非等方性流体の流路内における流れの数値解析

(第1報) 平行平板流路内での十分に発達した流れの中および
発達している流れの中における繊維の配向について

滋賀大学教育学部 千 葉 訓 司 (会員)
大阪大学工学部 中 村 喜 代 次 (会員)

On the Solution of Anisotropic Channel Flow

Part 1 : Fiber Orientation in a Fully Developed Flow and a Developing Flow through a Parallel Plate Channel

Kunji Chiba* and Kiyoji Nakamura**

**Faculty of Education, Shiga University, Otsu, Shiga*

***Department of Mechanical Engineering, Osaka University, Suita, Osaka*

Abstract

This work concerns the two-dimensional fiber orientation in nonhomogeneous flow fields through a parallel plate channel as an elementary study on anisotropic channel flow. In this analysis fiber suspensions are considered as a continuum.

The fiber orientation in a fully developed flow is simulated by computing the evolution equation for the second-order orientation tensor along the streamlines. The fourth-order tensor, which is contained in the evolution equation for the second-order tensor, is approximated from the second-order tensor through a quadratic closure equation. The accuracy of the closure approximation is explored by comparing with the second-order tensor obtained by the statistical method in which a large number of fibers start from different initial orientations and a statistical orientation distribution can be evaluated by using the analytical solution of the Jeffery's equation. Numerical predictions of the fiber orientation in a developing flow are also obtained to study the effects of the velocity field on the orientation evolution of fibers.

When the fiber aspect ratio becomes small, the angular velocity of the fiber becomes higher, thus the fibers do not have enough time to reach the alignment along the streamlines. Furthermore, it appears remarkable that the fiber flips over within a very short time for small aspect-ratio fibers.

The much simpler quadratic closure approximation, which is introduced to relate the fourth-order tensor to the second-order tensor in the computation of the evolution equation for the second-order tensor, performs well when the fibers are highly aligned. However, it is not so adequate for random orientation state.

It is also clear that the alignment along the streamlines becomes better within a region near the centerline but the fibers require a longer distance to reach the high alignment as the wall is approached in a developing flow as compared with the fiber orientation in a fully developed flow.

(Received February 15, 1993)

(Accepted for Publication July 12, 1993)

摘 要

非等方性流体の流れに関する研究の第一段階として、ニュートン流体の希薄繊維懸濁液を連続体として捉え、平行平板流路内の流れ中における繊維の配向について次のことを調べた。

まず、十分に発達した流れ中における繊維の配向状態を、2次のclosure近似を用いて2階の配向テンソルの変化を表す式を流線に沿って数値解析することにより求めた。次に、このclosure近似が妥当であるかどうかを確かめるために流路入口でランダムな配列で流入した多数の繊維の姿勢の変化をJefferyの運動方程式を用いて数値計算し、配向テンソルを求めて比較した。最後に、助走域における繊維の配向状態を配向テンソルの変化を表す式を数値解析して求め、流速場が及ぼす影響を明らかにした。

アスペクト比が小さい繊維の場合には、アスペクト比の大きい繊維と比較して姿勢の変化が速いため、繊維全体が x 方向へ配列するのに十分な時間がなく配向状態は悪くなる。さらに、アスペクト比が小さい繊維の場合には、突然短時間のうちに姿勢を変えるflip-overと呼ばれる現象が顕著にみられる。

次に、2階の配向テンソルの変化を表す式を数値解析するとき用いた2次のclosure近似は、繊維がある方向に比較的良好に配列しているときには有効であるが、配列が乱れてくると妥当でないことがわかった。

一樣流れから十分に発達した流れへ至る助走域では、十分に発達した流れ中での場合に比べて、流路の中心部に近い領域では繊維は流れ方向に配列しやすいが、壁面に近づくにつれてより長い移動距離を必要とすることが明らかになった。

(平成5年2月15日受理)

(平成5年7月12日審査終了)

