異形コイルばねのばね特性と応力*

柏屋 俊光**, 渡辺 浩太郎**, 久納 孝彦***

Spring Characteristic and Stress of Irregular Shaped Coil Spring

Toshimitsu KASHIWAYA, Kotaro WATANABE and Takahiko KUNOH

There are many kinds of irregular shaped coil spring like an elliptically coiled, a rectangularly coiled and a squarely coiled spring. Especially an elliptically coiled spring is used in limited space like a gun magazine or precision instruments. Recently, elliptic coil springs are used in the coin shooter of vending machines thanks to their flexibility. Though the irregular shaped coil spring has numerous uses, its design formulae on the spring constant and the maximum stress of the wire have not been derived yet. In this study, general formulae for the spring constant and the principal stress for the springs with relatively small pitch angle are derived theoretically. Moreover, experimental study and FEA (Finite Element Analysis) are conducted. The theoretical results are compared with experiment and FEA. Then the stress correction factor for an elliptically coiled spring is derived by comparing theoretical value with FEA. The theoretical results multiplied by the correction factor are compared with FEA.

Key Words: Elliptically coiled spring, Rectangularly coiled spring, Squarely coiled spring, Spring constant, Principal stress, Stress correction factor

1. 緒 言

1.1 はじめに

近年、部品点数の減少による軽量化や低価格化のため、異形コイルばねへの期待が高まっている。

楕円、長方形及び正方形コイルばね (Fig.1, Fig.2) は、コイルの形状が非円形な異形コイルばねの一種であり¹⁾、使用されるスペースに制約がある場合や相手部品の回り止めにも有効である。また、座巻部分の寸法が大きい場合には、座巻研磨を施行せずともばねのすわりが良い²⁾ という特徴がある。

特に楕円コイルばねは、従来、主として銃の弾倉用に使われてきた。しかし、近年、可撓性のガイドとして自動販売機のコインシュートに使われるなど、新たな用途が広がっている。

しかし、楕円や長方形など異形コイルばねに関する研究

はなされておらず、そのばね定数及び応力の計算式は、未だ確立されていない。

1.2 異形コイルばね解析上の問題点と対処

楕円、長方形及び正方形コイルばねのばね定数及び応力計算式を導くにあたり、以下の項目が問題となる。

- (1) 楕円、長方形及び正方形コイルばねの仕様は一般化されていないので、ばね定数を理論的に導出するに先立ち、これら異形コイルばねのコイル形状を定義する必要がある。Fig.3はコイルの4分の1巻を示す。この図のように直線と円弧から成るコイル形状のものを長方形コイルばね、 $l_2=0$ のものを楕円コイルばね、 $l_1=l_2$ のものを正方形コイルばねと本論文で定義する。
- (2) 理論式を導出する際に、ピッチ角の影響を考慮すると、理論解析が複雑化するので、コイル素線のピッチ角は無視する。

原稿受付日 2001年12月5日

* ばね技術研究会 2000年度秋季講演会にて発表

** 慶應義塾大学 大学院 (Graduate school of Science and Technology, Keio University)

***慶應義塾大学 (Faculty of Science and Technology, Keio University)

Fig.1 Elliptically coiled spring

Fig.2 Squarely coiled spring

- (3) ピッチ角の小さい円筒コイルばねでは、軸荷重により素線が主としてねじりを受けることから、その強さが最大せん断応力で評価^{3, 4)}されてきた。しかし、楕円、長方形及び正方形コイルばねの場合、素線は一般にねじりと曲げを同時に受けるので、最大せん断応力よりも最大主応力で評価すべきであると考え、最大主応力計算式を導く。
- (4) 楕円、長方形及び正方形コイルばねでは、素線が受けるねじりモーメントと曲げモーメントが素線に沿って変化するので、最大主応力の大きさとともにその発生位置も明らかにする。

