論 文

レオノフモデルを用いた非定常粘弾性流れの有限要素解析

(第2報) 二次元急絞り流路におけるスタートアップ流れの応力場

大阪大学工学部 中 村 喜 代 次 (会員)

大阪大学工学部 山 本 剛 宏 (会員)

Finite Element Simulation of Unsteady Viscoelastic Flow Using Leonov Model

Part 2 : Stress Field of Two-Dimensional Start-Up Flow through Abrupt Contraction

Kiyoji Nakamura and Takehiro Yamamoto

Department of Mechanical Engineering, Osaka University, Suita, Osaka

Abstract

Unsteady viscoelastic flows were studied using the finite element method. The Leonov model has been used to represent the rheological behavior of the viscoelastic fluid. We numerically analyzed a start-up flow problem in channels with 4:1 and 8:3 abrupt contraction for polystyrene (STYRON 678) at 190°C, and obtained the predictions of transient behavior of velocity and stress fields. In the part 1, the results of velocity field were reported and in the present paper, the results of stress as field are reported.

The results obtained from the simulation are follows, (1) normal stress difference along the center line takes the maximum value just upstream the contraction, and (2) size of vortices increase to restrain the growth of velocity gradient and to relax the growth of normal stress difference.

(Received August 27, 1993)

(Accepted for Publication June 3, 1994)

摘 要

目的 構成式に Leonov モデルを使用し、粘弾性流体の二次元急絞り流路におけるスタートアップ流れの数値解析を行うことにより、粘弾性流体の非定常流動特性を調べる。第1報では速度場の結果を報告した。第2報では応力場の解析結果を示す。

成果 有限要素法を用いて粘弾性流体のスタートアップ流れの数値計算を行い、つぎの結果を得た。

(1) 中心線上の法線応力差は絞り部の少し上流側で最大値をとる。

(2) 流路角部に渦が発生する。そして、その渦が大きくなることによって、絞り部付近の速度勾配の増大が抑えられ、それによって法線応力差の増大が緩和されることが分かった。つまり渦が stress relief mechanism として働くことが確認された。

(平成5年8月27日受理)

(平成6年6月3日審査終了)

1. 緒 言

現在までに行われている粘弾性流れの数値解析の大部分は定常流れを対象としたものであり、非定常流れを対象としたものは少ない。しかし、粘弾性流体はその時間依存特性のために、非定常流れにおい

てニュートン流体にはみられない複雑な挙動¹⁾を示す。さらに非定常流れは高分子成形加工のように工業的にもよくみられる流れである。従って粘弾性流体の非定常流れについて数値解析を行い、その非定常特性を調べることは興味深い問題である。

本研究では非定常流れとしてスタートアップ流れ

を取り上げた。これまでに急絞り流路におけるスタートアップ流れのような複雑な流れについては実験による研究^{2,3)}は行われているが、数値解析はほとんど行われていない。そこで、本研究では急絞り流路におけるスタートアップ流れの数値解析を行い、その結果をもとに粘弾性流体の非定常特性について考察する。また粘弾性流体の特性を記述する構成式として、高分子融液に対して提案された Leonov モデル^{4,5)}を使用する。

第1報⁶⁾では流速場について数値解析を行い、流速のオーバーシュートや渦の大きさの時間的変化を数値計算によって予測した。第2報では応力場について数値解析を行い、その結果と第1報で示した流速場の解析結果とを比較しながら、粘弾性流体の非定常特性について考察する。

2. 基礎方程式

本研究では2次元非定常流れを考える。さらに流れは creeping flow であるとして、運動方程式中の慣性項を無視する。また流体は非圧縮性流体とする。

以下に基礎方程式を示す。構成式には Leonov モデルを用いる。

連続の式：

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

Cauchy の運動方程式：

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} p \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{V}$ は速度ベクトル、 ρ は流体の密度、 $\boldsymbol{\tau}$ は偏差応力テンソル、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 p は圧力である。 ∇ はナブラ演算子を表す。

