Motion of Flexible Fibers in a Newtonian Flow

Part 1: Discretization of Governing Equation, Outline of Computational Scheme and Numerical Solution in a Simple Shear Flow

TAKEMURA Masashi*, CHIBA Kunji** and NAKAMURA Kiyoji*

*Department of Mechanophysics Engineering, Graduate School of Engineering, Osaka University,
2-1 Yamada-Oka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

**Faculty of Education, Shiga University, 2-5-1 Hiratsu, Otsu, Shiga, 520-0862 Japan

Received 18 December 2000; accepted for publication 8 May 2001

Abstract

The objective of this study is to well understand the interaction between the motion of flexible fibers and flow kinematics around the fibers in a Newtonian flow. In this framework, the evolution of the configuration of a single fiber in a simple shear flow was numerically calculated by the Peskin 'immersed boundary method'. Though a fiber can actually be deformed in three-dimensional way, the fiber was assumed simply to form a planar curve, and its configurational evolution was simulated for several cases different in fiber elasticity, fluid viscosity and shear rate.

In Part 1 of a series of papers, the underlying equations to describe the motion of the fiber and fluid were presented with their discretized forms necessary for calculation. Furthermore, how the fiber elasticity can affect the evolution of fiber configuration and flow kinematics was illustrated by a few examples. The results revealed that the fiber bending stiffness plays a key role both for the motion of a flexible fiber and for the flow field.

Key Words: Flexible fiber; Configuration of fiber; Evolution of flow kinematics; Immersed boundary method; Simple shear flow.

ニュートン流体の流れ中におけるフレキシブル繊維の運動

(第1報) 基礎式の離散化と数値計算の手順および単純せん断流れ中における数値計算結果

竹村将志*, 千葉訓司**, 中村喜代次*

1. まえがき

流体中における繊維の運動は紡績や繊維強化複合材料の成形などの工程で見られる重要な現象である。これらの工程では、空気や高分子融液などの流れの中にある繊維の運動を知り、それをうまくコントロールすることが製品の品質や生産性を向上させる上で必要となる。

紡績工程に関連した繊維の運動に関しては千葉の研究解説[1]にもあるように1980年代までに既に多くの研究がなされ、実験と数値計算の両面から各種の流れ中における繊維の運動が明らかになっている。これに対し

て、繊維強化複合材料の場合、繊維の配向状態がその力学特性を大きく左右することが知られており、ニュートン流体の繊維懸濁液の複雑な流路内での流れならびに繊維の配向の研究[2-13]が1980年後半から始められている。この研究分野は比較的新しい分野であるが、繊維含有率が小さい場合でも繊維懸濁液の流れ状態はニュートン流体の場合と大きく異なることが明らかにされており、今では、繊維の配向状態と流れ場を連立して解く必要があることが認識されている。しかし、実用的にはさらに複雑な性質を有する高分子液体の繊維懸濁液の流れならびに繊維の配向[14-19]を明らかにする必要がある、

** 連絡先：滋賀大学教育学部 520-0862 大津市平津 2-5-1,

Fax: 077-537-7840

* 大阪大学大学院工学研究科機械物理工学専攻 565-0871 吹田市山田丘 2-1

これらの研究が最近徐々に行われるようになった。

上述した従来の研究では剛直な繊維を対象としており、繊維の形態の変化と流れの相互干渉を考慮した研究はほとんどない。すなわち、流れによって繊維が変形すると同時に、繊維の形態の変化によって周りの流れ場が変わることを考慮に入れた研究は極めて少ない。ニュートン流体の流れ中での剛直繊維の運動を計算する際によく用いられている Jeffery[20]の方程式は、繊維が運動しても周りの流れは変化しないことを仮定して導かれている。

繊維と流れ場の相互干渉を考慮した計算が行われていない原因の一つとして考えられるのがコンピュータの計算時間である。繊維の形態の変化と流れ場の変化の相互干渉を考慮して計算を行う場合、各時間ごとに流れ場を求めることが必要となる。そのため、ニュートン流体の場合でも、各時間で非線形の微分方程式である Navier-Stokes 方程式を解かなければならず、一般的に計算時間が長くなる。しかし、最近のコンピュータの発達ならびに数値計算法の開発によってこのような計算も比較的速く行えるようになった。