1.3 本研究の目的

本研究では、まず始めに、コイル横断面が楕円、長方形及び正方形であるコイルばねについて、ピッチ角を無視した時のばね定数及び応力の基本式⁵⁾を導く。

また楕円コイルばねについては、理論式とFEA (Finite Element Analysis: 有限要素解析) 結果⁶⁾の比較から、最大主応力についての修正係数を導く。

2. 異形コイルばねのばね定数計算式

2.1 長方形コイルばね各部のモーメント

Fig.3のように、長方形コイルばねの4分の1巻について考え、それを区間0-1、1-2、2-3に分けた解析モデルを考

Fig.3 Expanded view for analysis

える。この長方形の解析モデルにおいて、 $l_2=0$ とすると、楕円コイルばねの解析モデルとなり、 $l_1=l_2$ とすると、正方形コイルばねの解析モデルとなる。よって、以下には、長方形コイルばねの解析モデルを事例として、ばね定数を導く。

最初に、コイル軸荷重 P により各区間の素線に作用する合モーメント M 、ねじりモーメント M_t 及び曲げモーメント M_b を定式化する。

2.1.1 直線部 (区間0-1) に作用するモーメント

合モーメント M_{0-1} は、

$$M_{0-1} = P r_{0-1} = \frac{P}{\cos \theta} \left(r_0 + \frac{l_2}{2} \right) \quad (1)$$

ねじりモーメント M_{t0-1} は

$$M_{t0-1} = M_{0-1} \cos \theta = P \left(r_0 + \frac{l_2}{2} \right) \quad (2)$$

曲げモーメント M_{b0-1} は

$$M_{b0-1} = M_{0-1} \sin \theta = P \left(r_0 + \frac{l_2}{2} \right) \tan \theta \quad (3)$$

2.1.2 円弧部 (区間1-2) に作用するモーメント

合モーメント M_{1-2} は

$$M_{1-2} = P r_{1-2} \quad (4)$$

ただし

$$r_{1-2} = \sqrt{r_0^2 + \frac{1}{4} (l_1^2 + l_2^2) + r_0 (l_1 \sin \varphi + l_2 \cos \varphi)} \quad (5)$$

である。

ねじりモーメント M_{t1-2} は

$$M_{t1-2} = M_{1-2} \cos (\theta - \varphi) \quad (6)$$

曲げモーメント M_{b1-2} は

$$M_{b1-2} = M_{1-2} \sin (\theta - \varphi) \quad (7)$$

ここで、 θ と φ の関係は、

$$r_{1-2}\sin\theta = r_0\sin\varphi + \frac{l_1}{2} \quad (8)$$

$$r_{1-2}\cos\theta = r_0\cos\varphi + \frac{l_2}{2} \quad (9)$$

であるから、ねじりモーメント M_{t1-2} 、曲げモーメント M_{b1-2} はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$M_{t1-2} = \frac{P}{2}(l_1\sin\varphi + l_2\cos\varphi) + Pr_0 \quad (10)$$

$$M_{b1-2} = \frac{P}{2}(l_1\cos\varphi - l_2\sin\varphi) \quad (11)$$

2.1.3 直線部 (区間2-3) に作用するモーメント

合モーメント M_{2-3} は

$$M_{2-3} = Pr_{2-3} = \frac{P}{\sin\theta} \left(\frac{l_1}{2} + r_0 \right) \quad (12)$$

ねじりモーメント M_{t2-3} は

$$M_{t2-3} = Pr_{2-3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = P\left(\frac{l_1}{2} + r_0\right) \quad (13)$$

曲げモーメント M_{b2-3} は

$$M_{b2-3} = Pr_{2-3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{P}{\tan\theta} \left(\frac{l_1}{2} + r_0 \right) \quad (14)$$