1. まえがき

等方性流体に繊維を分散すると繊維の配列に影響されて繊維懸濁液は非等方性を呈する。従って、等方性流体とは異なる流れ場を示す繊維懸濁液の流れ状態並びに繊維の配列状態を明らかにすることは、ガラス繊維強化プラスチックあるいは炭素繊維強化プラスチックに代表されるFRPの流動成形装置の設計並びに合理的な成形条件を決める上で極めて重要である。また、最近高機能性材料の一つとして注目されている液晶高分子も非等方性流体であり、ここで得られた結果は分子の配向を考える際の参考になる。

流れ中における繊維の配向に関する実験的研究としては、堀川ら¹⁾や千葉ら²⁾のニュートン流体および高分子溶液の流れ中における繊維の配向の測定があり、高分子溶液中では繊維は流線に沿って良好に配列することを明らかにしている。また、Jacksonら³⁾は、圧縮流れ中における繊維の配向状態を調べ、Jeffery⁴⁾の運動方程式を用いて行った数値解析結果と良く一致することを示している。

一方、流れ中における繊維の配向に関する数値解析では、従来、繊維の存在は流速場に影響を与えないと仮定して計算を行っている。すなわち、流速場を計算した後にJefferyの運動方程式を用いて繊維の配向を求めている^{3,5)}。しかし、最近、複雑な流路内でのニュートン流体の繊維懸濁液の流れは希薄であってもニュートン流体の流れと異なることが明らかにされており^{6,7)}、繊維懸濁液を含めた非等方性流

体の流れを解析する場合には、流速場を支配する方程式と繊維の配向を支配する方程式を連立して解く方法が採られている。

非等方性流体の最も簡単なモデルとしてはEricksen⁸⁾が提唱したTransversely Isotropic Fluid (TIF) があるが、この場合には微小流体要素内に存在する細長い粒子がすべてある方向に配列していると仮定している。ところが、繊維懸濁液を連続体として捉える場合には微小流体要素内に存在する繊維はいろいろな方向を向いているのでTIFモデルで用いられている仮定は適切でなく、繊維の配向分布を考慮する必要がある。このような考えに基づいて提案された繊維懸濁液に関する構成式としては、Dinh-Armstrong⁹⁾およびLipscombら¹⁰⁾のモデルがある。これらの構成式の中では繊維の配向分布を考慮するために次節で述べる配向テンソルが用いられている。

繊維懸濁液の流れ場並びに繊維の配向状態を解析する場合、大別して二つの方法がある。

- (1) 流速場を支配する方程式、構成式および配向テンソルの変化を表す式を連立して解く。
- (2) 流速場を支配する方程式、構成式および繊維の配向分布関数の変化を表す式を連立して解く。

(1)の方法の場合には、ある階数の配向テンソルの変化を表す式はそれより高い階数のテンソルを含んでいる。例えば、2階の配向テンソルの変化を表す式には4階のテンソルが含まれている。従って、closure近似を行って高階数テンソルの階数を下げ

る必要があり, Advani ら¹⁰⁾は closure 近似について検討している. 一方, (2)の方法を用いると, 流速場を計算するすべての格子点上で配向分布関数を求める必要があり, 計算時間並びにコストが増大するという欠点がある. 従って, 速度勾配が一定の流れ (homogeneous flow), 例えば, 単純せん断流れや単純伸長流れを解析する場合^{11,12)}には(2)の方法が用いられ, 一般の流路内のように速度勾配が一定でない流れ (nonhomogeneous flow) の場合^{13,14)}には(1)の方法が採られている.

本報では, 非等方性流体の流れに関する研究の第一段階として, ニュートン流体の希薄繊維懸濁液を連続体として捉え, 平行平板流路内の流れ中における繊維の配向に関して以下の三つの項目について調べる.

- (1) 十分に発達した流れ中における繊維の配向状態を配向テンソルの変化を表す式を数値解析することにより求める. この場合 closure 近似を用いる.
- (2) 十分に発達した流れ中において, 流路入口でランダムな配列で流入した多数の繊維の姿勢の変化を Jeffery の運動方程式を用いて数値計算し配向分布を求める. そして, 配向テンソルを計算して(1)で得られた結果と比較し, closure 近似の妥当性を確かめる.
- (3) 発達している流れ中における繊維の配向状態を(1)と同様の方法で数値解析により求め, 流速場の違いが繊維の配向に及ぼす影響を明らかにする.