本研究の目的は、繊維と流れの相互干渉を考慮に入れた数値計算を行い、ニュートン流体の流れ中におけるフレキシブル繊維の運動とその周りの流れ場の変化を明らかにすることにある。ここで用いる方法は、心臓内での血液の流れを計算するために Peskin[21]により開発された immersed boundary method である。この方法は、細長い水中動物の運動[22]や懸濁粒子の運動[23, 24]の数値計算などに応用されている。また、この方法を懸濁液内でのフレキシブルな繊維の運動を取扱うために拡張することは比較的容易である[25]。ここでは、一連の研究の第一段階として、二次元単純せん断流れ場に一本の繊維を懸濁した場合について、繊維の運動とその周りの流れ場を数値計算し、繊維の弾性係数、曲げ剛性、粘度およびせん断速度の影響を調べる。ただし、繊維の変形はせん断流れの平面内でのみ考え、3次元変形は考えない。なお、第1報では基礎式、数値計算に必要な基礎式の離散化、計算手順について詳細に説明するとともに、代表的な計算結果を示すことにする。

2. 基礎式

まず、2.1 節で、繊維の分散媒である流体に関する基礎式を示し、次に、2.2 節で、繊維が流体に及ぼす力の計算法[22, 25]について示す。

2.1 流れ場の基礎式

非圧縮性のニュートン流体の流れ場を求める方程式は連続の式と Navier-Stokes 方程式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は流体の密度、 t は時間、 p は等方圧力、 μ は流体の粘度、 $\mathbf{F}$ は流体に働く単位体積当りの外力である。この外力は重力を無視し、次節で示す繊維の変形により生ずる力のみである。各時刻において繊維から受ける外力が分かると(1)、(2)式から次の時刻における流れ場が計算できる。

2.2 繊維が流体に及ぼす力および繊維の運動に関する基礎式

ここでは、(1)繊維の体積は無視できるぐらい十分小さい、(2)繊維の質量は無視する、(3)繊維の変形は伸び縮みと曲げ変形のみで、ねじり変形は生じない、(4)重力は無視する、(5)繊維はその十分近傍の流体と同じ速度で移動する、と仮定する。なお、詳細は Fauci ら[22]ならびに Stockie ら[25]を参照すること。

(a) 繊維が流体に及ぼす力

仮定より、流体に作用する外力 $\mathbf{F}$ は、繊維の形状の変化によって生じる力のみで、(3)式のように表せる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(s, t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds, \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{f}$ は繊維の変形により生ずる力の線密度、 Γ は繊維の形態を表す曲線、 $\mathbf{X}(s, t)$ は繊維の座標、 $\mathbf{x}$ は流れ場の座標、 s は Γ 上の位置を示すパラメータ、 δ は二次元のデルタ関数であり、3.2 節で示す(11.1)、(11.2)式を用いる。

また、力の線密度は(4)式のように繊維が変形することによって蓄えられたエネルギー E を $\mathbf{X}$ で微分することによって求められる。

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}}, \quad (4)$$

このときエネルギー E は、「伸び縮み、曲げを考え、ねじりは考えない」という仮定より(5)式で与えられる。また、単位体積当たりに蓄えられる伸び縮みによるエネルギー E_s と、曲げによるエネルギー E_b は、それぞれ(6.1)、(6.2)式で求める。

$$E(\mathbf{X}, t) = E_s(\mathbf{X}, t) + E_b(\mathbf{X}, t), \quad (5)$$

$$E_s(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \sigma_s \int_{\Gamma} \left\{ \left\| \frac{d\mathbf{X}}{ds} \right\| - 1 \right\}^2 ds, \quad (6.1)$$

$$E_b(X, t) = \frac{1}{2} \sigma_b \int_{\Gamma} \left\{ \frac{d^2 X}{ds^2} \cdot \mathbf{n} - c(s, t) \right\}^2 ds, \quad (6.2)$$