2.2 長方形コイルばねのたわみ

荷重 P によるコイル素線のひずみエネルギーは

$$U = U_{0-1} + U_{1-2} + U_{2-3} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2GI_P} \int_0^{\frac{l_1}{2}} M_{t0-1}^2 ds + \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{l_2}{2}} M_{b0-1}^2 ds + \frac{1}{2GI_P} \int_0^{\frac{\pi r_0}{2}} M_{t1-2}^2 ds \\ &+ \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{\pi r_0}{2}} M_{b1-2}^2 ds + \frac{1}{2GI_P} \int_0^{\frac{l_2}{2}} M_{t2-3}^2 ds + \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{l_1}{2}} M_{b2-3}^2 ds \\ &= \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right) \cdot \frac{l_1 P^2}{4GI_P} + \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right)^3 \frac{\tan^3\theta_1 \cdot P^2}{6EI} \\ &+ \left\{ \frac{\pi}{16}(l_1^2 + l_2^2) + \frac{l_1 l_2}{4} + r_0(l_1 + l_2) + \frac{\pi r_0^2}{2} \right\} \cdot \frac{r_0 P^2}{2GI_P} \\ &+ \left\{ \frac{\pi}{16}(l_1^2 + l_2^2) - \frac{l_1 l_2}{4} \right\} \cdot \frac{r_0 P^2}{2EI} + \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^2 \cdot \frac{l_2 P^2}{4GI_P} \\ &+ \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^3 \cdot \frac{P^2}{6EI \tan^3\theta_2} \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、 θ_1 は $\angle 1A0$ 、 θ_2 は $\angle 2A0$

したがって、点0に対する点3のたわみ δ_{0-3} は

$$\begin{aligned} \delta_{0-3} &= \frac{\partial U}{\partial P} = \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right) \cdot \frac{l_1 P}{2GI_P} + \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right)^3 \frac{\tan^3\theta_1 \cdot P}{3EI} \\ &+ \left\{ \frac{\pi}{16}(l_1^2 + l_2^2) + \frac{l_1 l_2}{4} + r_0(l_1 + l_2) + \frac{\pi r_0^2}{2} \right\} \cdot \frac{r_0 P}{GI_P} \\ &+ \left\{ \frac{\pi}{16}(l_1^2 + l_2^2) - \frac{l_1 l_2}{4} \right\} \cdot \frac{r_0 P}{EI} + \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^2 \cdot \frac{l_2 P}{2GI_P} \\ &+ \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^3 \cdot \frac{P}{3EI \tan^3\theta_2} \quad (17) \end{aligned}$$

2.3 各種異形コイルばねのばね定数

長方形コイルばねの場合

長方形コイルばね一巻についてのたわみ δ は

$$\delta = 4\delta_{0-3} \quad (18)$$

よって、有効巻数 n の長方形コイルばねのばね定数 k は、

楕円コイルばねの場合

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{n\delta}{P} = \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right)^2 \cdot \frac{2nl_1}{GI_P} + \left(r_0 + \frac{l_2}{2}\right)^3 \frac{4n \tan^3\theta_1}{3EI} \\ &+ \frac{nr_0}{GI_P} \left\{ \frac{\pi}{4}(l_1^2 + l_2^2) + l_1 \cdot l_2 + 4r_0(l_1 + l_2) + 2\pi r_0^2 \right\} \\ &+ \frac{nr_0}{EI} \left\{ \frac{\pi}{4}(l_1^2 + l_2^2) - l_1 \cdot l_2 \right\} + \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^2 \frac{2nl_2}{GI_P} \\ &+ \left(\frac{l_1}{2} + r_0\right)^3 \frac{4n}{3EI \tan^3\theta_2} \quad (19) \end{aligned}$$

楕円コイルばねの場合

$l_2 = 0$, $\tan\theta_2 = \infty$ であるから

$$\frac{1}{k} = n \left\{ \frac{2r_0^2 l_1}{GI_P} + \frac{4r_0^3}{3EI} \tan^3\theta_1 + \frac{r_0 l_1^2 \pi}{4EI} + \frac{r_0}{GI_P} \left(2\pi r_0^2 + \frac{\pi l_1^2}{4} + 4l_1 r_0 \right) \right\} \quad (20)$$