以上の解析では, 二次元の流速場を考えているが, 流れが二次元であっても繊維は必ずその平面内に存在するとは限らず傾く場合もある. しかし, ここでは繊維についても二次元の配向を考える. さらに, 配向テンソルの変化並びに繊維の運動を計算する際にはニュートン流体に対する流速場を用いることとし, 繊維の存在が流速場に及ぼす影響については次の段階で考える.

2. 繊維の配向の数値解析

2.1 基礎式

ここでは繊維懸濁液の二次元の creeping flow 中における繊維の配向について考えている. まず, 個々の繊維の運動は次の Jeffery の運動方程式を用いて表すことができる.

$$D\mathbf{p}/Dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{d} - \mathbf{d} : \mathbf{p}\mathbf{p}\mathbf{I}) \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

ここで $\mathbf{p}$ は繊維の配列方向を示す単位ベクトルで配向ベクトルと呼ばれ, また, $\mathbf{d}$ は変形速度テンソル, $\boldsymbol{\omega}$ は渦度テンソル, $\mathbf{I}$ は単位テンソルである. D/Dt は物質微分で

$$D\mathbf{p}/Dt = \partial\mathbf{p}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{p} \quad (2)$$

である. さらに, λ は繊維のアスペクト比 (=長さ/直径) r_a を用いて

$$\lambda = (r_a^2 - 1)/(r_a^2 + 1) \quad (3)$$

と表される.

Jeffery の運動方程式は, 厳密には以下に示す仮定のもとに成立する.

- (1) 繊維の形状を楕円体と仮定する.
- (2) 繊維と流体との間で滑りは生じない.
- (3) 繊維が運動しても流速場は乱されない.
- (4) 繊維間の干渉はない.
- (5) 流れは定常で, 少なくとも繊維の代表長さの範囲内では homogeneous flow (一様な速度勾配の流れ) である.
- (6) 繊維は極めてゆっくり運動し, 慣性力は無視できる.
- (7) 繊維は流体と同一速度で移動する.

繊維とともに移動している観測者から見ると (Lagrangian sense では) 物質微分は $D/Dt = \partial/\partial t$ である.

一方, 繊維懸濁液を連続体として捉える場合には, 図1に示すように流線に沿って移動する微小流体要素を考えると要素内での繊維の配向分布関数 $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ は位置 $\mathbf{r}$, 時間 t の関数となる. そこで, 2 階および 4 階の配向テンソルを次式で定義する¹⁰⁾.

$$\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{p}\mathbf{p}\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{p} \quad (4a)$$

$$\mathbf{a}_4 = \oint \mathbf{p}\mathbf{p}\mathbf{p}\mathbf{p}\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{p} \quad (4b)$$

Fig. 1 Schematic diagram of fiber-suspension element.

2 階の配向テンソルの変化を表す式は、(1)式において前と後から $\mathbf{p}$ を掛けて配向分布関数に関して (4)式のように統計的な平均をとることにより求めることができる。

$$D\mathbf{a}_2/Dt = \omega \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \omega + \lambda(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d} - 2\mathbf{d} : \mathbf{a}_2) \quad (5)$$

(5)式を見れば明らかなように、この式には 4 階の配向テンソル $\mathbf{a}_4$ が含まれており、closure 近似が必要となる。ここでは 2 次の closure 近似を用いることにし、

$$\mathbf{d} : \mathbf{a}_4 = \mathbf{d} : \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \quad (6)$$

と近似する。(5)式も Jeffery の運動方程式の場合と同様に上述した仮定のもとで成立する。特に、仮定 (5)はこの場合、流れは定常で、少なくとも微小流体要素の代表長さの範囲内では homogeneous flow であるとなる。

2.2 十分に発達した流れ中における繊維の配向の数値解析

A. 繊維懸濁液を連続体として取り扱う場合

Fig. 2 Parallel plate channel and coordinate system.