構成式 (Leonov モデル)：

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_0 \mathbf{D} + \sum_{k=1}^N \mu_k \mathbf{C}^k \quad (4)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{C}}^k + \frac{1}{2\theta_k} (\mathbf{C}^k \cdot \mathbf{C}^k - \mathbf{I}) = 0 \quad (5)$$

$$\mu_k \equiv \eta_k / \theta_k \quad (6)$$

$$\eta_0 \equiv \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{1-s} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad (8)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{C}}^k \equiv \frac{\partial \mathbf{C}^k}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{C}^k - \nabla \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{C}^k - \mathbf{C}^k \cdot \nabla \mathbf{V} \quad (9)$$

$$\det \mathbf{C}^k = 1 \quad (10)$$

ここで、 η_k 、 θ_k 、 s は Leonov モデルのパラメータでそれぞれ第 k モードの粘度、第 k モードの緩和時

間、レオロジ定数である。 N はモード数である。 $\mathbf{C}^k$ は第 k モードの Finger ひずみテンソル、 $\mathbf{D}$ は変形速度テンソルを表す。 $[\overset{\nabla}{\cdot}]$ は上対流微分である。

3. 数値計算スキーム

数値計算スキームは第1報で示したものと同じである。以下にそのスキームを簡単に示す。

空間に関しては有限要素法を用いた離散化を行う。速度とひずみに対しては6節点三角形要素を、圧力に対しては3節点三角形要素を使用する。時間に関する離散化は速度-圧力系には Crank-Nicolson 法を、ひずみ系には Euler の前進差分を用いる。そして以上の方法で離散化した式を各時間ステップについて解くことによって非定常解を得る。

スタートアップ流れのモデルとして次のような流れを考える。流体は初期状態で静止している。そして時刻 $t \geq 0$ において入口境界に十分に発達した流れの境界値を与える。入口境界で与える十分に発達した流れの流速分布は Upadhyay ら⁷⁾の方法に基づいて計算する。

また計算コストの低減のために非常に小さな緩和時間を持つモードに対しては quick adaptation 近似⁸⁾を適用する。

4. 数値解析

4.1 計算条件

本解析では試料流体として 190°C のポリスチレン融液 (STYRON 678, Dow Chemical) を考えた。この流体はせん断粘度の shear-thinning 性と伸長粘度の stretch-thickening 性を示す。Leonov モデルのパラメータ⁹⁾ (表1) は第1報で使用したのと同じである。第2モードに対して quick adaptation 近似を用いる。

解析は絞り比が 4:1 と 8:3 の2種類の急絞り流路について行った。流路形状、境界条件、使用した有限要素メッシュ (図1)、計算条件 (入口平均流速 $\bar{u}_{\text{ent}}$ 、出口平均流速 $\bar{u}_{\text{ext}}$; 表2) は第1報のものと同一である。以下の文章で (A)、(B) はそれぞれ表2の条件に対応する。また、表2に示した流速は本計算のほぼ上限に相当する。

4.2 計算結果

図2、図3に $t=1.0\text{s}$ における法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ およびせん断応力 $|\tau_{xy}|$ の分布を示す。図4に $\tau_{xx} - \tau_{yy}$

Table 1 Parameters for Leonov Model (STYRON 678 at 190°C)

s [-]	η_k [Pa · s]	θ_k [s]
9.0×10^{-2}	5.44×10^3	0.80
	1.50×10^3	0.027

Table 2 Condition of Calculation

	contraction ratio	$\bar{u}_{ent}$ [mm/s]	$\bar{u}_{ext}$ [mm/s]
(A)	4 : 1	3.0	12.0
(B)	8 : 3	4.5	12.0

Fig. 1 Finite Element Meshes Used for the Numerical Simulation : (a) Two Dimensional Channel with 4 : 1 Abrupt Contraction (MESH 1), 192 Elements and 445 Nodes. (b) Two Dimensional Channel with 8 : 3 Abrupt Contraction (MESH 2), 214 Elements and 489 Nodes