正方形コイルばねの場合

$$l_1 = l_2, \tan\theta_1 = \frac{l_1}{2} / \left(r_0 + \frac{l_1}{2} \right), \tan\theta_2 = \left(r_0 + \frac{l_1}{2} \right) / \frac{l_1}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{4nl_1}{GI_P} \left(\frac{l_1}{2} + r_0 \right)^2 + \frac{nr_0}{GI_P} \left(\frac{\pi l_1^2}{2} + l_1^2 + 8r_0 l_1 + 2\pi r_0^2 \right) \\ &+ \frac{nr_0 l_1^2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{nl_1^2}{3EI} \quad (21) \end{aligned}$$

3. ばね定数に関する実験とFEA

3.1 供試ばねとばね定数に関する実験方法

楕円コイルばね3種類 (No.1~No.3)、正方形コイルばね1種類 (No.4) について実験を行った。楕円コイルばねNo.2~No.3、正方形コイルばねNo.4をばね試験機 (豊光エンジニアリングFSP-500BD型、容量4900N/490N) で無荷重状態から圧縮し、荷重とたわみを測定した。なお、楕円コイルばねNo.1は座巻が無いので、両端にフックを起こして引張試験を行った。Table 1にばね仕様を示す。ただし、Table 1中のばね指数はFig.4より $2r_0/d$ であり、ピッチ角は $\tan^{-1}(p/2l_1)$

Table 1 Specification of test springs

	No.1	No.2	No.3	No.4
d (mm)	1.70	0.64	0.64	1.00
i_1 (mm)	29.9	6.52	4.31	8.79
i_2 (mm)	0	0	0	8.79
r_o (mm)	3.65	1.82	1.90	1.94
θ_1 (deg)	76.3	60.8	48.6	34.9
(rad)	1.33	1.06	0.85	0.61
θ_2 (deg)	—	—	—	55.0
(rad)	—	—	—	0.96
Active coils	18.0	5.50	4.50	5.5
Spring index	4.29	5.69	5.94	3.88
Pitch angle(deg)	7.90	10.6	16.4	2.60

Fig.4 Elliptically coiled spring

である。

3.2 有限要素モデルと解析法

楕円コイルばねNo.1～No.3のFEAには、汎用構造解析プログラムMARC-2000を用い、要素は8節点アイソパラメトリック任意形状6面体要素を使用した。Fig.5に示すように、コイル一巻のモデルを作成し、コイル軸上に節点を設け、この節点と素線上の要素とを剛体リンクでつないだ。境界条件としてその片方の節点を全拘束し（並進、回転）、もう一方の節点はコイル軸方向の並進とコイル軸まわりの回転のみ自由とした。両節点を介して、楕円コイルばねNo.1にはコイル軸方向に静引張荷重を、楕円コイルばねNo.2、No.3

Fig.5 No.1 coil element model for FEA

Fig.6 No.4 compression spring model for FEA

Fig.7 Comparison of Load-Deflection diagram (No.1)

には静圧縮荷重を負荷した。

正方形コイルばねNo.4のFEAには、Fig.6に示すように、同じ構造解析プログラムと要素を使用した。境界条件として、コイルの座面と接触する二つの剛体面を定義し、一方の剛体面を全拘束し、他方の剛体面にコイル軸方向の荷

Fig.8 Comparison of Load-Deflection diagram (No.4)

Table 2 Spring constant

	No.1	No.2	No.3	No.4
Theory (N/mm)	0.347	0.758	1.47	0.60
Experiment (N/mm)	0.362	0.819	1.63	0.65
FEA (N/mm)	0.374	0.769	1.43	0.59

