衣料新商品の普及・衰退過程の解析

(第2報) 購入された衣料が逐次廃棄される場合

田 畑 昌 顕

Diffusion Process of New Products of Clothing

Part 2 : On the Case of New Products Abandoned Successively

Masaaki Tabata

Abstract

(1) Diffusion process of the new clothing products was mathematically analysed, in the case that the new products are abandoned successively.

In order to simplify analysis, five models were settled in connection with the manner in which the new products were abandoned.

(2) Equations expressing $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$ were derived in the five models respectively. Here $N(t)/M$ shows the value of diffusion rate at time t . $F(t)/M$ and $G(t)/M$ are the relative values of the number of people who have bought and abandoned the new products in unit time at time t .

Shape of $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$ curves varies by the values of coefficient α , β , q and r . Here α and β are the coefficients related to the probability with which the people buy or abandon the product in unit time at time t . The symbol q shows the time when the abandonment of the products occurs, and r shows the possessing period of the product.

By means of analysing these equations, we can understand the characteristics of the diffusion processes of the new products.

(3) Model A and B are the cases in that the people who have abandoned the products are expected to buy again them. In these models the value of $N(t)/M$ converges to a certain value after long period. Necessaries of life are the products of these models.

Model C, D and E are the cases in that the people who have abandoned the products will never buy them again. In these models, $N(t)/M$ forms a hill-shaped curve and its value reaches to zero after some period. Fashion clothings are the products of these models.

(Received March 16, 1998)

(Accepted for Publication Sept. 4, 1998)

1. 緒 言

本研究は衣料新商品が発売後どのように普及し衰退していくか、その変化の基本的な性格を把握することを目的として、衣料新商品の普及・衰退過程を数式で表現しようと試みたものである。普及・衰退過程の大筋を把握するため、要因は極力単純化した。消費者の購入・廃棄に関する個人差などの影響