の時間変化を、図 5 に $|\tau_{xy}|$ の時間変化を示す。

$\tau_{xx} - \tau_{yy}$ について次のような特徴がみられる。

(i) 流路の中心付近では絞りの上流側から大きくなり、絞り部を通過すると小さくなる。

(ii) 絞り部の下流側では壁面に近いほど大きい。

(i) は流れ場の伸長特性によるもので、(ii) はせん断特性によるものである。絞り付近では絞りの影響により、流れ方向の速度勾配の増大によって伸長速度が増大する。それで、伸長粘度の stretch-thickening 性によって伸長粘度が大きくなり、その結果として伸長応力が増大する。絞りの下流側では流速が大きくなり、壁面におけるせん断速度も増大する。そのために、単純せん断流れにおける第 1 法線応力差の増大に相当する現象が起きている。

$|\tau_{xy}|$ については次のような特徴がみられる。

(i) 渦の存在のために流路の凹角部では $|\tau_{xy}|$ は小さい。

(ii) 絞り部の下流側で $|\tau_{xy}|$ は大きくなる。

(i) は渦領域で流速が非常に小さくなるのが原因である。(ii) は絞り部の後方では流速の増大とともにせん断速度が増大し、その結果として $|\tau_{xy}|$ が大きくなるからである。

応力は (A) と (B) のいずれの場合でも入口付近と絞り部付近から発達することが分かる。また、応力の値は絞り比の大きい (A) の方が大きくなる傾向がある。しかし絞りから十分に離れた下流側ではせん断特性が支配的であり、本計算では $\bar{u}_{ext}$ が等しいために、(A) と (B) で $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ や $|\tau_{xy}|$ にあまり違いはみられない。一方、伸長特性が支配的な絞り部付近では $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ に違いがみられる。 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は絞り比が大きく伸長効果が強くなる (A) の方が大きくなっている。

次に示す速度勾配と法線応力差の計算から、第 1 報で報告した渦の大きさの時間変化は絞り部付近の

Fig. 2 Distribution of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ at 1.0s; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent} = 3.0\text{mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent} = 4.5\text{mm/s}$

Fig. 3 Distribution of $|\tau_{xy}|$ at 1.0s; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent} = 3.0\text{mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent} = 4.5\text{mm/s}$

Fig. 4 Change of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with Time; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent} = 3.0 \text{ mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent} = 4.5 \text{ mm/s}$

伸長特性と関係があることが分かった。

図6に中心線上の速度勾配 $\partial u / \partial x$ の分布を示す。ニュートン流体の物性値は粘度がポリスチレン融液の零せん断粘度 η_0 に等しく、密度もポリスチレン融液のものと同しくなるように設定した。ここでニュートン流体の計算結果は定常状態における値である。ニュートン流体の場合には定常値に達するまでの時間が非常に短く、流動開始直後の値と変わらない。ポリスチレン融液の場合、 $\partial u / \partial x$ は流動の初期には大きな値をとるが時間とともに小さくなる。そして、絞り部の少し上流側で最大値をとっている。また、(A)と(B)のいずれの場合もニュートン流体の $\partial u / \partial x$ より小さな値をとる。これは粘弾性流体の流れ場がニュートン流体の流れ場に比べて、伸長応力の増大を抑えるような形状をとっているためである。また、絞り比が大きい(A)の方が中心線上の $\partial u / \partial x$ が大きくなる。

図7に中心線上の $\tau_{xx} - \tau_{yy} = [4\eta_0 s \partial u / \partial x + \sum_{k=1}^N \mu_k$

$(C_{xx}^* - C_{yy}^*)]$ の分布を示す。いずれの場合も $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は絞り部の近くで大きな値をとっており、絞り部の少し上流で最大値を示すことが分かる。これは絞り部の近くで伸長応力が大きくなっていることを示している。この領域は $\partial u / \partial x$ が大きくなることから伸長特性が支配的であることが分かる。

また図6, 7の結果において解の振動がみられるが、これはメッシュの粗分割によるものである。

図8に渦の大きさの時間変化を示す。渦の大きさはいったん大きくなり、最大値をとったあと減少し一定値に落ちつく。図7と比較すると、渦の成長によって $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の増大の原因の一つである $\partial u / \partial x$ が抑えられていることが分かる。

次に図9に絞り部とその上流および下流側3.5 mmにおける中心線上の $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の時間変化を示す。定量的には違いがあるが、定性的な傾向はいずれの場合も同じである。流動の初期において $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は急激に増大し、 $t = 1.0 \text{ s}$ 付近でその変化は小さくな