重を与え、コイルを平行圧縮した。

3.3 ばね定数に関する解析結果と考察

楕円コイルばねNo.1及び正方形コイルばねNo.4の荷重たわみ線図をFig.7, Fig.8に示す。

次に、荷重～たわみデータの部分勾配を求めて平均したものゝばね定数とし、理論値及びFEA値と共にTable 2に示す。

ばね定数について、実験値と理論値を比較すると不完全性の影響を考慮していないので、理論値は実験値より大きくなると考えられるが、楕円コイルばねでは、両者の大小関係が逆になっており、これらを比較すると、全体的にはばね定数について実験値が理論値よりも大きくなった。その原因の一つに、供試ばねの有効巻数の数え方が挙げられる。座巻が上下3/4巻ずつあると考え、全体の巻数から1.50巻を差し引いた巻数を有効巻数とした。しかし、どの部分から座巻として数えるかは全くの目測であり、測る人によっては0.50巻程度のズレが生じる。この差が実験値と理論値の差となったと考えられる。またピッチ角とばね定数の関係をFig.9に示す。Fig.9からばね定数に及ぼすピッチ角の影響は楕円コイルばねのばね定数に関してほとんどないと言える。

4. 異形コイルばねの応力基本式とその修正

4.1 異形コイルばねの応力基本式

長方形コイルばねの応力基本式を導出する。まず、素線に沿ったねじりモーメント M_t 及び曲げモーメント M_b から、その断面上のねじり応力 τ_0 と曲げ応力 σ_b を求める。そして、最大主応力及び最大せん断応力を決定する。

素線表面のねじり応力 τ_0 と曲げ応力 σ_b は

Fig.9 Influence of the pitch angle on a spring constant

$$\tau_0 = \frac{M_t}{Z_P} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad (22)$$

$$\sigma_b = \frac{32M_b}{\pi d^3} \quad (23)$$

で与えられる。 M_t 及び M_b は、区間に応じて式(1)～(14)を使い分ける。

次に、これらの応力成分から最大主応力 σ_1 及び最大せん断応力 τ_{max} は

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau_0^2} \quad (24)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau_0^2} \quad (25)$$

である。

以上、楕円、長方形及び正方形に共通な応力基本式を導出したが、その中で楕円コイルばねが特に需要が多いので、以下、楕円コイルばねについてのみ解析する。

4.2 応力解析結果とFEA結果の比較

楕円コイルばねNo.1に関して、 $P=1.00$ (N)を加えた時の素線の軸に沿ったモーメント分布をFig.10に示す。

次に式(22)～(25)から得た楕円コイルばねNo.1の最大主応力と最大せん断応力の理論値及びFEA結果をFig.11に示す。ここで、コイル素線横断面上の位置を表す角度 Ψ を導入する (Fig.12)。Fig.11のFEA結果は、 $\Psi=90.0$ (deg)の位置の最大主応力と最大せん断応力の値を用いた。Fig.11から、区間0-1($\theta=0\sim76.3$ (deg))においては最大主応力と最大せん断応力の理論値とFEA結果はよく一致することがわかる。これは、区間0-1において、素線が点1を固定端とするはりの理論と同じであることから明らかである。

また、区間1-2($\theta=76.3\sim90.0$ (deg))についても、理論値とFEA結果はよく一致している。しかし、区間1-2は円弧部であるので、曲りはりの効果によりコイルの外側よりも内側の方がねじり応力が大きくなる。したがって、ばね指数が小さくなるほど、素線の外側と内側の応力の差は大

Fig.10 Moment distribution (No.1)

Fig.11 Maximum principal stress and Maximum shear stress distribution (No.1)

Fig.12 Introduction of an angle φ

Fig.13 The maximum principal stress distribution on the wire surface of Spring No.1