については、これらの要因と数式中の係数との関係を検討することにより考察できると考えている。

前報¹⁾では購入された新商品が廃棄されることなく継続して使用される場合について、新商品が普及していく過程を解析した。消費者が衣料新商品の購入を決める確率は、その時点におけるその商品の使用者の数に比例すると仮定している。その結果、単位時間当たり購入者数の時間的変化を表す関数 F

~~~~~
会員, Member, 大阪成蹊女子短期大学, Osaka Seikei Women's College, 大阪市東淀川区相川, Aikawa, Higasiyodogawa-ku, Osaka

(*t*) および普及率の時間的変化を表す関数 $N(t)$ を数式として導くことができた。これによれば $F(t)$ は正規分布に類似する曲線で表され、 $N(t)$ はロジスティック曲線といわれる S 字型の曲線で表されることがわかった。

しかし購入された商品がまったく廃棄されないという仮定は現実的ではない。そこで本報では購入された商品が逐次廃棄されていく過程を 5 種類のモデルで表し、それぞれのモデルについてこの商品に関する $N(t)$ 、 $F(t)$ および単位時間当たり廃棄者数の時間的変化を示す関数 $G(t)$ を導いた。そしてこれらの数式を検討することにより、その普及・衰退過程の特徴を把握しようと試みた。

2. モデルの設定

2.1 商品所有者の廃棄行動

商品所有者の廃棄行動すなわち商品の廃棄のされ方については、その代表的なタイプとして次の諸ケースが考えられる。

(1) すでに購入使用されている商品を汚損等の理由で廃棄したときに、直ちに代替りの新品を購入するケース。このケースでは商品が廃棄されると、ほぼ同時に購入が行われる。必需的消耗品がこのケースに当てはまる。

(2) 最初購入した商品を不要と考え一旦廃棄したが、しばらくたってまた必要となり、再度この商品を購入するケース。このケースでは販売開始直後から商品の廃棄が始まるが、最初に購入した商品を廃棄した時点から 2 度目の商品を購入する時点までの時間には、人によりかなりばらつきがある。必需品ではないが必需品に近い商品の場合に多い。

(3) 販売開始直後から商品の廃棄が始まるが、一旦廃棄した後は、再度この商品を購入することはないケース。必需品ではなく、かつ商品価値に問題があるような流行商品に起こりやすいと思われる。

(4) 販売開始後ある時間（流行期間に相当する）が経過してから廃棄が始まるケース。廃棄する時期については所有者によりばらつきがある。流行期間が過ぎると商品価値が下がり、使用頻度が急激に低下する一般の流行商品がこれに当てはまる。このケースでは一度廃棄した人はこの商品を再び購入することはないと考えられる。

(5) 購入された商品は長期間使用された後廃棄されるが、保有期間はその商品の本来の耐用年数に近

く、所有者によるばらつきが比較的小さいケース。デザインや品質が優れた商品価値の高い商品はその一例であろう。この場合も一旦商品を廃棄した人が再度この商品を購入する可能性はない。

2.2 モデルの設定

前項において商品所有者の廃棄行動に関し 5 種類のケースを考えたが、これらの 5 ケースのそれぞれに対応し、次の 5 モデル A, B, C, D, E を設定する。なお前報のケース、すなわち購入された商品が廃棄されず継続して使用される場合を基本モデルとよぶことにする。

(1) 基本モデル：前報で用いたモデルである。購入された商品は廃棄されることなく、長期間継続して使用される。単位時間内に未購入者が新商品を購入する確率は、その時点における既購入者（所有者）の数に比例すると考える。

(2) モデル A：2.1 項(1)のケースに対応する。このモデルでは、すでに購入所有されている商品が汚損などの理由で廃棄されると、直ちに代替りの新品が購入されると考える。廃棄と代品の購入が同時である。

(3) モデル B：2.1 項(2)のケースに対応する。このモデルでは、購入された商品は発売開始直後から時間の経過に伴い、一定の確率で逐次廃棄されていくが、一旦廃棄した人も廃棄後しばらくたってから再び新品を購入する可能性があると考えられる。

(4) モデル C：2.1 項(3)のケースに対応する。このモデルでは、購入された商品は販売開始直後から一定の確率で逐次廃棄されていくが、一旦廃棄した人は以後この商品を購入する可能性がないと考える。再度この商品を購入する可能性がない点が、モデル B と異なっている。

(5) モデル D：2.1 項(4)のケースに対応する。このモデルでは、購入された商品は発売当初しばらくは廃棄されず、発売後時間 q が経過した時点から一定の確率で廃棄されていく。また一旦廃棄した人は以後この商品を購入しないと考える。

(6) モデル E：2.1 項(5)のケースに対応する。このモデルでは、商品は購入後一定期間 r だけ保有使用された後に廃棄され、かつ一旦廃棄した人は以後この商品を購入しないと考える。モデル D では商品の保有使用期間は所有者によって異なり一定ではないが、モデル E では商品の保有使用期間はすべての所有者について一定であるとする。

モデル A と B では一度廃棄した人も再度この商品を購入する可能性があるが、モデル C, D, E では一度廃棄した人は再度この商品を購入する可能性はない。

なお 1 人が 1 回に購入する商品数は全モデルにおいて 1 つとする。

3. 理論式と考察

3.1 記号

記号を前報と同様次のように定める。

- t : 時間。単位は年、月あるいは日など適宜定めることができるが、本報では便宜上時間の単位を TU で表すことにする。単位が変われば係数 α , β の値も変わってくる。
- $N(t)$: 時刻 t においてこの商品を所有している人の数
