布の非線形二軸伸長特性を計算する “リニアライジング法”について

京都大学 川 端 季 雄 (会員)

“Linearizing Method” for Solving Non-linear Biaxial Tensile Property of Fabric

by Sueo Kawabata

Department of Polymer Chemistry, Kyoto University, Kyoto

1. 緒 言

布のようにシート状の材料は二軸伸長変形下におかれることが多いので、その応力—ひずみ関係を適切な材料特性パラメータを用いて予測計算する必要がある。しかし布のように複雑な繊維集合体ではその構造からくる力学的性質の非線形性のために、構成式として線形弾性理論の適用は不可能である。また布など一般の“ソフト”な実用シート材料の実用時の変形範囲は“微小”の範囲を起していることも線形理論の適用を妨げ、厳密には有限変形弾性理論の適用が必要になる。この場合、材料パラメータもひずみエネルギー密度関数が使われ、定数パラメータの扱いは一般にできなくなり、さらに力学的異方性がその取扱いをはん雑化させる。

しかし、これら材料の実用時変形範囲はおおよそ十数%のひずみ程度で、やや粗い近似で、工学的には“微小”の扱いが許される変形といえる。しかし構造からくる強い力学的非線形性はすでにこの小変形範囲に現れており、これが依然として線形理論の適用を不可能にしている。

そこで、ひずみ又は応力、又はその両方を適当な非線形変換によって互いに比例関係が得られるような新しい変数に変換した後、これに線形弾性理論を適用して材料パラメータ（定数）を求め、かつこの変数を用いて応力—ひずみ関係を計算し、最後にこれら変数をもとの応力とひずみに逆変換し、非線形応力—ひずみ関係を導く方法を検討してみた。この方法をここでは“リニアライジング法”とよぶ¹⁾。

この変換には、繊維集合体の応力—ひずみ関係には簡単な変換で直線的関係になる一般の傾向のあることの観測経験に基づいている。

2. 理 論

糸やそれで構成される布では応力 F とひずみ ϵ との間は、

$$F = k\epsilon^n \quad (1)$$

の形式の関係で近似できることがわかっている。ただし F は布の場合は単位幅当りの伸長力で定義し、又、 k, n は定数である。いま、

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon^n \quad (2)$$

とすると $\tilde{\epsilon}$ と F は線形の関係となる。ここでは主に布の構造主軸に沿う応力—ひずみ関係を考える。

図1の座標系をとって、線形弾性式は、

Fig. 1 The biaxial deformation and the co-ordinate system.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_1 \\ \tilde{\epsilon}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

S_{ij} ($i, j = 1, 2$) はコンプライアンスで弾性定数である。

材料特性値である S_{ij} の決定には、一軸拘束二軸伸長試験が適切であると考えられる。この変形は図2に示すように (中央, strip biaxial deformation と

Fig. 2 Three typical deformation modes. The strip biaxial extension (2) is the representative biaxial deformation which is used for characterizing material parameters for the linearizing method. General biaxial-extension deformation modes are included between the marginal two deformations, uniaxial (1) and equal (3) biaxial extensions.

よばれる変形), 伸長方向に直角方向のひずみをゼロに保つての伸長で, 応力 F_1, F_2 はともに生じる。 X_1, X_2 は各軸方向への合わせて2つの一軸拘束二軸伸長がある。弾性定数決定にこの変形が適切である理由は、一軸単純伸長と二軸均等伸長 ($\epsilon_1 = \epsilon_2$) の各変形が両極端の変形様式として、一般の二軸伸長変形がこの間に位置し、一軸拘束二軸変形がちょうどその中間位置に当たる変形であり、この変形下で材料パラメータを得ておけば、二軸伸長変形全域に適用できる最も近似度のよい特性値となることが他の連続体の有限変形において筆者からの研究によってわかっていることによる²⁾。

まず X_1 軸方向へ伸長する一軸拘束二軸試験によって $\tilde{\epsilon}_1$ に対する F_1, F_2 を計測, 又, X_2 軸への同伸長試験で $\tilde{\epsilon}_2$ に対する F_2, F_1 を計測する。両場合

を区別するため、後者のひずみ, 応力にダッシュをつけ, $\tilde{\epsilon}_2', F_2', F_1'$ とする。(3)式より次の関係が導ける。

