 $E(a/n)$, $S(n)$ の値を表4に示す。

3.5 第Ⅱ種分割過程での位相特性

第Ⅱ種分割過程のなかで図9に示すような繊維集合体の場合についての位相特性を検討する。

点の近傍において位相の異なるものを分類して、初期多角形の頂点の数を A_1 、初期多角形の辺とランダム直線が交わってできる交点の数を A_2 、ランダム直線同志が交わってできる交点の数を A_3 とすると

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad \cdots \cdots \cdots (49)$$

1 点に接している辺の数の平均値は

図13 n 角形の占有面積率 $S_i(n)$ の推移

表4 n 角形の面積の平均値 $E(a/n)$ と占有面積分率 $S(n)$ の数値
(τ は単位長当りの交点数を表わしている)

n	$E(a/n)$	$S(n)$
3	$0.7780/\tau^2$	0.8704×10^{-1}
4	$2.554/\tau^2$	0.3064
5	$5.653/\tau^2$	0.3384
6	$10.13/\tau^2$	0.1874
7	$15.99/\tau^2$	0.6338×10^{-1}
8	$23.24/\tau^2$	0.1461×10^{-1}
9	$31.87/\tau^2$	0.2460×10^{-2}
10	$41.84/\tau^2$	0.3169×10^{-3}
11	$53.22/\tau^2$	0.3234×10^{-4}
12	$65.96/\tau^2$	0.2685×10^{-5}
13	$80.05/\tau^2$	0.1852×10^{-6}
14	$95.53/\tau^2$	0.1078×10^{-7}
15	$112.3/\tau^2$	0.5371×10^{-9}

$$E(h) = (2A_1 + 3A_2 + 4A_3) / A \quad \cdots \cdots \cdots (50)$$

A_1 は初期多角形の頂点であるので $A_1 = n_0$ で与えられ、 A_2 は1本の直線が増加すると必ず2個増えるので段階 i では

$$A_2 = 2i \quad \cdots \cdots \cdots (51)$$

A_3 は確率的にさまざまな値をとるが、その平均値⁹⁾は次式で与えられる。

$$A_3 = (i)^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \cdots \cdots \cdots (52)$$

ここで $\bar{l}$ は平均長さ、 a_0 は初期多角形の面積である。多角形に交わるランダム直線が切取られる部分の長さの平均長¹⁰⁾は $\bar{l}$ は

$$\bar{l} = \pi a_0 / l_0 \quad \cdots \cdots \cdots (53)$$

で与えられる。ここで l_0 は初期多角形の周長である。

(52), (53)式より

$$A_3 = \pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$A_3 = \pi a_0 i^2 / (l_0)^2$$

(49), (51), (54)式より

$$A = n_0 + 2i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad \dots\dots\dots (55)$$

(50)式は

$$E(h) = \frac{2n_0 + 6i + 4\pi a_0 i^2 / (l_0)^2}{n_0 + 2i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2} \quad \dots\dots\dots (56)$$

(20), (56)式より

$$B = n_0 + 3i + 2\pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad \dots\dots\dots (57)$$

(17), (55), (57)式より

$$C = 1 + i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2 \quad \dots\dots\dots (58)$$

多角形の辺の数の合計は

$$\sum_{j=1}^c n_j = 2B - A_1 - A_2 \quad \dots\dots\dots (59)$$

多角形の辺の数の平均値は

$$E(n) = \sum_{j=1}^c n_j / c = \frac{n_0 + 4i + 4\pi a_0 i^2 / (l_0)^2}{1 + i + \pi a_0 i^2 / (l_0)^2} \quad \dots\dots\dots (60)$$

(60)式より初期多角形が $n_0 = 3$, $a_0 = 1$ のとき $i = 10$ では $E(n) = 3.962$, $i = 100$ では $E(n) = 3.988$ となり段階10ではほぼ定常値に近くなっている。

(56), (60)式において i を大きくすると

$$\left. \begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E(h) &= 4 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} E(n) &= 4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。