Table 3 Specification of FEA spring models

	d (mm)	r_o (mm)	c	l_i (mm)	θ_1 (deg)	α (deg)
FEA-3-50	1.00	1.50	3.00	3.93	50.0	8.00
FEA-3-60	1.00	1.50	3.00	5.19	60.0	8.00
FEA-3-70	1.00	1.50	3.00	8.24	70.0	8.00
FEA-4-40	1.00	2.00	4.00	3.93	40.0	8.00
FEA-4-50	1.00	2.00	4.00	4.77	50.0	8.00
FEA-4-60	1.00	2.00	4.00	6.92	60.0	8.00
FEA-4-70	1.00	2.00	4.00	11.0	70.0	8.00
FEA-5-40	1.00	2.50	5.00	3.93	40.0	8.00
FEA-5-50	1.00	2.50	5.00	5.96	50.0	8.00
FEA-5-60	1.00	2.50	5.00	8.66	60.0	8.00
FEA-5-70	1.00	2.50	5.00	13.7	70.0	8.00
FEA-6-30	1.00	3.00	6.00	3.93	30.0	8.00
FEA-6-40	1.00	3.00	6.00	5.03	40.0	8.00
FEA-6-50	1.00	3.00	6.00	7.15	50.0	8.00
FEA-6-60	1.00	3.00	6.00	10.4	60.0	8.00
FEA-6-70	1.00	3.00	6.00	16.5	70.0	8.00
FEA-7-30	1.00	3.50	7.00	3.93	30.0	8.00
FEA-7-40	1.00	3.50	7.00	5.87	40.0	8.00
FEA-7-50	1.00	3.50	7.00	8.34	50.0	8.00
FEA-7-60	1.00	3.50	7.00	12.1	60.0	8.00
FEA-7-70	1.00	3.50	7.00	19.2	70.0	8.00
FEA-8-30	1.00	4.00	8.00	4.62	30.0	8.00
FEA-8-40	1.00	4.00	8.00	6.71	40.0	8.00
FEA-8-50	1.00	4.00	8.00	9.53	50.0	8.00
FEA-8-60	1.00	4.00	8.00	13.9	60.0	8.00
FEA-8-70	1.00	4.00	8.00	22.0	70.0	8.00

きくなる。

よって、区間1-2については、素線の横断面の周囲に沿った応力分布を調べる必要がある。そこで、区間1-2において、 $\varphi=5.00(\text{deg})$ 毎に、素線の横断面上の応力分布を調べ、その結果から得られた楕円コイルばねNo.1の最大主応力と φ の関係をFig.13に示した。Fig.13から、円弧部区間1-2に関しては、初等材料力学による φ と Ψ を変数とする応力の基本式による値に曲がりよりの効果を反映した修正が必要であることがわかる。

しかし、この φ と Ψ の関係を材料力学的に導出するのは困難であるので、実用的な応力計算式を求めることにする。

4.3 応力基本式の修正

円弧部区間1-2での最大主応力の基本解に対する修正係数を導くために、FEAにより、Table 3に示す仕様について解析した。

実用されている楕円コイルばね（11種類）について、調査したところ、 θ_1 は28.6～76.3(deg)、ばね指数 c は4.29～8.20であった。またピッチ角 α は7.90～18.8(deg)であった。よって、今回は簡単のために、ばねモデルのピッチ角を8.00(deg)一定とした。応力修正係数がどのパラメータへ