- $F(t)$: 時刻 t において単位時間内にこの商品を購入する人の数
- $G(t)$: 時刻 t において単位時間内にこの商品を廃棄する人の数
- M : この商品の購入使用が期待される層に属する人の総数
- $N_0 = N(0)$: 時刻 $t=0$ においてこの商品を所有している人の数

以上のように定義すると次式が成り立つ (図 1 参照)。

$$N(t) = N_0 + \int_0^t F(t)dt - \int_0^t G(t)dt \quad (1)$$

$$dN(t)/dt = F(t) - G(t) \quad (2)$$

3.2 基本モデルの場合

基本モデルでは常に $G(t)=0$ である。そして前報

Fig 1 Relation between $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$

で述べたように、非所有者 (未購入者) が単位時間内に新商品を購入する確率は、その時刻 t における所有者数 $N(t)$ に比例する。したがって時刻 t と $t + \Delta t$ 間で非所有者がこの商品を購入する確率は $\alpha N(t)\Delta t$ で表すことができる。ここで α は、この商品の所有者が非所有者の購買意欲に与える影響の大きさを示す係数である。また時刻 t における非所有者の数は $\{M - N(t)\}$ であるから、時刻 t と $t + \Delta t$ 間でこの商品を購入する人の数 $F(t)\Delta t$ は $\{M - N(t)\}$ と $\alpha N(t)\Delta t$ との積に等しい。この関係を(2)式に代入し、かつ $G(t)=0$ とおくと、前報で述べたように次式が成立する。

$$F(t) = dN(t)/dt = \alpha N(t) \{M - N(t)\} \quad (3)$$

(3)式を解けば

$$\frac{N(t)}{M} = \frac{1}{1 + k \exp(-\alpha M t)} \quad (4)$$

(4)式を(3)式に代入し

$$\frac{F(t)}{M} = \alpha M \left\{ \frac{1}{1 + k \exp(-\alpha M t)} \right\} \times \left\{ 1 - \frac{1}{1 + k \exp(-\alpha M t)} \right\} \quad (5)$$

ただし k は $K = M/N_0 - 1$ より求められる数値である。

3.3 モデル A の場合

このモデルでは、時刻 t と $t + \Delta t$ 間でこの商品を購入する人の数 $F(t)\Delta t$ は、この間にこの商品の使用者から刺激を受けて、初めてこの商品を購入する人の数 $F_1(t)\Delta t$ と、汚損した商品を廃棄して代わりに新品を購入する人の数 $F_2(t)\Delta t$ の和として与えられる。よって(2)式は次式のように書ける。

$$dN(t)/dt = F_1(t) + F_2(t) - G(t) \quad (6)$$

このモデルでは廃棄と同時に新品が購入されるから、 $F_2(t)\Delta t$ は時刻 t と $t + \Delta t$ 間でこの商品を廃棄する人の数 $G(t)\Delta t$ に等しいはずである。よって(6)式で $F_2(t) = G(t)$ とおけば

$$dN(t)/dt = F_1(t) \quad (6')$$

一方、 $F_1(t)\Delta t$ は前述の基本モデルと同様 $\alpha N(t)\Delta t$ と $\{M - N(t)\}$ の積で与えられるから、これを(6')式に代入すれば次式が成立する。

$$dN(t)/dt = \alpha N(t) \{M - N(t)\}$$

この式は(3)式とまったく同じであり、したがってモデル A における $N(t)$, $F(t)$ は基本モデルと同様(4)および(5)式で与えられる。これらの式は廃棄と購入が何回繰り返されても、それが同時に行われる限

Fig 2 $N(t)/M$ and $F(t)/M$ in the case of Model A ($\alpha M=1.0$, $k=99$)

り成立する。

なお、 $G(t)$ は種々の場合が考えられ、特定の数式として表すことはできない。また基本モデルの場合と異なり、モデル A の場合には所有者数と商品の販売数量とは一致しない。

図 2 にモデル A における $N(t)/M$, $F(t)/M$ の値と時刻 t との関係の一例を示す。 $\alpha M=1.0$, $k=99$ ($N_0/M=0.01$) として計算した。ただし $F_2(t)$ および $G(t)$ は確定した数式として表すことができないので、その記入は省略した。

3.4 モデル B の場合

購入された商品は販売開始直後から逐次廃棄されていくが、廃棄行動に関しては対象とする層の消費者はすべて同質であり、単位時間当たりの廃棄者数 $G(t)$ は所有者数 $N(t)$ に常に比例すると考える。したがって、この比例常数を β' とおけば、時刻 t と $t+\Delta t$ 間でこの商品を廃棄する人の数 $G(t)\Delta t$ は次式で与えられる。

$$G(t)\Delta t = \beta' N(t)\Delta T \quad (7)$$

β' の値は所有者が単位時間内にこの商品を廃棄する確率を示し、 β' が大きいほど、この商品は早く廃棄されることになる。

(7)式で $\beta'=\beta M$ とおけば、 $G(t)$ は次のように書ける。

$$G(t)=\beta MN(t) \text{ または } G(t)/M=\beta MN(t)/M \quad (8)$$