3.6 有限直線長の場合の位相特性と多角形の辺の数の分布

第II種分割過程でランダム直線の長さが有限である場合について考える。初期多角形の周辺効果の影響を無視して、すべての直線分が初期多角形内に入るものとする。また、直線本数も十分多いものとする。

点の近傍の位相をつぎのように分類する。まずランダム直線分の末端の点は1本の辺と接している。その数を A_1 とすると

$$A_1 = 2i \quad \dots\dots\dots (62)$$

直線分同志の交点には各4本の辺が接している。その種の交点の数を A_2 とすると(52)式より

$$A_2 = i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \dots\dots\dots (63)$$

ここで $\bar{l}$ は直線分の平均長さである。すると

$$A = A_1 + A_2 = 2i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \dots\dots\dots (64)$$

1点に接している辺の数の平均値は

$$E(h) = \frac{A_1 + 4A_2}{A} = \frac{2i + 4i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0}{2i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0} \quad \dots\dots\dots (65)$$

(20), (64), (65)式より

$$B = i + 2i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

(17), (64), (66)式より

$$C = 1 - i + i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

辺のうち多角形の周の構成要素には一ているものの数を B' とすると

$$B' = B - 2i = -i + 2i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 \quad \dots\dots\dots (68)$$

多角形の辺の数の合形は

$$\sum_{j=1}^c n_j = 2B - B' \quad \dots\dots\dots (69)$$

ここで B'' は多角形集合体の最外周辺部を構成している辺の数である。 B'' は確率的にさまざまな値をとりうるが $B'' < 2i$ である。

多角形の辺の数の平均値は(67), (68), (69)式より

$$E(n) = \sum_{j=1}^c n_j / C = \frac{4i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 - 2i - B'}{i^2 (\bar{l})^2 / \pi a_0 - i + 1} \quad \dots\dots\dots (70)$$

直線本数を多くすると(65), (70)式より

表5 多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a に関してこれまでの研究によってわかっているモーメントおよび分布 (τ は単位長当りの交点数を表わしている)

分類	記号	数値・分布	研究者名
1次モーメント	$E(n)$	4	S. Goudsmit
	$E(l)$	$2\pi/\tau$	S. Goudsmit
	$E(a)$	π/τ^2	S. Goudsmit
	$E(l/n)$	$(n-2)\pi/\tau$	R. E. Miles
2次モーメント	$E(n^2)$	$(\pi^2 + 24)/2$	R. E. Miles
	$E(l^2)$	$\pi^2(\pi^2 + 4)/2\tau^2$	R. E. Miles
	$E(a^2)$	$\pi^4/2\tau^4$	S. Goudsmit
	$E(nl)$	$\pi(\pi^2 + 8)/2\tau$	R. E. Miles
	$E(na)$	$\pi^3/2\tau^2$	R. E. Miles
	$E(la)$	$\pi^4/2\tau^3$	R. E. Miles
3次モーメント	$E(na^2)$	$\pi^4(8\pi^2 - 21)/21\tau^4$	R. E. Miles
	$E(la^2)$	$8\pi^7/21\tau^5$	R. E. Miles
	$E(a^3)$	$4\pi^7/7\tau^6$	D. G. Kendall
m 次モーメント	$E(la^{m-1})$	$= 2\tau E(a^m)/m$	P. I. Richards
分布	$P(3)$	$2 - \pi^2/6$	R. E. Miles
分布	$Q(l/n)$	χ^2 分布	R. E. Miles

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} E(h) &= 4 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) &= 4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

となって無限長の直線の場合の(61)式と一致する。

有限長の場合、多角形の辺の数の分布はランダム直線分の末端を含んでいる辺の存在を無視すれば、第Ⅱ種分割過程の繊維集合体の場合(図9)と割れ目の進行過程の場合(図10)の混合過程であると考えられる。どちらも同じ定常分布を持つことがわかっているため、有限長の場合も同分布となる。ただし、末端効果すなわち(70)式における i に比例する項の存在のため収束速度は遅くなる。