図 2 に示すように、幅 $2H$ の平行平板流路入口に原点を持つ直角座標系を定め、距離、速度および時間を

$$\begin{aligned} y^* &= y/H, \quad x^* = x/H, \\ u^* &= u/U, \quad t^* = t/(H/U) \end{aligned} \quad (7)$$

と流路幅の半分 H および平均流速 U で無次元化する。十分に発達した流れの流速分布は既知であり、流線に沿った微小流体要素の移動は簡単に計算できる。

一方、 x 方向を 1 方向、 y 方向 2 方向とすると、 $\mathbf{a}_2$ の成分は

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

であり、

$$a_{11} + a_{22} = 1, \quad a_{21} = a_{12} \quad (9)$$

の関係がある。従って、2 階の配向テンソル $\mathbf{a}_2$ の変化は (5)式 (ただし、 D/Dt を $\partial/\partial t$ と書き直した式) のうち、 a_{11} と a_{12} 成分に関する式を Runge-Kutta の方法で流線に沿って数値解析すれば求まる。数値解析ではタイムステップを $\Delta t^* = 0.02$ とする。

ここでは、繊維が流路入口にランダムな配列で流入する場合を解析するので、 $\mathbf{a}_2$ の初期値は $a_{11} = 0.5$, $a_{12} = 0$ である。また、繊維のアスペクト比は $r_a = 5, 50, 100$ の 3 種類で、初期位置は $y^* = -0.1$ から $y^* = -0.9$ で 0.1 ごととする。

B. 多数の個々の繊維の配向を考える場合 (統計的方法)

前報¹⁹⁾で示したように、平行平板流路内の十分に発達した流れ中においては Jeffery の運動方程式は解析的に解くことができ¹⁶⁾、流れ方向に対する $\mathbf{p}$ の角度を配向角 θ (反時計回りを正) とすると

$$\theta = -\tan^{-1} \left[\frac{1}{r_a} \tan \left\{ \frac{-3y^*}{r_a + 1/r_a} t^* - \tan^{-1}(r_a \tan \theta_0) \right\} \right] \quad (10)$$

ただし、 θ_0 は初期配向角である。

この方法では、繊維の配向分布を統計的に求めるためにアスペクト比が $r_a = 5, 50$ の繊維 15,000 本を各初期位置 $y^* = -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$ で、初期配向角を $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$ の範囲でランダムに設定して数値解析を行う。そして、繊維の配向分布を求めるとともに (4)式により 2 階の配向テンソルを計算する。なお、配向角の区分を 1° として繊維の本数を 5,000 本から順次増加して配向分布を調べた結果、15,000 本程度で分布がほとんど変化しなくなったのでこの本数を採用した。また、比較的平坦な分布の場合には、本数が少ないと分布曲線の凹凸が著しくなる。

2.3 発達している流れ中における繊維の配向の数値解析

一様流れから十分に発達した流れへ遷移しているニュートン流体の creeping flow 中における繊維の配向を調べるために、慣性項を無視した過度移動方程式と流れ関数方程式を、入口で一様流れ、出口で十分に発達した流れの境界条件のもとで SOR 法で交互に解いて流速場を求めた。入口と出口間の距離を $L^* = 10$ と 20 として計算を行ったが、いずれの場合も $x^* = 4$ 付近では十分に発達した流れとなることが分かった (図 3 参照)。

Fig. 3 Computed streamlines in a developing flow.