この商品の非所有者が時刻 t と $t+\Delta t$ 間でこの商品を購入する確率は $\alpha N(t)\Delta t$ である。一方、時刻 t における非所有者の数は $\{M-N(t)\}$ で表されるから、時刻 t で単位時間内にこの商品を購入する人の数 $F(t)$ は、基本モデルと同様両者の積すなわち(3)式で与えられる。よって(3)式と(8)式を(2)式に代入す

れば

$$\begin{aligned} dN(t)/dt &= \alpha N(t) \{M-N(t)\} - \beta MN(t) \\ &= N(t) \{(\alpha-\beta)M - \alpha N(t)\} \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式は次式のように変形できる。

$$\frac{dN(t)}{N(t)} + \frac{\alpha dN(t)}{(\alpha-\beta)M - \alpha N(t)} = (\alpha-\beta)M dt \quad (10)$$

両辺を積分すれば

$$\log N(t) - \log [(\alpha-\beta)M - \alpha N(t)] = (\alpha-\beta)Mt + c \quad (11)$$

左辺をまとめれば

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{N(t)}{(\alpha-\beta)M - \alpha N(t)} \right] &= (\alpha-\beta)Mt + c \\ \therefore \frac{N(t)}{(\alpha-\beta)M - \alpha N(t)} &= c' \exp [(\alpha-\beta)Mt] \end{aligned} \quad (12)$$

これより $N(t)$ を求めれば

$$N(t) = \frac{(\alpha-\beta)M}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1 + k \exp [-(\alpha-\beta)Mt]} \right\} \quad (13)$$

$$\therefore \frac{N(t)}{M} = \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1 + k \exp [-(\alpha-\beta)Mt]} \right\} \quad (14)$$

ここで c , c' は積分常数、 k は $k=1/(c'\alpha)$ である。

$N(0)=N_0$ であるから

$$\begin{aligned} N_0/M &= \{(\alpha-\beta)/\alpha\} \{1/(1+k)\} = (1-\beta/\alpha)/(1+k) \\ \therefore k &= (1-\beta/\alpha)(M/N_0) - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

また(14)式で $t \rightarrow \infty$ とおくと

$$N(\infty)/M = (\alpha-\beta)/\alpha = 1-\beta/\alpha \quad (16)$$

これによれば $t \rightarrow \infty$ では、 $N(t)/M$ の値は $(1-\beta/\alpha)$ に収斂することがわかる。ただし $\beta < \alpha$ とする(注 1)。

$F(t)/M$, $G(t)/M$ は(3), (8)式に(13)式を代入すれば求められ

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{M} &= (\alpha-\beta)M \left\{ \frac{1}{1 + k \exp [-(\alpha-\beta)Mt]} \right\} \\ &\times \left[1 - \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1 + k \exp [-(\alpha-\beta)Mt]} \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{G(t)}{M} = \beta M \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1 + k \exp [-(\alpha-\beta)Mt]} \right\} \quad (18)$$

モデル B における $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ の値を(14), (17), (18)式より計算し、その結果の一例を図 3 に示す。ただし $\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $k=99$ として計算した。またこの場合の $N(\infty)/M$ の値を(16)式より求めると

$$N(\infty)/M = 1-\beta/\alpha = 1-0.3/1.0 = 0.7$$

すなわち、この場合には、 $N(t)/M$ の値は 0.7 に収斂する。

このモデルでは図 3 の例が示すように、 $F(t)/M$

Fig 3 $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$ in the case of Model B ($\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $k=99$)