Fig. 5 Change of $|\tau_{xy}|$ with Time ; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent}=3.0\text{mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent}=4.5\text{mm/s}$

Fig. 6 Change of Velocity Gradient $\partial u/\partial x$ with Time on the Center Line ; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent}=3.0\text{mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent}=4.5\text{mm/s}$

(a)

(b)

Fig. 7 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ along the Center Line; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent} = 3.0 \text{ mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent} = 4.5 \text{ mm/s}$

(a)

(b)

Fig. 8 Size of Corner Vortex; (a) MESH 1, $\bar{u}_{ent} = 3.0 \text{ mm/s}$, (b) MESH 2, $\bar{u}_{ent} = 4.5 \text{ mm/s}$

る。しかし、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ のオーバーシュートはみられない。

先に示した渦の大きさの時間変化、速度勾配 $\partial u / \partial x$ 、中心線上の法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の計算結果を総合すると、スタートアップ流れにおいて次のような

現象が生じていると考えられる。

流動初期では $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の増大の原因となる $\partial u / \partial x$ は大きく、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ が急激に増大する。しかし渦が成長することによって $\partial u / \partial x$ が抑えられ、それによって $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の増大（伸長応力の増大）が緩和する。つ

Fig. 9 Change of $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ with Time on the Center Line

まり、循環二次流れは stress relief mechanism¹⁰⁾ として働いていると考えられる。

5. 結 言

本研究では急絞り流路におけるポリスチレン融液 (STYRON 678) の2次元スタートアップ流れの数値計算を行った。構成式として2モード Leonov モデルを使用し、解析手法に有限要素法を用いた。第2報では応力場に関する解析を行った。そして、その結果と第1報で報告した速度場に関する解析結果から粘弾性流体の非定常特性について考察した。

スタートアップ流れのモデルとして、初期状態で流体は静止しているとして、 $t \geq 0$ において入口境界で十分発達した流れを考えた。

数値解析から次の結果を得た。

(1) 中心線上の法線応力差 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は絞り部の少し上流で最大値をとる。また、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は流動初期に急激に増大することが分かった。しかし、オーバーシュートはみられなかった。

(2) 流路角部の循環二次流れは絞り部付近における流れの伸長特性に関係がある。中心線上の速度勾配 $\partial u / \partial x$ と $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ を調べると、流動初期は $\partial u / \partial x$ が大きく、そのために伸長応力が増大し、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ は急激に増大する。これを抑えるために渦が大きくなり、 $\partial u / \partial x$ が小さくなる。それで、 $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の時間変化も小さくなる。このように、循環二次流れは $\partial u / \partial x$ を抑えることによって $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ の増大を緩和している。つまり、循環二次流れが stress relief mechanism として働いていることが分かった。また、第1報で報告したように、絞り比が4:1の流路の方が8:3の流路よりも大きな渦が生じるのは、絞り比の大きい流路では $\partial u / \partial x$ が大きくなり、伸長効果が強くなるためである。

参考文献

- 1) R. I. Tanner; "Engineering Rheology", Clarendon Press (1985)
- 2) Y. Xu, P. Wang and R. Qian; Rheol. Acta, **25**, 239 (1986)
- 3) 森教安, 海下巧, 中村喜代次; 日本レオロジー学会誌, **21**, 33 (1993)
- 4) A. I. Leonov; Rheol. Acta, **15**, 85 (1976)
- 5) A. I. Leonov, E. H. Lipkina, E. D. Pashkin and A. N. Prokunin; Rheol. Acta, **15**, 411 (1976)
- 6) 中村喜代次, 山本剛宏; 繊維誌, **47**, T127 (1994)
- 7) R. K. Upadhyay and A. I. Isayev; Rheol. Acta, **25**, 80 (1986)
- 8) A. I. Leonov and A. N. Prokunin; Rheol. Acta, **19**, 393 (1980)
- 9) A. I. Isayev and C. A. Hieber; Rheol. Acta, **19**, 168 (1980)
- 10) J. L. White and A. Kondo; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **3**, 41 (1978)