2 階の配向テンソル $\mathbf{a}_2$ の計算は、初期位置 $y^* = -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$ を通る流線に沿ってタイムステップ $\Delta t^* = 0.02$ で Runge-Kutta の方法により行う。繊維のアスペクト比は $r_a = 5, 50$ で、入口での繊維の配列は前項の十分に発達した流れ中での場合と同様にランダムとする。一方、微小流体要素は流線に沿ってタイムステップ $\Delta t^*/2$ で移動させる。

3. 平行平板流路内の十分に発達した流れ中における繊維の配向

3.1 繊維懸濁液を連続体として取り扱う場合

図 4 に流路に沿った配向テンソルの成分 a_{11} と a_{12} の変化を示す。アスペクト比の大きい $r_a = 50$ (図(a)) の場合明らかなように、 a_{11} は 0.5 値から始まって徐々に 1 に近づいていく。すなわち、繊維はほぼ完全に x 方向に配列するようになる。また、壁面に近い領域ほど、速度勾配が大きくしかも流速が小さいので、短い移動距離で 1 の値に近づくことが分かる。これに対して、 a_{12} は壁面に近い領域ほど、短い移動距離で最大値をとり、その後減少して 0 に近づく。これは a_{11} が 1 に近づくことに対応している。ま

た、 $r_a = 50$ の場合 $y^* = -0.9$ の位置での a_{12} の値が $x^* = 9$ 付近から負の値になっているが、これはアスペクト比の小さい $r_a = 5$ (図(b)) の場合を見ると明確にわかる。 a_{11} は 0.5 から 1 の間で変動し、 a_{12} は 0 を中心に変動する。そして、 a_{11} が極大、極小をとる位置は $a_{12} = 0$ になる位置にほぼ一致する。ただし、アスペクト比が小さい繊維の場合には、アスペクト比の大きい繊維と比較して姿勢の変化が急激であるため、 a_{11} が 0.5 あるいは 1 の値に近づくが等しくはならない。このため、 x 方向への配向は $r_a = 50$ の場合に比べて悪くなると考えられる。

さらに、 a_{12} が急激に極小値から極大値へ変化する現象が見られる (例えば、 $y^* = -0.9$ の場合を参照のこと) が、これは繊維が大きな角度で急激に姿勢を変える flip-over と呼ばれる現象¹⁵⁾に対応している。

なお、(3)式から $r_a = 50, 100$ の場合それぞれ $\lambda = 0.9992, 0.9998$ となることから分かるように、 $0 \leq x^* \leq 15$ の領域では $r_a = 100$ の場合の配向テンソルの変化は、 $r_a = 50$ の場合とほぼ同一の曲線で表される。ただし、 $r_a = 100$ の場合、 $y^* = -0.9$ の位置での a_{12} の値も $0 \leq x^* \leq 15$ の領域では 0 に近づいていく。

流れ中における繊維の配向分布の変化の概要は次に示す配向楕円 (orientation ellipse) の変化を表す図から明らかになる。配向楕円は 2 階の配向テンソル $\mathbf{a}_2$ の固有値を長軸と短軸にした楕円を、 x 軸に対して固有ベクトルと x 軸とのなす角度 α だけ傾けたものである。

Fig. 4 Components of the second-order orientation tensor in a fully developed flow; (a) $r_a = 50$; (b) $r_a = 5$.

Fig. 5 Schematic diagram of fiber orientation in orientation ellipses; $a_{11} = 0.5, a_{12} = 0$ at $x^* = 0$; $a_{11} = 0.540, a_{12} = 0.192$ at $x^* = 1$; $a_{11} = 0.629, a_{12} = 0.309$ at $x^* = 2$; $a_{11} = 0.719, a_{12} = 0.351$ at $x^* = 3$.

$$\tan 2\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22}) \quad (11)$$

図5に配向楕円が繊維の配向分布を表すことを明らかにするため、 $r_a = 50, y^* = -0.2$ の $x^* = 0, 1, 2, 3$ の位置における楕円の中に100本の繊維の姿勢を描いて示す。固有ベクトルの方向が配向の主方向であることがわかる。また、短軸が短いほど繊維は固有ベクトルの方向に良好に配列することが分かる。

$0 \leq x^* \leq 2$ の領域における $r_a = 5$ および50の場合の詳細な配向楕円の変化を図6に示す。この領域内では $r_a = 50$ の場合楕円は徐々に x 軸に平行な直線に近づいていく。すなわち、繊維が x 方向に配列す

Fig. 6 Evolution of orientation ellipse in a fully developed flow; (a) $r_a = 50$; (b) $r_a = 5$.