Fig 4 $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$ in the case of Model C ($\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $N_0/M=0.01$)

は一旦最大値をとった後減少し、次第に $G(t)/M$ の値に近づいていく。そしてある時点から $F(t)/M$ と $G(t)/M$ が等しくなって $N(t)/M$ の値は安定し、1より小さい値 $(1-\beta/\alpha)$ に収束するようになる。ただし実際の場合には $F(t)/M$ と $G(t)/M$ の値が等しい状態が長期間維持されるとは限らない。その場合には $N(t)/M$ は一定値をとらず、 $(1-\beta/\alpha)$ を中心としてその上下に波状に変動するようになる。Modis²⁾ のいうカオスとはこのような状態を指すのであろう。また長時間経過後では総数 M 人のうち常時 $M \times \beta/\alpha$ 人がこの商品を所有していないことになる。ただしこれらの人は特定の人達ではなく、所有者と非所有者が始終入れ替わりながら、一定の比率 β/α を保っているわけである。($\beta/\alpha < 1$)。

なお基本モデルはモデル B で $\beta M=0$ ($\beta=0$) とおいた場合に相当する。

3.5 モデル C の場合

時刻 t と $t+\Delta t$ 間で非所有者がこの商品を購入する確率はモデル B と同様 $\alpha N(t)\Delta t$ であるが、モデル B と異なりモデル C では、非所有者 $\{M-N(t)\}$ 人のうち、この商品をすでに廃棄した人はこの商品をふたたび購入することはない。時刻 t までにこの商品を廃棄した人の数は $\int_0^t G(t)dt$ と与えられるから、非所有者のうちこの商品を購入する可能性のある人の数は $\{M-N(t)-\int_0^t G(t)dt\}$ となる。

時刻 t と $t+\Delta t$ 間でこの商品を購入する人の数 $F(t)\Delta t$ は、非所有者がこの商品を購入する確率 $\alpha N(t)\Delta t$ と購入の可能性のある非所有者の数との積に等しいから、次式が成立する。

$$F(t)\Delta t = \alpha N(t) \{M - N(t) - \int_0^t G(t)dt\} \Delta t$$

$$\therefore F(t) = \alpha N(t) \{M - N(t) - \int_0^t G(t)dt\} \quad (19)$$

(2)式に(19)式を代入すれば

$$dN(t)/dt = \alpha N(t) \{M - N(t) - \int_0^t G(t)dt\} - G(t) \quad (20)$$

一方、モデル B と同様、時刻 t と $t+\Delta t$ 間でこの商品を廃棄する人の数 $G(t)\Delta t$ は(8)式で与えられる。よって(8)式を(20)式に代入すれば

$$dN(t)/dt = \alpha N(t) \{M - N(t) - \beta M \int_0^t N(t)dt\} - \beta M N(t) \\ = N(t) \{(\alpha - \beta)M - \alpha N(t) - \alpha \beta M \int_0^t N(t)dt\} \quad (21)$$

微分方程式(21)を解けば $N(t)$ が数式として求められる。これと(19)および(8)式から $F(t)$ と $G(t)$ も求められるわけであるが、(21)式より $N(t)$ の一般式を導くのは容易ではない。よって数値計算により $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ の値を求めることにする。その結果の1例を図4に示した。ただし $\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $N_0/M=0.01$ として計算した。

モデル C では、図4の例が示すように、 $N(t)/M$ はS型ではなく、山型の曲線を書く。すなわち、 $N(t)/M$ は発売後しばらくは増加する曲線を書くが、最大値をとった後減少に転じ、図4の例では $t=25$ TU 付近で、ほぼゼロとなり、この商品はこの時点で消滅することがわかる。一方、 $F(t)/M$ は $N(t)/M$ の最大値よりも早い時点で最大値をとり、 $N(t)/M$ よりも早い時点でほぼゼロとなっている。また $G(t)/M$ は(8)式が示すとおり、 $N(t)/M$ を βM 倍（この場合では0.3倍）した曲線となる。

係数 α と β の値は $N(t)/M$ の形状に大きく影響する。図5は $\alpha M=1.0$ および 2.0 , $\beta M=0.3$ および 0.5 の場合について $N(t)/M$ の値を計算した結果を示す。ただし、いずれも $N_0/M=0.01$ とした。これによれば αM が1.0から2.0に増大することにより、 $N(t)/M$ が最大値をとる時期が早くなるとともに最

Fig 5 Influence of αM and βM on $N(t)/M$ in the case of Model C

大値も大きくなること、また βM が 0.5 から 0.3 に減少することにより、 $N(t)/M$ の最大値が大きくなることわかる。なお βM がさらに減少すると、 $N(t)/M$ 曲線は次第に基本モデルの $N(t)/M$ 曲線に近づき、 $\beta M=0$ ではこれに一致する。したがって $N(t)/M$ 曲線が山型を作るためには、 βM はある程度の大きさが必要である。