ここで、 σ_s は弾性係数、 σ_b は曲げ剛性、 $\|\cdot\|$ は絶対値を表し、 $\mathbf{n}$ は繊維に立てた単位法線ベクトルであり、 $c(s, t)$ は繊維の自然状態での曲率である。

(b) 繊維の運動と変形

繊維は流れによって移動、変形するが、「繊維はその十分近傍の流体と同じ速度で移動する」という仮定より、繊維上の各位置 $\mathbf{X}$ の速度は(7)式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x}, \quad (7)$$

ここで、 Ω は流れ領域を表す。

3. 数値計算法

3.1 流れ場の計算法

2.1 節に示した Navier-Stokes 方程式を、数値計算するために離散化を行う。離散化には、差分の計算手法のひとつである MAC 法 (Marker-and-Cell method) を用い、空間分割にはスタガード格子を用いた。スタガード格子は、Fig.1 に示すように、圧力と外力成分をセル中央に、流速成分をセル境界に配置したものである。このスタガード格子を用いることによって、数値振動を防ぐことが可能となる。

まず、Navier-Stokes の方程式から圧力 p に関する Poisson 方程式を導く。既知の流速 $\mathbf{u}^n$ と外力 $\mathbf{F}^n$ を用いて、次の時刻で連続の式を満たす条件の下で圧力に関する Poisson 方程式を解いて現時刻における圧力 p^n を求める。求めた圧力を用いて、次の時刻での流速成分 $\mathbf{u}^{n+1} = (u^{n+1}, v^{n+1})$ を計算する。なお、時間の差分スキームにはオイラーの陽解法を用いた。

3.2 流体に及ぼす力および繊維の移動の計算法

全長 L_f の繊維を N_f 個の区間に分割し、両端を含めた $N_f + 1$ 個の点の座標を $\mathbf{X}_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, N_f$) とし、また、 $\Delta s = L_f / N_f$ とする (Fig.2 参照)。

まず、伸び縮みのエネルギーを表す (6.1) 式について考える。(6.1) 式から

$$E_s(X, t) \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_s}{\Delta s} \sum_{l=0}^{N_f-1} \{ \|\mathbf{X}_{l+1} - \mathbf{X}_l\| - \Delta s \}^2. \quad (8)$$

(8) 式は、繊維の隣り合った分割点の間をばねのように考え、その一つ一つに蓄えられたエネルギーを繊維全体

Fig.1 Staggered mesh for the marker-and-cell method.

Fig.2 Relation between nodal points, $\mathbf{x}_{i,j}$, in the computational domain and segmentation points, $\mathbf{X}_l$, on a fiber. These points are denoted by open circle and plus symbol, respectively.

Fig.3 Link used to model a deformed elastic fiber.

で足し合わせたものが、繊維全体に蓄えられた伸び縮みによるエネルギーであることを表す。

つぎに、曲げによるエネルギーを表す (6.2) 式について考える。この式の被積分関数は、繊維の曲率であり、Fig.3 に示すように $d\theta_l$ を定義すると、(6.2) 式は

$$E_b(X, t) \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_b}{(\Delta s)^5} \sum_{l=1}^{N_f-1} \{ \|\mathbf{X}_{l+1} - \mathbf{X}_l\| \cdot \|\mathbf{X}_l - \mathbf{X}_{l-1}\| \sin d\theta_l - C(s, t) \}^2, \quad (9)$$

と離散化される (付録参照のこと)。ただし、 $C(s, t) = (\Delta s)^3 c(s, t)$ である。次に、繊維の分割点 $\mathbf{X}_l$ における力の線密度 f_l を求めるには、(4) 式に示したように全エネ

ルギを微分すればよい。この力の線密度を用いて、(3)式を離散化した次式により Fig.2 の格子点 $x_{i,j}$ にある流体要素に及ぼす力が計算できる。

$$F_{i,j}^n = \sum_{l=0}^{N_f} f_l^n \cdot \delta(x_{i,j} - X_l^n) \cdot \Delta s. \quad (10)$$