Fig. 7 Preferred angle for fiber orientation in a fully developed flow; (a) $r_a = 50$; (b) $r_a = 5$.

るようになる。この傾向は速度勾配の大きい壁面近くの領域ほど著しい。また、 $r_a = 5$ の場合には $y^* = -0.9$ で $x^* = 1.75$ 付近で楕円が flip-over を起こしている。これらのことは、配向の主方向 (a_2 の固有ベクトルの方向) の変化を示す図7からも明確になり、とくに $r_a = 5$ の場合主方向が -45° から 45° へ急変することから flip-over が生じていることがわかる。

3.2 多数の個々の繊維の配向を考える場合 (統合的方法)

初期配向角をランダムに設定した15,000本の繊維について配向角 θ を 1° ごとに区切って整理し、配向分布関数 $\Psi(\theta)$ を求める。図8に $r_a = 50$ および5, $y^* = -0.5$ の場合の $x^* = 0, 3, 6, 9, 12, 15$ の各位置における配向分布関数 $\Psi(\theta)$ を示す。ただし、 θ の範囲は $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ とした。

$r_a = 50$ の場合には下流へ流れるにつれて配向の主方向が徐々に 0° に近づくとともに配向の分布もその方向に集中するようになる。これに対して、アスペクト比の小さい $r_a = 5$ の場合には主方向が正から負へ比較的短時間のうちに移るため繊維が十分に主

(a)

(b)

Fig. 8 Evolution of orientation-angle distribution at $y^* = -0.5$ in a fully developed flow; (a) $r_a = 50$; (b) $r_a = 5$.

方向に向くことができない。さらに、 $x^* = 12 \sim 13$ で flip-over を起こすため主方向が負から正へ急激に変わることもわかる。

次に、この配向分布関数を用いて (4a) 式から 2 階の配向テンソルの成分 a_{11} と a_{12} を計算し、3.1 項で得た結果と比較して、2 次の closure 近似の有効性を検討する。

図 9, 10 に $r_a = 50$ と 5 の場合が示してある。図中の曲線が 3.1 項の連続体的取り扱いにより得られた結果であり、記号で表すデータが統計的方法で求めた結果である。これより、速度勾配の小さい領域 (流路中心付近) と大きい領域 (壁面近く) で比較すると明らかなように繊維が x 方向に良好に配列していない範囲内では両者の結果に差が生じているが、

(a)

(b)

(c)

Fig. 9 Approximation for the second-order orientation tensor components for $r_a = 50$. — predictions using a quadratic closure approximation; ●■ predictions using a statistical Carlo method; (a) $y^* = -0.1$; (b) $y^* = -0.5$; (c) $y^* = -0.9$.

Fig. 10 Approximation for the second-order orientation tensor components for $r_e=5$.
— predictions using a quadratic closure approximation ; $\bigcirc$ $\square$ predictions using a statistical method ; (a) $y^*=-0.1$; (b) $y^*=-0.5$; (c) $y^*=-0.9$.

x 方向に良好に配列するようになると一致する。従って、2 次の closure 近似は繊維がある方向に比較的良好に配列している場合には有効であるが、配列が乱れてくると妥当でないといえる。これは Advani ら¹⁰⁾や Altan ら¹¹⁾が得た結果と一致している。

4. 平行平板流路内の発達している流れ中における繊維の配向

図11に十分に発達した流れ中と発達している流れ中における配向テンソルの成分 a_{11} と a_{12} の変化を比較して示す。図(a)~(c)は、それぞれ入口での位置 $y^*=-0.1, -0.5, -0.9$ を通る流線に沿った $r_e=50$ の繊維の結果である。

十分に発達した流れでは、 $y^*=-0.5773$ で $u^*=1$ になるので発達している流れの助走区間において $y^*=-0.1, -0.5$ を通る流線上では x 方向に加速されるが $y^*=-0.9$ を通る流線上では逆に減速され、さらに、図3に示す流線を見れば明らかに入口近く領域では y 方向の流速成分を持つ ($v^*=0.4$ 程度)。このため、前者と後者で配向テンソルの変化の概要が異なる。