Table 4 The maximum principal stresses by theoretical and FEA results

	Theoretical		FEA		
	φ (deg)	σ_{1th}	φ (deg)	ψ (deg)	σ_{1FEA}
FEA-3-50	26.9	24.0	35.0	45.0	27.6
FEA-3-60	23.5	29.8	35.0	45.0	33.5
FEA-3-70	17.2	44.4	5.00	67.5	52.2
FEA-4-40	30.4	26.2	40.0	45.0	28.7
FEA-4-50	28.1	29.9	30.0	67.5	32.3
FEA-4-60	23.5	39.8	25.0	67.5	43.0
FEA-4-70	17.2	59.2	5.00	78.8	66.5
FEA-5-40	32.7	28.4	45.0	45.0	30.5
FEA-5-50	28.1	37.4	30.0	67.5	39.6
FEA-5-60	23.5	49.8	25.0	67.5	52.4
FEA-5-70	17.2	74.0	10.0	67.5	77.4
FEA-6-30	34.4	30.8	45.0	45.0	32.5
FEA-6-40	32.1	35.5	35.0	67.5	37.3
FEA-6-50	28.1	44.8	25.0	67.5	46.5
FEA-6-60	23.5	59.7	25.0	67.5	61.5
FEA-6-70	17.2	88.8	10.0	78.8	91.9
FEA-7-30	35.5	33.2	45.0	45.0	34.7
FEA-7-40	32.1	41.4	35.0	67.5	42.9
FEA-7-50	28.1	52.3	30.0	67.5	53.6
FEA-7-60	23.5	69.6	30.0	67.5	70.5
FEA-7-70	17.2	103.6	10.0	78.8	104
FEA-8-30	35.5	38.4	40.0	67.5	39.7
FEA-8-40	32.1	47.3	35.0	67.5	48.4
FEA-8-50	28.1	59.7	35.0	67.5	60.4
FEA-8-60	23.5	79.6	25.0	78.8	79.4
FEA-8-70	17.2	118.4	20.0	78.8	117

Table 5 Differences between theoretical and FEA results

	$\Delta \varphi$ (deg)*	$\Delta \sigma_1$ (%)**	κ_{σ_1} ***
FEA-3-50	-8.10	13.0	1.15
FEA-3-60	-11.5	11.0	1.12
FEA-3-70	12.2	15.0	1.18
FEA-4-40	-9.60	8.84	1.10
FEA-4-50	-1.90	7.62	1.08
FEA-4-60	-1.50	7.43	1.08
FEA-4-70	12.2	10.89	1.12
FEA-5-40	-12.3	6.67	1.07
FEA-5-50	-1.90	5.70	1.06
FEA-5-60	-1.50	4.95	1.05
FEA-5-70	7.20	4.35	1.05
FEA-6-30	-10.6	5.40	1.06
FEA-6-40	-2.90	4.81	1.05
FEA-6-50	3.10	3.67	1.04
FEA-6-60	-1.50	2.96	1.03
FEA-6-70	7.20	3.40	1.04
FEA-7-30	-9.50	4.51	1.05
FEA-7-40	-2.90	3.50	1.04
FEA-7-50	-1.90	2.42	1.02
FEA-7-60	-6.50	1.26	1.01
FEA-7-70	7.20	0.34	1.00
FEA-8-30	-4.50	3.27	1.03
FEA-8-40	-2.90	2.30	1.02
FEA-8-50	-6.90	1.08	1.01
FEA-8-60	-1.50	-0.22	1.00
FEA-8-70	-2.80	-1.05	0.99

* $\Delta \varphi = \varphi_{th} - \varphi_{FEA}$ ** $\Delta \sigma_1 = (\sigma_{1FEA} - \sigma_{1th}) / \sigma_{1FEA} \times 100$ *** $\kappa_{\sigma_1} = \sigma_{1FEA} / \sigma_{1th}$

の依存性が高いかを知るために、ばね指数を3.00～8.00の間で変化させ、直線部の長さである $h/2$ を θ_1 で表し、その θ_1 をTable 3のように変化させた。なお、Table 3に示すばねモデルの記号は、それぞれFEA-ばね指数- θ_1 を表している。各々のばね指数で θ_1 の値の範囲が異なっているのは、ピッチ角を8.00 (deg) 一定としたためである。

Fig.14 Relationships between the spring index and the difference of the maximum principal stresses