このときの二次元のデルタ関数は、Stockie ら[25]の方法に従い、

$$\delta(x_i, y_j) = d(x_i) \cdot d(y_j), \quad (11.1)$$

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{4h} \left(1 + \cos \frac{\pi r}{2h} \right), & |r| < 2h \\ 0, & |r| \geq 2h \end{cases}, \quad (11.2)$$

を用いる。ここで h は、流れ場を分割したときの格子幅で Fig.2 では Δx または Δy である。

次に、繊維の座標を更新する(7)式については、

$$X_l^{n+1} = X_l^n + \Delta t \cdot \sum_{i,j} u_{i,j}^{n+1} \cdot \delta(x_{i,j} - X_l^n) \cdot \Delta x \cdot \Delta y, \quad (12)$$

と離散化して、次の時刻での繊維の分割点の座標を計算する。

3.3 流速および圧力の境界条件

(a) 壁面境界条件

Fig.4 に示す領域で計算を行う。 Ω は流れ場を表し、 Γ は繊維の形状を表している。計算領域は長さ L_x 、幅 L_y でそれぞれ N_x, N_y 個に分割する。なお、流路壁面方向を x 方向、幅方向を y 方向とする。ここでは、単純せん断流れ中における繊維の運動を取り扱うので、壁面上の流速成分はそれぞれ、

$$u_t = -U, \quad u_b = U, \quad v_t = 0, \quad v_b = 0, \quad (13)$$

となる。ここで、 U は壁面が移動する速さ、 u_t と u_b ならびに v_t と v_b はそれぞれ流路の上下壁面上での x 方向

Fig.4 Computational domain, simple shear flow, and fiber configuration.

流速および y 方向流速である。また、圧力の壁面境界条件は Navier-Stokes の方程式から次のようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (14)$$

この式を上下壁面にそれぞれ適用して離散化したものを数値計算に用いる。

(b) 出入口境界条件

出入口では、流れは十分に発達し単純せん断流れになっていると仮定し、流速に対しては次のような条件を与える。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0. \quad (15)$$

一方、単純せん断流れにおいては、(14)式から、

$$\partial p / \partial y = 0, \quad (16)$$

すなわち、圧力は幅方向にある任意の値で一定になることから、数値計算では $p_{0,j} = 0, p_{N_x+1,j} = 0$ のように、境界の一つ外側のセルで 0 という条件を与えた。

3.4 数値計算手順

以上示した離散化した式を用いて計算を行う手順について述べる。

1. 繊維の分割点の座標 X_l^n より、(8), (9) 式を用いて、各分割点で伸び縮みのエネルギー E_s^n と曲げによるエネルギー E_b^n を求める。
2. 繊維に蓄えられているエネルギーより力の線密度 f_l^n を求める。この f_l^n から、(10) 式を用いて、流れ場に働く外力 $F_{i,j}^n$ を求める。
3. 既知の流速 $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n$ と、今求めた外力 $F_{i,j}^n$ から、圧力に関する Poisson の方程式を解いて $p_{i,j}^n$ を求める。
4. $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n, F_{i,j}^n, p_{i,j}^n$ を用いて、Navier-Stokes の方程式を数値計算して、次の時刻の流速 $u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}$ を求める。
5. $u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}$ より、(12) 式を用いて、次の時刻の繊維の座標 X_l^{n+1} を求める。
6. 以上の手順を繰り返し行う。

このように繊維の変形と流れ場の変化を交互に計算することによって、繊維と流れ場の相互干渉の様子を解析することができる。

4. 数値計算結果

ここでは、弾性係数、曲げ剛性、せん断速度ならびに流体の粘度を変化して行った数値計算のうち、代表的な計算例について示し、詳細は第2報で述べることにする。

計算条件は次の通りである。流れ場の長さ $L_x = 9.0\text{mm}$ 、流れ場の幅 $L_y = 3.0\text{mm}$ 、流れ場の分割数

Fig.5 Definition of the inclination angle of a fiber, ϕ .

Fig.7 Initial position and curvature of a fiber used in the computations for examining the effect of bending stiffness.