後者の場合 (図11(c))、入口の直後で繊維はいったん y 方向に配列し始めるため a_{11} は0.5の値からいったん減少し、その後、十分に発達した流れ中での場合と同様に繊維が x 方向に配列し始めるため増大していく。繊維がこのような配列の変化を示すために a_{12} の最大値は十分に発達した流れ中での場合より大きくなり、しかも最大になる位置が下流へ移動する。これに対して前者の場合 (図11(a), (b)) には、入口直後に配向の主方向が流線に沿うようになる。従って、 x 方向への配列が十分に発達した流れの中での場合より良好になり、 a_{11} の値は大きくなり、 a_{12} の値は小さくなる。また、 a_{12} は入口直後に極大値を持ち減少して極小となった後増大して最大値を持つ。このような傾向は $r_e=5$ の場合にも見られる。

流線に沿った繊維の配向の変化は、図12, 13に示す配向楕円の図からいっそう明らかとなる。助走区間における場合 (図(b)) には流線も描いてある。十分に発達した流れ中と助走区間における配向状態を比較すると、上述したような流速分布の違いにより、 $r_e=5$ ならびに $r_e=50$ の場合ともに以下になる。

流路中心部に近い領域、 $y^*=-0.1$ を通る流線上では助走区間において流速が x 方向に大きく加速さ

Fig. 11 Comparison of the second-order orientation tensor components between in a fully developed flow and in a developing flow for $r_a = 50$; (a) $y^* = -0.1$; (b) $y^* = -0.5$; (c) $y^* = -0.9$.

Fig. 12 Evolution of orientation ellipse for $r_a = 50$ in (a) a fully developed flow and (b) a developing flow.

Fig. 13 Evolution of orientation ellipse for $r_a = 5$ in (a) a fully developed flow and (b) a developing flow.

れるため、配向の主方向が流線方向に向きやすくしかも十分に発達した流れ中での場合に比べて繊維が主方向に配列する割合が多い（楕円の短軸が小さくなっている）。ところが、 $y^* = -0.5$ を通る流線上では、助走区間において $x^* \leq 1$ 程度の領域で配向の主方向は流線の方に良く一致しているが、その後は徐々に流線に対して傾くようになる。また、主方向が流線の方に一致している領域においても主方向への繊維の配列は十分に発達した流れ中に比べて悪いことがわかる。最後に、壁面近くの領域、 $y^* = -0.9$ を通る流線上での配向の主方向は流線に対して大きく傾きしかも主方向への配列の割合が低い。このように、発達している流れ中での場合、繊維は流

路の中心部に近い領域では流れ方向に配列しやすいが、壁面に近づくにつれて十分に発達した流れ中での場合に比べて配列が悪くなる。

5. まとめ

本報では、非等方流体の流れに関する研究の第一段階として、ニュートン流体の希薄繊維懸濁液を連続体として捉え、平行平板流路内の流れ中における繊維の配向について次のことを調べた。

まず、十分に発達した流れ中における繊維の配向状態を配向テンソルの変化を表す式を流線に沿って数値解析することにより求めた。この場合2次のclosure近似を用いた。次に、このclosure近似が妥当であるかどうかを確認するために流路入口でランダムな配列で流入した15,000本の繊維の姿勢の変化をJefferyの運動方程式を用いて数値計算し、配向テンソルを求めて比較した。最後に、一様流れから発達している助走区間における繊維の配向状態を配向テンソルの変化を表す式を数値解析することにより求め、流速場が及ぼす影響を明らかにした。以上の解析では、繊維についても二次元の配向を考えた。さらに、配向テンソルの変化並びに繊維の運動を計算する際にはニュートン流体に対する流速場を用いた。