4. 結果と考察

ランダム直線によって生成される多角形の辺の数の分布 $P(n)$ についてコンピュータによるモンテカルロ シミュレーションによって5回の実験を行った。段階100における実験値の最大、最小、平均値と第Ⅱ種分割過程の理論値との比較を図14に示す。5回の平均値と理論値

図14 多角形の辺の数の分布 $P(n)$ の理論値と実験値の比較。○は無限長直線による5回の実験値の最大、平均、最小を示す。×印は H. W. Piekaar らが行った有限長直線による3回の実験値の平均値を示す。

が非常によく合っていることがわかる。また、R. E. Miles が求めた理論値 $P(3)=2-\pi^2/6=0.3551$, $E(n^2)=(\pi^2+24)/2=16.93$ に対して表2, 3に示したように第Ⅱ種分割過程の理論値は $P(3)=0.3554$, $E(n^2)=16.93$ となっており、Miles の結果ともよく合っている

ことがわかる。これらの結果は、辺の数の推移確率 $T(n/m)$ を求める際にさまざまな形をした多角形を同じ辺の数を持つ正多角形で近似した方法が妥当なものであったことを暗示している。

n 角形の平均面積比、占有面積分率については線描画による実験結果と第Ⅱ種分割過程によって求められた理論値との比較を図12, 13に示している。両方とも、ほぼ合っていることがわかる。

以上の結果より、第Ⅱ種分割過程について求められた理論値 $P(n)$, $E(n^k)$, $E(a/n)$, $S(n)$ は妥当な値を示しているものと考えられる。なお、多角形の辺の数 n , 周長 l , 面積 a について他の研究者によってすでに求められている結果を表5に示す。

有限長の場合の $P(n)$ については H. W. Piekaar らが行った3回の実験値の平均値を図14の×印で示す。

3.6節で述べたようにこの場合も第Ⅱ種分割過程の理論値とほぼ一致している。

5. むすび

分割過程の理論により多角形の辺の数の分布 $P(n)$, k 次モーメント $E(n^k)$, n 角形の平均面積 $E(a/n)$, 占有面積分率 $S(n)$ を求め、モンテカルロ シミュレーションによる実験値とよく合うことを確かめた。

本研究の主目的は多角形の辺の数の分布 $P(n)$ を求めることであった。 $P(n)$ は周長、面積の分布およびこれらのモーメントを求める際に重要な意味を持っている。例えば n 角形の周長および面積の分布とモーメントがそれぞれ $Q(l/n)$, $R(a/n)$, $E(l^m/n)$, $E(a^k/n)$ で与えられているとき、すべての多角形の分布とモーメントは $Q(l)=\sum_{n=3}^{\infty} P(n)Q(l/n)$, $R(a)=\sum_{n=3}^{\infty} P(n)R(a/n)$, $E(l^m)=\sum_{n=3}^{\infty} P(n)E(l^m/n)$, $E(a^k)=\sum_{n=3}^{\infty} P(n)E(a^k/n)$ となる。このような周長、面積の特性については次報で報告したい。

文 献

- 1) H. W. Piekaar, L. A. Clarenburg; Chem. Eng. Sci., **22**, 1399 (1967)
- 2) L. A. Santalo; Introduction to Integral Geometry, Hermann, Paris (1953)
- 3) 栗田 稔; 積分幾何, 共立出版 (1956)
- 4) E. F. Harding, D. G. Kendall; Stochastic Geometry, John Wiley & Sons
- 5) S. Goudsmit; Rev. Mod. Phys., **17**, 321 (1945)
- 6) R. E. Miles; Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., **52**, 901 (1964)
- 7) R. E. Miles; Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., **52**, 1157 (1964)
- 8) 北川敏男; マルコマ過程, 共立出版 (1967)
- 9) O. Kallmes, H. Corte; Tappi, **43**, No. 9, 737 (1960)
- 10) Hans. Elias; Stereology, Springer-Verlag, New York (1967)