$N_x=90$, $N_y=30$, 繊維の自然長 $L_f=1.0\text{mm}$, 繊維の分割数 $N_f=20$, せん断速度 $G=10\text{s}^{-1}$, 流体の密度 $\rho=1.0\times10^{-6}\text{kg/mm}^3$, 粘度 $\mu=1.0\times10^{-4}\text{kg/mm}\cdot\text{s}$ ($0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$), 時間ステップ $\Delta t=5.0\times10^{-6}\text{s}$. また, 自然状態での繊維の曲率は 0 である.

4.1 繊維の伸長に及ぼす弾性係数の影響

弾性係数によって繊維がどの程度伸び縮みするのかを調べるため, 曲げ剛性が $\sigma_b=7.5\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$ と $\sigma_b=6.25\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$ の 2 種類について, 弾性係数を $\sigma_s=0.5, 1.0, 5.0, 10.0\text{kg/mm}\cdot\text{s}^2$ と変化させて計算を行った.

初め, 繊維は曲率 0 で, 流れに対して $\phi=-17\pi/18$ 傾けてあり, その重心は計算領域の中心である $x=4.5\text{mm}$, $y=1.5\text{mm}$ に位置する. 曲がっている繊維の角度 ϕ の定義を Fig.5 に示す. ϕ は反時計回りを正とする. ここで得られた計算結果より, 各時間の繊維の長さ L を求め, 繊維の自然長 L_f を用いて

$$\epsilon = \frac{L - L_f}{L_f}, \tag{17}$$

で定義される伸長ひずみ ϵ を計算し, ϵ の時間に対する変化を Fig.6(a), (b)に示す.

(a)

(b)

Fig.6 Effect of the elastic stiffness of a fiber σ_s on the evolution of the extensional strain ϵ for (a) $\sigma_b=7.5\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$; (b) $\sigma_b=6.25\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$; for $\mu=1.0\times10^{-4}\text{kg/mm}\cdot\text{s}$ and $G=10\text{s}^{-1}$.

どちらの曲げ剛性の場合も, 弾性係数が大きくなるにつれて, ϵ の値が小さくなっていき, $\sigma_s=5.0$ と $10.0\text{kg/mm}\cdot\text{s}^2$ の時には, 伸長ひずみは自然長の 2%以下になっている. また, 曲げ剛性が大きいときの方が伸長ひずみは大きくなることも分かる.

次節では, $\sigma_b=7.5\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$ で最大 5%程度, $\sigma_b=6.25\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{mm}^3/\text{s}^2$ で最大 10%前後伸び縮みする弾性係数 $\sigma_s=1.0\text{kg/mm}\cdot\text{s}^2$ で計算を行う.

Fig.8 Evolution of streamlines and fiber configuration for $\sigma_b = 7.5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$, $\sigma_s = 1.0 \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}^2$, $\mu = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}$ and $G = 10 \text{ s}^{-1}$. The initial position (x_0, y_0) of the endpoint of a fiber is $(2.0 \text{ mm}, 1.5 \text{ mm})$.

(11) $t = 2.2[s]$

(16) $t = 3.2[s]$

(12) $t = 2.4[s]$

(17) $t = 3.4[s]$

(13) $t = 2.6[s]$

(18) $t = 3.6[s]$

(14) $t = 2.8[s]$

(19) $t = 3.8[s]$

(15) $t = 3.0[s]$

(20) $t = 4.0[s]$

Fig.8 (continued)

Fig.9 Evolution of streamlines and fiber configuration for $\sigma_b = 5.0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$, $\sigma_s = 1.0 \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}^2$, $\mu = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}$ and $G = 10 \text{ s}^{-1}$. The initial position (x_0, y_0) of the endpoint of a fiber is $(4.5 \text{ mm}, 1.5 \text{ mm})$.

(1) $t = 0.1[s]$ (6) $t = 1.2[s]$ (2) $t = 0.3[s]$ (7) $t = 1.4[s]$ (3) $t = 0.5[s]$ (8) $t = 1.6[s]$ (4) $t = 0.7[s]$ (9) $t = 1.8[s]$ (5) $t = 1.0[s]$ (10) $t = 2.0[s]$

Fig.10 Evolution of streamlines and fiber configuration for $\sigma_b = 6.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$, $\sigma_s = 1.0 \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}^2$, $\mu = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}$ and $G = 10 \text{ s}^{-1}$. The initial position (x_0, y_0) of the endpoint of a fiber is $(4.5 \text{ mm}, 1.5 \text{ mm})$.