3.6 モデル D の場合

このモデルでは販売開始時刻 qTU までは購入された商品は廃棄されない。したがって $0 < t < q$ では $G(t)=0$ である。よってこの範囲では $N(t)$, $F(t)$ の値は基本モデルとまったく同じである。

販売開始後 qTU たってから廃棄が始まり、その後は一定の比率で廃棄されていくと仮定すると、時刻 qTU からはモデル C と同様となり、モデル C で導かれた数式を適用することができる。

したがって、 $q \leq t$ における $N(t)/M$ の値は(4)式で $t=q$ における $N(t)$ の値 $N(q)$ を求め、これを $N(t)$ の初期値として(2)式の解を計算した後、 t を $t+q$ と読み替えば求めることができる。図上では(2)式により得られた曲線を時間 q だけ右方へ移動すればよい。また $F(t)$, $G(t)$ はモデル C の場合と同様な方法で計算できる。このようにしてモデル D における $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ 曲線の値が求められる。

これらの式を用いてモデル D における $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ の値を計算し、その結果の一例を図 6 に示した。ただし $q=5TU$, $\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $N_0/M=0.01$ として計算した。

q および βM の値の影響を知るために、 $q=5, 9$,

Fig 6 $N(t)/M$, $F(t)/M$ and $G(t)/M$ in the case of Model D
($q=5$, $\alpha M=1.0$, $\beta M=0.3$, $N_0/M=0.01$)

Fig 7 Influence of q and βM on $N(t)/M$ in the case of Model D

($\alpha M=1.0$, $N_0/M=0.01$)

① $q=5$, $\beta M=0.3$ ② $q=5$, $\beta M=5$ ③ $q=9$, $\beta M=0.3$ ④ $q=9$, $\beta M=0.5$ ⑤ $q=13$, $\beta M=0.3$ ⑥ $q=13$, $\beta M=0.5$

$13TU$, および $\beta M=0.3, 0.5$ の場合について $N(t)/M$ の値を計算し、図 7 に示した。 q が大きくなるにしたがい、 $N(t)/M$ 曲線の頂部が基本モデルの $N(t)/M$ 曲線にそいながら上方そして右方に移動することがわかる。また βM の値の大きいほど衰退時の曲線の勾配は急になることがわかる。

3.7 モデル E の場合

3.7.1 $N(t)$, $F(t)$, $G(t)$ の関係

このモデルでは、すべての所有者が商品購入後この商品を一定期間 rTU だけ保有(使用)した後廃棄すると考える。したがって時刻 t において購入された商品は時刻 $t+r$ において必ず廃棄されることになる。よって時刻 t と $t+\Delta t$ 間でこの商品を購入した人の数 $F(t)\Delta t$ は、時刻 $t+r$ と $t+r+\Delta t$ 間でこの

Fig 8 Diagram showing the relation between $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ and r in the case of Model E

商品を廃棄した人の数 $G(t+r)\Delta t$ に等しいはずである。よって次の関係が成立する。

$$F(t) = G(t+r) \quad \text{または} \quad F(t-r) = G(t) \quad (22)$$

この関係を図8に示す。図からわかるように、 $G(t)$ は $F(t)$ を時間 r だけ右側に平行移動した曲線となる。

(1)式に(22)式を代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 + \int_0^t F(t) dt - \int_0^t F(t-r) dt \\ &= N_0 + \int_0^t F(t) dt - \int_{-r}^t F(t) dt \\ &= N_0 + \int_0^t F(t) dt - \left\{ \int_{-r}^0 F(t) dt + \int_0^t F(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$\int_{-r}^0 F(t) dt$ は時刻 $t=0$ において、すでにこの商品を購入所有している人の数を表すから N_0 に等しい。よって(23)式は次式のようにになる。

$$N(t) = \int_0^t F(t) dt - \int_{-r}^0 F(t) dt \quad (24)$$

$$\therefore N(t) = \int_{t-r}^t F(t) dt \quad (25)$$

(24)式によれば $N(t)$ は $\int_0^t F(t) dt$ と $\int_{-r}^0 F(t) dt$ の差に等しい。この関係を図9(a)に示す。また(25)式によれば $N(t)$ は $F(t)$ を時刻 $(t-r)$ から t まで積分した値に等しい。この関係を図9(b)に示す。これらの図からモデルEにおける $N(t)/M$ は、頂上部の比較的なだらかな曲線を画くと推定される。