配向テンソルの成分 a_{11} 、 a_{12} の変化ならびに配向楕円の形状の変化を表す図から明らかなように、アスペクト比が小さい繊維の場合には、アスペクト比の大きい繊維と比較して姿勢の変化が速いため、 a_{11} が十分に1に近い値まで近づくことができず、 x 方向への繊維の配列が悪くなる。さらに、アスペクト比が小さい繊維の場合には、突然短時間の内に姿勢を変えるflip-overと呼ばれる現象が顕著にみられる。このとき a_{12} は急激に極小値から極大値へ変化し、 a_{11} は極小値を通過する。

次に、配向テンソルの変化を表す式を数値解析するとき用いた2次のclosure近似は、繊維がある方向に比較的良好に配列しているときには有効であるが、配列が乱れてくると妥当でないことが分かった。これはAdvaniらやAltanらが得た結果と一致している。

一様流れから十分に発達した流れへ至る助走域では、十分に発達した流れ中での場合に比べて、流路の中心部に近い領域では繊維は流れ方向に配列しやすいが、壁面に近づくにつれてより長い移動距離を必要とすることが明らかになった。

最後に、配向分布関数 $\Psi(\theta)$ は、偶階数のテンソルである配向テンソルが求まれば、 $\Psi(\theta)$ をフーリエ級数に展開することにより計算することができる¹⁰⁾。ただし、配向が比較的ランダムに近い場合には低階数の配向テンソルだけで十分であるが、良好な配列を示す場合には高階数の配向テンソルが必要になり、ここで計算した2階の配向テンソルだけでは $\Psi(\theta)$ を求めることができない。

従って、繊維の存在が流速場に及ぼす影響を調べる次の段階では、まず、運動方程式、構成式および2階の配向テンソルの変化を表す式(ただし、closure近似を行う)を連立して解いて流速場を求める。その後、この流速場を用いて配向分布関数の変化を表すFokker-Planckの式¹⁷⁾を数値解析することにより流路内の各位置における配向分布関数 $\Psi(\theta)$ を求めることとする。この方法ではFokker-Planckの式を運動方程式および構成式と連立して解く必要がないため、計算時間、コストなどから考えて最適である。

参考文献

- 堀川 明, 寺岡文雄, 木村 博; 繊維機械学会論文集, 36, T1 (1983)
- 千葉訓司, 林 茂寿, 小嶋邦夫, 宋 起元, 中村喜代次, 堀川 明; 繊維機械学会論文集, 41, T45 (1988)
- W. C. Jackson, S. G. Advani and C. L. Tucker III; J. Compos. Mater., 20, 539 (1986)
- G. B. Jeffery; Proc. R. Soc., A 102, 161 (1922)
- R. C. Givler, M. J. Crochet and R. B. Pipes; J. Compos. Mater., 17, 330 (1983)
- G. G. Lipscomb II, M. M. Denn, D. U. Hur and D. V. Boger; J. Non-Newtonian Fluid Mech., 26, 297 (1988)
- 千葉訓司, 村上公啓, 山本徹也, 中村喜代次; 繊維機械学会論文集, 44, T247 (1991)
- J. L. Ericksen; Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 231 (1960)
- S. M. Dinh and R. C. Armstrong; J. Rheol., 28, 207 (1984)
- S. G. Advani and C. L. Tucker III; J. Rheol., 31, 751 (1987)
- M. C. Altan, S. G. Advani, S. I. Guceri and R. B. Pipes; J. Rheol., 33, 1129 (1989)
- S. Akbar and M. C. Altan; Polym. Eng. Sci., 32, 810 (1992)
- H. H. D. Frahan, V. Verleye, F. Dupret and M. J. Crochet; Polym. Eng. Sci., 32, 254 (1992)
- M. C. Altan, S. I. Guceri and R. B. Pipes; J. Non-Newtonian Fluid Mech., 42, 65 (1992)
- 千葉訓司, 中村喜代次; 繊維機械学会論文集, 45, T128 (1992)
- H. Goldsmith and S. G. Mason; "Rheology: Theory and Application", Academic Press, p. 85 (1967)
- L. G. Leal and E. J. Hinch; J. Fluid Mech., 46, 685 (1971)