4.2 繊維の曲げ剛性の影響

曲げ剛性の値だけを $\sigma_b = 7.5 \times 10^{-5}$, 5.0×10^{-4} , 2.5×10^{-3} , 5.0×10^{-3} , $6.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$ と変化させて計算を行った。代表的な計算結果を Fig.8~10 に示す。これらの図には、各時刻での流線とそのときの繊維の形状が描かれており、繊維形状の変化と流れ場の変化の相互干渉の様子が明確になる。なお、計算を行った際の繊維の初期位置と初期形状は Fig.7 に示す通りであり、繊維の一端が $x = 4.5 \text{ mm}$, $y = 1.5 \text{ mm}$ に位置し、曲率は $5.0 \times 10^{-1} \text{ mm}^{-1}$ である。ただし、Fig.8 の場合には、初期位置は x 方向に -2.5 mm 移動した $x_0 = 2.0 \text{ mm}$, $y_0 = 1.5 \text{ mm}$ である。初め繊維を流路幅方向のどこに置かによってその後の繊維の変形状態ならびに流れ場が大きな影響を受ける。もし繊維の重心を流路の中心軸上に置くと、Fig.4 に示すような単純せん断流れであるため、繊維の形状は重心に関して点対称に近い状態になり一般的でない。ここでは、代表的な計算結果を示すことが目的であるので繊維の初期位置を流路中心軸から少し下の方へ移動した。

これらの図から、繊維の周辺には循環流れが発生し、その循環流れによって繊維が回転しながら下流へ移動する様子が分かる。また、Fig.10 に示す $\sigma_b = 6.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$ のように曲げ剛性が大きい繊維の場合には、ほとんどまっすぐな形態を維持しながら循環流れの中で回転している。これに対し、曲げ剛性が小さくなると Fig.8 から分かるように、計算に用いた繊維の自然状態での形状が直線であるため、繊維は流れに曝されてしばらくは先端がいったん曲げられるが、すぐにまっすぐな形状に戻る ($t \leq 0.7 \text{ s}$)。しかし、さらに時間が経過すると今度は、繊維は常に曲がった形状を保ったままで回転するようになる。特に曲げ剛性の小さいフレキシブルな繊維には定常な形状や運動状態は存在しないが、恐らく、 $t \geq 1.6 \text{ s}$ 以降の運動状態がこの繊維にとって定常状態に近いものであると考えられる。なお、繊維が円弧状に変形した場合には、まっすぐな繊維に比べて角速度が小さくなることも Fig.8 と Fig.10 の比較から分かる。これら二つの曲げ剛性の中間の値を有する繊維の場合には、Fig.9 に示すように、いったん先端付近が曲げられて円弧状の形態になるが、次の瞬間にはすぐにまっすぐな形状に戻るという動作を繰り返す。

以上のように、繊維の有する曲げ剛性が形態の変化に大きな影響を及ぼすため流れ場も大きく変化する。当然であるが、繊維が円弧状に変形して回転する場合 (Fig.8) には、直線状の形態を保って回転する場合 (Fig.10) に比べて、繊維の存在によって影響を受ける流れ場の領域は狭くなる。ここで示した計算条件の範囲内では、長さ 1 mm の繊維を幅 3 mm の流路の中心線の近くに置いた場合には繊維と流路壁面との相互干渉は全く見られない。

Fig.11 Effect of the bending stiffness of a fiber σ_b on the evolution of the mean curvature C_m for $\sigma_s = 1.0 \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}^2$, $\mu = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kg}/\text{mm} \cdot \text{s}$ and $G = 10 \text{ s}^{-1}$. The initial position (x_0, y_0) of the endpoint of a fiber is $(4.5 \text{ mm}, 1.5 \text{ mm})$.