X_1 軸方向への伸長試験から,

$$C_1 = \frac{F_1}{\tilde{\epsilon}_1}, R_1 = \frac{F_2}{F_1} \quad (4)$$

X_2 軸方向への伸長試験から,

$$C_2 = \frac{F_2'}{\tilde{\epsilon}_2'}, R_2 = \frac{F_1'}{F_2'} \quad (5)$$

具体的には G, R は F_i 対 $\tilde{\epsilon}_i$ の直線関係のスロープから決定される。以上の4つのパラメータから,

$$S_{11} = \frac{1}{C_1(1-R_1R_2)} \quad (6)$$

$$S_{22} = \frac{1}{C_2(1-R_1R_2)} \quad (7)$$

$$S_{12} = -R_2S_{11} \quad (8)$$

$$= -R_1S_{22} \quad (9)$$

S_{12} は(8), (9)式いずれからでも求まるが, 特に(9)式で求めた場合を S'_{12} として区別する。

従って, ϵ_1, ϵ_2 を(2)式で $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$ に変換し, (3)式により F_1, F_2 を

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_1 \\ \tilde{\epsilon}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

として求め得る。このあと $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$ を ϵ_1, ϵ_2 に逆変換して F_1, F_2 との関係を求める。

$n = 1$ の場合は、通常の線形二次元直交異方性体であって,

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, \\ R_1 &= \nu_{21}, R_2 = \nu_{12} \\ S_{12} &= -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし E_1, E_2 は X_1, X_2 軸方向の弾性率, ν_{12}, ν_{21} はポアソン比で ν_{12} は X_1 軸方向への一軸単純伸長時の $-\epsilon_2/\epsilon_1$ で定義され, ν_{21} は同様に X_2 軸方向伸長時のひずみで同様に定義される。このように一軸拘束二軸伸長試験により線形弾性体においても一挙に全部の弾性定数の決定ができる。

3. 実験

いくつかの試料で実験を行ない、同様な結果を得ているが、一例を示す。

試料: ウールトロピカル平織, たて, よこ糸とも

21 × 2 tex, たて糸密度 21.5 ends/cm, よこ糸密度 19.5 picks/cm, たて糸織クリンプ縮み 7.6%, よこ糸織クリンプ縮み 10.3%, 重量 186 g/cm².

図 3 に一軸拘束二軸伸張特性の X_1 軸方向伸長, X_2 軸方向伸長各場合を別に点線で示している。ま

Fig. 3 Dotted lines ; The stress strain relations observed for the plain weave test specimen under the strip biaxial extensions along X_1 -and X_2 -directions respectively. Solid lines ; the linerization of the relation for strain increasing process.

た図中に実線でひずみ増加過程についての線形化を示しており, $n = 2.0$ である。以下この過程について検討するが, 戻り過程は同様に n を決定しながら行うことができる。

n の決定は F , ϵ の対数プロットから得る。以上から,

$$C_1 = 3.84 \times 10^5 \text{ Nm}^{-1}, C_2 = 1.78 \times 10^5 \text{ Nm}^{-1}$$

$$R_1 = 0.320 \quad R_2 = 0.621$$

そして S_{ij} の単位を $\text{m} \cdot \text{N}^{-1}$ として,

$$S_{11} = 0.325 \times 10^{-5}$$

$$S_{22} = 0.883 \times 10^{-5}$$

$$S_{12} = -0.224 \times 10^{-5}, S'_{12} = -0.202 \times 10^{-5}$$

$$\text{平均 } S_{12} = -0.213 \times 10^{-5}$$

これら 3 つのパラメータ (S_{11} , S_{22} , S_{12} (平均)) を用いて (10) 式により (1) 一軸拘束二軸伸長, (2) 均等二軸伸長, (3) $\epsilon_2/\epsilon_1 = 0.5$ の二軸伸長, (4) 一軸単純伸長をそれぞれ計算し, 図 4 ~ 7 に示し, 実測値と比較した。実測は二軸引張試験機によった。図のように良い一致が認められる。

4. 新しい実測装置の開発

一般には二軸引張試験機を使えばよいが, リニアライジング法を応用すると操作上はるかに単純な一軸拘束二軸引張試験のみでよい。かつて筆者が開発した布の力学特性計測システム KESF では, 引張特性はこの変形様式 (一軸拘束二軸伸長) がその重要

Fig. 4 The strip biaxial properties are re-drawn by the linearizing method using obtained material parameters for the two strip biaxial extensions along X_1 -and X_2 -directions, that is, warp- and weft-directions respectively. Solid lines ; original experimental curves and dotted lines ; solved curves by using the linearizing method.