なお時刻が r に達するまでは $G(t)=0$ であるか

Fig 9 Relation between $N(t)/M$ and $\int F(t)dt/M$ in the case of Model E

ら、 $0 < t < r$ では $N(t)/M$, $F(t)/M$ の値は基本モデルとまったく同じである。したがって、 r が十分に大きければ図8(b)に示すように、 $N(t)/M$ は時刻 r に達する前に値1をとり、値1を維持した状態で時刻 r に達し、その後減衰して最後に0となる左右対称の曲線を画くことになる。また r が比較的小さく、 $F(t)/M$ 曲線と $G(t)/M$ 曲線が重なる場合には、図8(a)が示すように $N(t)/M$ は1に達せず、両曲線が交差する時点で1より小さい極大値をとる山型の曲線となる。

3.7.2 連続関数で現した場合

このモデルで問題になるのは $t=0$ におけるこの商品の所有者 N_0 人に対する考え方である。すなわち(a) N_0 人の人が $t=0$ において商品を瞬間的に購入したと考えるか、あるいは(b)時刻 $t=0$ 以前に購入した人の数が N_0 人であったと考えるかである。本報では前者のように考える。したがって $t=r$ に達した瞬間 N_0 人が一斉に商品を廃棄することになる。

(i) $0 < t < r$

このモデルでは発売開始時刻 r までは廃棄する人はいない。したがって $0 < t < r$ では $G(t)=0$ である。よって基本モデルと全く同様になり、前述の(4), (5), (8)式が適用できる。

Fig 10 Relation between $N(u)$, $F(u)$ and $G(u)$ in the discrete case of Model E

Fig 11 $N(t)/M$ in the discrete case of Model E ($N_0/M=0.01$, $\alpha M=1.0$, $r=3, 5, 10$)

(ii) $r < t$

この領域では廃棄する人が現れる。このモデルでは、すでに商品を廃棄した人達は再度この商品を購入することはない。よってモデル D と同様、 $N(t)$ に関して前述の(20)式が成り立つ。したがって(20)式と(19), (22)式から、 $N(t)$, $F(t)$, $G(t)$ が求められる。

3.7.3 離散的関数で現した場合

前述のように、モデル E における $N(t)$, $F(t)$, $G(t)$ は(20)式と(19), (22)式から求められるはずであるが、これらの連立方程式を解くことは極めて困難である。しかし $N(t)$, $F(t)$, $G(t)$ を離散的関数で表すことにより、その値を近似的に求めることができる。

図10に示すように、新商品を所有する人の数は時刻 u から時刻 $u+1$ の間では一定値 $N(u)$ を保つとする。時刻が $u+1$ に達するとこの商品を新たに F

Fig 12 $F(t)/M$ and $G(t)/M$ in the case of Figure 11

(u) 人が購入し $G(u)$ 人が廃棄する。したがって時刻 $u+1$ から時刻 $u+2$ の間でこの商品を所有する人の数 $N(u+1)$ は次式で表される。ただし $u=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ とする。

$$N(u+1) = N(u) + F(u) - G(u) \quad (26)$$

また $N(u)$, $F(u)$, $G(u)$ の間には、次の関係が成り立つ。

$$F(u) = \alpha N(u) \left\{ M - N(u) - \sum_{i=0}^{u-1} G(i) \right\} \quad (27)$$

$$G(u) = F(u - r) \quad (28)$$

(26), (27), (28)式より $N(u)/M$, $F(u)/M$, $G(u)/M$ の値を計算することができる。その結果の一例を図11と12に示す。ただし $N_0/M=0.01$, $\alpha M=1.0$, $r=3, 5, 10$ とした。図11によれば r の増大にともない、 $N(t)/M$ が最大値をとる時期は遅くなり、最大値の値は大きくなることがわかる。また $r=10$ の場合には $N(t)/M$ の最大値は1に達し、しばらくその値を維持した後減少に転じることがわかる。なお、この時間間隔を短くしていけば、 $N(u)/M$ の値は(20)式の $N(t)/M$ の値に限りなく近づくはずである。

4. まとめ

- (1) 商品を一度廃棄した人が再びこの商品を買う

可能性がある場合とない場合では、 $N(t)/M$ 曲線の形状は大きく異なる。前者（モデル A, B がこのタイプ）の場合では、 $N(t)/M$ の値は長時間経過すれば一定値に収斂する。すなわちこのタイプでは $N(t)/M$ 曲線は山型にはならない。後者（モデル C, D, E がこのタイプ）の場合には $N(t)/M$ 曲線は山型となり、ある時間が経過すればゼロとなる。

(2) モデル A, B に属する商品では、普及率 $N(t)/M$ は最大値に達した後も需要が安定し、長期間その値を維持する。

モデル A は汚損などの理由で商品を廃棄した後、直ちに代わりの新品を購入するような場合に当てはまる。必需的消耗品がその例である。このモデルでは、 $N(t)/M$ は基本モデルと同じく (4) 式で表され、 $N(\infty)/M$ は 1 に収斂する (図 2)。