これも Fig.8~10 で流路の中央部分を除き流線が壁面に平行になっていることから明らかである。

繊維の曲率と曲げ剛性の関係を定量的に調べるために、曲率の平均 C_m を繊維の各分割点上における曲率 $C_l (l=1, 2, \dots, N_f-1)$ を用いて、(18)式のように定義し、その結果を Fig.11 に示す。

$$C_m = \frac{1}{N_f - 1} \sum_{l=1}^{N_f-1} C_l. \quad (18)$$

Fig.11 を見ても、曲げ剛性の値が小さくなるほど、繊維はよく曲がっていることが分かる。また、この計算時間の範囲内では 1 点鎖線および 2 点鎖線で示す $\sigma_b = 2.5 \times 10^{-3}$ と $5.0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{mm}^3/\text{s}^2$ の場合には繊維の曲率の変化に周期性が見られる。

5. 結 論

本研究の目的は、Peskin により開発された immersed boundary method を用いて数値計算を行い、ニュートン流体の流れ中におけるフレキシブル繊維の運動とその周りの流れ場の変化を明らかにすることにある。immersed boundary method とは、伸長、曲げ、ねじりなどの変形を行う細長い粒子が流体内に存在する場合、形態を変えるのに必要な力 (力の線密度) が粒子の長さ方向に沿って分布するが、粒子の大きさ、質量が無視できると仮定すると、その力がそのまま周りの流体要素に外力となって作用し、それによって流れ場が変わるという原理に基づく方法である。また、粒子の大きさ、質量が無視でき

るので力が作用している粒子上の各点は、その点の流速で移動する。このようにして、粒子の変形と流れ場の変化が互いに影響を及ぼし合うことになる。

本報告は、一連の研究の第1報であり、繊維の変形に要する力、その力に基づいて流体に働く外力ならびに繊維の運動を表す基礎式[22, 25]を示すとともに、これら基礎式の数値計算に必要な離散化と流れ場に関する基礎式の離散化について詳細に述べた。さらに、第一段階として、二次元単純せん断流れ場に自然状態での曲率が0である繊維を一本懸濁した場合について、繊維の運動とその周りの流れ場を数値計算し、代表的な結果として繊維の弾性係数が繊維の伸長ひずみに及ぼす影響と曲げ剛性が繊維の変形および流れ場に及ぼす影響を示した。ただし、繊維の変形はせん断流れの平面内における伸長と曲げのみ考えた。なお、せん断速度ならびに流体の粘度の影響については掲載頁数の制限から第2報で報告する。得られた結果をまとめると以下になる。

(1) 繊維の弾性係数が大きくなるにつれて伸長ひずみは小さくなる。

(2) 繊維の周辺には循環流れが発生し、その循環流れによって繊維が回転しながら下流へ移動する。

(3) 曲げ剛性が大きい繊維の場合には、ほとんどまっすぐな形態を維持しながら循環流れの中で回転する。これに対し、曲げ剛性が小さくなると、繊維は流れに曝されてしばらくは先端がいったん曲げられるが、すぐにまっすぐな形状に戻る。しかし、さらに時間が経過すると今度は、繊維は常に曲がった形状を保ったままで回転するようになる。また、中程度の曲げ剛性を有する繊維の場合には、いったん先端付近が曲げられて円弧状の形態になるが、次の瞬間にはすぐにまっすぐな形状に戻るという動作を繰り返す。

(4) 繊維が円弧状に変形して回転する場合には、直線状の形態を保って回転する場合に比べて、繊維の存在によって影響を受ける流れ場の領域は狭くなる。ここで示した計算条件の範囲内では、長さ1mmの繊維を幅3mmの流路の中心線の近くに置いた場合には繊維と流路壁面との相互干渉は全く見られない。

ここでは、2次元流れ中で流れ平面内で変形する繊維について考えた。従って、極めて制約の多い条件である。本研究は、厚さの薄い繊維懸濁液の流れの基礎的研究として位置付けられる。例えば、製紙工程におけるパルプ繊維の変形と流動の基礎的な現象を明らかにする研究。しかし、ここで用いた手法は3次元流れ中において3次元変形する繊維の運動にも容易に拡張できるものである。ただし、数値計算の負荷は急激に増大する。また、実際の工程で見られる多数の繊維の相互干渉を含む繊維の変形挙動の計算も可能である。