Fig. 5 The solution for equal biaxial property by the linearizing method (dotted lines) and experimental curves (solid).

Fig. 6 The solution for the biaxial extension mode where the relation, ϵ_2/ϵ_1 is kept 0.5. Dotted lines are solved and solid lines are experimental curves.

性のゆえに採用されているが, 拘束方向の力は測定されていない。この変形様式の専用試験機として開発した装置を図 8 に示した。詳しくは文献 1) を参照されたい。

5. 考 察

以上のように, 特に厳密な場合は別にして一般の工業的応用上では充分な精度がこの近似法から得られる。適用可能な布は織物のほかニット (編布) に

Fig. 7 The solution for the uniaxial properties where the X_1 - and X_2 -directional extensions are inspected.

Fig. 8 The simplified biaxial tensile tester for the strip biaxial extension only, which have been developed recently by the author.

も広げ得ることが、最近の影山、丹羽らの点検によって明らかにされている³⁾。不織布や軟質高分子フィルムのように、より線形に近いものではさらに精度は高い。

この方法は本質的にはひずみ量に制限のある線形理論であることに注意したい。ゴムのシートの一軸拘束二軸伸長測定から同様に S_0 を決定し、二軸均等伸長と一軸伸長の特性を計算し、実測値と比較すると、図9に示すように、ひずみ ϵ が0.2 (20%) 以上で誤差が目立つことがわかる。しかし、すでに述べたように、布や軟質シートの実用範囲からみると十分に大きな変形を範囲といえる。このひずみの制限を越えるには、有限変形理論 (F.D.T.) が必要で、同じく一軸拘束二軸伸長特性から採取したひずみエネルギー密度 $W(I_1, I_2)$ を用いて同理論により計算した値を F.D.T. (CAL) として図9に記入しているが、極めて精度は良く他の変形様式でも同様の結果となる。一軸拘束二軸伸長変形様式では、 $I_1 = I_2$ (ただし I_1, I_2 は変形テンソルの各第1, 第2不変量) となり、 W の関数形は単純化された近似関数となるが、それでもこの精度を持つのは、変

Fig. 9 Inspection of the validity of the linearizing method for finite deformation using rubber specimen. Equal and uniaxial extensions are inspected. Solid lines are experimental dotted lines are the solutions by the linearizing method and star symbol are by finite deformation theory of elasticity.

形量に制限のない理論の強みである。しかし、 W は一般に定数でなく、複雑な関数形を示し、さらに異方性体の場合は扱いが困難になる。垂有限変形 (sub-finite deformation) とでもいうべき布などの変形の工業的解析計算には以上のリニアライジング法が有用であるように思われる。なお、粘弾性現象への応用は、 S_0 を時間関数とし重ね合せの理論が適用でき、解くことができる。

6. 結 論

布の一般的な二軸伸長 (一軸単純伸長もその特別の場合として含まれる) ので、応力とひずみ関係を計算で求めるためのリニアライジング法を示したが、実用的精度のあることがわかった。布の産業的応用にはもちろんとして、アパレル工業においても、縫製時の布の変形予測、衣服着用時の衣服圧力の計算などに直ちに应用できる。今後の広い応用が期待される。なお本方法の適用精度についての点検が丹羽ら³⁾によって続けられており報告されるものと思われる。

本内容は第14回繊維工学研究討論会 (本学会主催、昭和60年8月) において発表した。

7. 謝 辞

この研究には実験の援助を奈良女子大学丹羽雅子教授と同大学大学院学生影山真理さんから受けた。ここに謝意を表したい。

文 献

- 1) 川 端 季 雄 : Development of a Simplified Biaxial Tensile Tester, 第14回繊維工学研究討論会, 日本繊維機械学会, 1985年 8 月.
 - 2) 例えば松田雅敏, 川端季雄 : Polymer Preprints, Japan **27**, 1732 (1978).
 - 3) 影山真理, 丹羽雅子, 布の二軸伸長特性の予測計算に関するリニアライズ法の適用性について, 第15回繊維工学研究討論会, 日本繊維機械学会, 1986年 8 月.
-