モデル B は一度商品を廃棄した後、しばらくして再びその商品が欲しくなるような商品に当てはまる。このモデルでは、 $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ は (14), (17), (18) 式で与えられる。 $F(t)/M$ は当初 $G(t)/M$ よりも大きい値をとるが、次第に $G(t)/M$ の値に近づいていく (図 3)。そしてある時点から両者は等しくなり、 $N(t)/M$ の値は安定し $(1-\beta/\alpha)$ に収斂するようになる ($\beta < \alpha$)。なお実際には $F(t)/M$ と $G(t)/M$ が等しくなる状況が長時間維持されるとは限らない。その場合は $N(t)/M$ は $(1-\beta/\alpha)$ を中心として、その上下に波状に変動するようになる。

(3) モデル C, D, E はライフサイクルが短く、 $N(t)/M$ が山型の曲線となる商品に当てはまる。いわゆる流行商品がその例である。

モデル C は販売開始直後から廃棄が始まるような商品に当てはまる。このモデルの $N(t)/M$ は (2) 式で与えられ、販売開始直後から基本モデルより小さい値をとり、全体になだらかな山型を形成する (図 4, 5)。その形状は係数 αM と βM の値によって決まってくる。 αM の大きいほど $N(t)/M$ が最大値をとる時期は早く、最大値は大きくなり、また βM が大きいほど $N(t)/M$ の最大値は小さくなる。

モデル D は流行期間が過ぎると途端にその価値を失うような商品に当てはまる。このモデルでは、 $N(t)/M$ は時刻が q に達するまでは基本モデルと同じ曲線を描くが、 q を過ぎると急激にその値を減少する (図 6)。 $q < t$ における $N(t)/M$ の値は (2) 式によって求めることができる。 q が大きくなると、 $N(t)/M$ 曲線の頂部は基本モデルの $N(t)/M$ 曲線にそって上方かつ右方に移動する (図 7)。

モデル E はその本来の寿命がくるまで使用されるような商品に当てはまる。このモデルの $N(t)/M$, $F(t)/M$, $G(t)/M$ は、 $0 < t < r$ においては基本モデルと同じであるが、 $r < t$ においては (20), (19), (22) 式の解として与えられる。この解を一般式として表すことは困難だが、これらの式によれば、 $G(t)/M$ 曲線は $F(t)/M$ 曲線を時間 r だけ右側に並行移動したものに一致する (図 8)。また $N(t)/M$ は頂部の比較的なだらかな台形状の曲線を描くこと、また r が大きくなるほど $N(t)/M$ 曲線の高さは高くなり、かつ横に広がるのが推定できる。また r が十分に大きく、 $F(t)/M$ と $G(t)/M$ 曲線が重ならない場合には、 $N(t)/M$ は最大値 1 に達した後、しばらくその値を維持すると推定される (図 8, 9)。これらの関係は離散的関数による計算結果でも明らかである (図 11, 12)。

5. 結 言

本報では購入された商品が逐次廃棄される場合について、その商品の普及率の変化を解析した。解析を容易にするため廃棄の過程について 5 種のモデルを設定し、それぞれの場合について、その商品の所有者数、単位時間当たりの購入者数、廃棄者数の間の関係を表す数式を導いた。そしてこれらの数式を解き、あるいは数値計算することにより、それぞれの場合における普及・衰退過程の特徴を知ることができた。

本研究では商品の所有者数、購入者数および廃棄者数などの変化を解析の対象としたが、これらはすべて人の数である。しかし実際に把握できるのは販売された商品の数量であり、人の数ではない。したがって、本研究の結果を実際に応用する場合には、人の数を商品の数量に転換することが課題となる。

本報のモデルと理論式は衣料以外の商品にも適用できる。

なお、本報の概要は平成 9 年度本学会年次大会で報告した。

(注)

(9) 式において $\alpha \leq \beta$ とすると、 $0 < \alpha$, $0 < N(t)$, $0 < M$ であるから $\alpha N(t) \{(\alpha - \beta)M - \alpha N(t)\} < 0$

$\therefore dN(t)/dt < 0 \quad (0 < t < \infty)$

すなわち $N(t)$ は発売当初より減少を続けることになる。したがって $N(t)$ の増加する過程は存在せず、本研究の対象にはならない。

なお $\alpha = \beta$ の場合には (9) 式は次のようになる。

$$dN(t)/dt = -\alpha \{N(t)\}^2$$

$$\therefore dN(t)/\{N(t)\}^2 = -\alpha dt$$

両辺を積分すれば

$$-1/N(t) = -\alpha t + c$$

$$t = 0 \text{ で } N(t) = N_0 \text{ よって } c = -1/N_0$$

(d)式を(c)式に代入して整理すれば

$$N(t) = 1/\{\alpha t + 1/N_0\}$$

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(e)式によれば, $N(t)$ は N_0 より始まって次第に減少し, $t \rightarrow \infty$ で 0 になる.

参考文献

- 1) 田畑昌顕; 織機誌, 49, T298 (1996)
- 2) T. Modis: "Predictions", Simon & Schuster, (1992)
モーディス著, 高橋秀明訳; "予測学入門", 産能大学出版部 (1994)