[付 録]

(6.2)式の被積分関数は、繊維の曲率であり、Fig.3に示すように $d\theta_l$ を定義すると、

$$\frac{d^2 X}{ds^2} \cdot n \approx \frac{d\theta_l}{ds},$$

である。一方、

$$C = \|X_{l+1} - X_l\| \cdot \|X_l - X_{l-1}\| \sin d\theta_l \quad \text{とおき、}$$

繊維の伸びならびに $d\theta_l$ が小さい場合を考えると、

$$\|X_{l+1} - X_l\| \approx \|X_l - X_{l-1}\| \approx \Delta s, \quad \sin d\theta_l \approx d\theta_l$$

であるので、

$$C = (\Delta s)^3 \frac{d\theta_l}{ds},$$

となる。従って、

$$\frac{d^2 X}{ds^2} \cdot n \approx \frac{1}{(\Delta s)^3} \|X_{l+1} - X_l\| \|X_l - X_{l-1}\| \sin d\theta_l$$

(6.2)式は(9)式のように離散化される。

References

- [1] Chiba, K.; J. Text. Mach. Soc. Japan, **43**, P248 (1990)
- [2] Rosenberg, J., Denn, M.M., Keunings, R.; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **37**, 317 (1990).
- [3] Phan-Thien, N., Graham, A.L.; Rheol. Acta, **29**, 433 (1990).
- [4] Phan-Thien, N., Graham, A.L.; Rheol. Acta, **30**, 44 (1991).
- [5] Ranganathan, S., Advani, S.G.; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **47**, 107 (1993).
- [6] Altan, M.C., Rao, B.N.; J. Rheol., **39**, 581 (1995).
- [7] Ahmed, A., Alexandrou, A.N.; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **55**, 115 (1994).
- [8] Chung, S.T., Kwon, T.H.; Polym. Eng. Sci., **35**, 604 (1995).
- [9] Lipscomb, G.G., Denn, M.M., Hur, D.H., Boger, D.V.; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **26**, 297 (1988).
- [10] Chiba, K., Nakamura, K., Boger, D.V.; J. Non-Newtonian Fluid Mech., **35**, 1 (1990).
- [11] Baloch, A., Webster, M.F.; Comput. Fluids, **24**, 135 (1995).
- [12] Altan, M.C., Advani, S.G., Guceri, S.I., Pipes, R.G.; J. Rheol., **33**, 1129 (1989).
- [13] Chono, S., Makino, M.; Trans-B. Mach. Soc. Japan, **61**, 3190 (1995).
- [14] Ausias, G., Agassant, J.F., Vincent, M., Lafleur, P.G., Lavoie, P.A., Carreau, P.J.; J. Rheol., **36**, 525 (1992).
- [15] Ausias, G., Agassant, J.F., Vincent, M.; Intern. Polym. Proc., **9**, 51 (1994).

- [16] Ausias, G., Vincent, M., Jarrin, J., Thermp, J.; *Compos. Mater.*, **8**, 435 (1995).
- [17] Ghosh, T., Grmela, M., Carreau, P.J.; *Polym. Compos.*, **16**, 144 (1995).
- [18] Grmela, M., Lafleur, P.G.; *J. Chem. Phys.*, **109**, 6956 (1998).
- [19] Grmela, M., Ait-Kadi, A., Lafleur, P.G.; *J. Chem. Phys.*, **109**, 6973 (1998).
- [20] Jeffery, G.B.; *Proc. R. Soc.*, **A102**, 161 (1922).
- [21] Peskin, C.S.; *J. Comput. Phys.*, **25**, 220 (1977).
- [22] Fauci, L.J., Peskin, C.S.; *J. Comput. Phys.*, **77**, 85 (1988).
- [23] Fogelson, A.L., Peskin, C.S.; *J. Comput. Phys.*, **79**, 50 (1988).
- [24] Sulsky, D., Brackbill, J.U.; *J. Comput. Phys.*, **96**, 339 (1991).
- [25] Stockie, J.M., Green, S.I.; *J. Comput. Phys.*, **147**, 147 (1998).