Fig.15 Spring index dependence of the stress correction factor κ_{σ_1}

4.4 実用的な最大主応力計算式

各々のばねモデルから、最大主応力が発生する位置とその値をTable 4に示す。なお、理論値は $\Psi=90.0(\text{deg})$ の値である。

最大主応力が発生する位置 φ の差及びその最大主応力値の差を、理論値を基準として導出すると、Table 5になる。この表から、最大主応力発生位置 φ の差はばね指数 c 及び θ_1 によらず、理論解析とFEA結果の差は最大で12.0(deg)程度であった。この位置の差は、 $\varphi=5.0(\text{deg})$ 毎に素線の断面の応力分布を調べたことによる。しかし、楕円コイルばねの円弧部は180(deg)にわたるので、これは誤差の範囲内であると考えることができる。次に、ばね指数 c と最大主応力の差の関係を示すとFig.14のようになる。Table 5から、最大主応力の修正係数を求めるとFig.15のようになる。最大主応力の修正係数の分布に対し、最小自乗法を用いて近似曲線を引くと、

$$\kappa_{\sigma_1} = 0.0048c^2 - 0.0792c + 1.3392 \dots \dots \dots (26)$$

となる。

よって、最大主応力の値は、以下の式より算出することができる。

Fig.16 The corrected maximum principal stress on the wire surface of Spring No.1

Table 6 FEA results and correction of theoretical ones

	$\kappa_{\sigma_1} \sigma_{1th} (MPa)$	$\sigma_{1FEA} (MPa)$	Difference (%)
No.1	34.7	35.7	2.80
No.2	148	143	-3.50
No.3	108.5	109.0	0.46

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \kappa_{\sigma_1} \sigma_1 \\ &= \kappa_{\sigma_1} \left(\frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{4} + \tau^2} \right) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

修正係数を楕円コイルばねNo.1の最大主応力に適用すると、Fig.16が得られる。また、楕円コイルばねNo.1～No.3の最大主応力の修正した理論値とFEA結果との比較をTable 6に示す。Table 6から実用的な応力計算式としては、式 (27) が有効であることがわかる。

5. 結 言

本研究の実験条件及び解析条件の範囲内で、異形コイルばねのばね特性と応力について明らかになった事柄を以下に示す。

(1) 楕円コイルばねのばね定数は、ピッチ角が小さければ理論式 (20) で与えられ、その値は実験結果及びFEA結果と比較的よく一致した。

(2) 長方形コイルばねのばね定数は、ピッチ角が小さければ理論式 (19) で与えられる。

(3) 正方形コイルばねのばね定数は、ピッチ角が小さければ理論式 (21) で与えられ、その値は実験結果及びFEA結果と比較的よく一致した。

(4) 最大主応力の極大値の発生位置は、円弧部の素線横断面の位置及び横断面外周上の位置を表すパラメータで表される。しかし、これら二つのパラメータの関係を定式化することはできなかった。

(5) 楕円コイルばねの最大主応力の基本式は式 (24) で与えられるが、曲りはりの効果のため、計算結果を修正する必要がある。最大主応力の修正式中には、円弧部の素線横断面の位置を表すパラメータと横断面外周上の位置を表すパラメータの関係が含まれる。しかし、両者の関係を理論的に定式化することは困難であるので、横断面外周上の位置を表すパラメータを無視し、実用的な応力計算式 (27) を導出した。式 (27) とFEA結果とは比較的よく一致した。

本研究は(株)奥野機械製作所奥野利和氏により提起されたもので、ばねの試供では、同製作所並びに(株)板屋製作所に、ばね特性や応力の測定に際しては、(株)多摩スプリングに多大な御協力を頂いたことを記し、感謝致します。また、実験を行うにあたり本学学部生の榎本洋介君の協力を得たことを記し、併せて謝意を表します。

参考文献

- 1) JIS B0103, (1996), 6, 日本規格協会。
- 2) ニッパツ・日本発条株式会社編, ばね, (1995), 117, 工業調査会。
- 3) ばね技術研究会, ばねの設計と製造・信頼性, (2001), 2-5, 日刊工業新聞社。
- 4) ばね技術研究会, ばね第3版, (1982), 189-190, 丸善。
- 5) 水野正夫, 材料力学大要, (1973), 82-87, 養賢堂。
- 6) ばね技術研究会, ばねの有限要素解析, (1997), 155-172, 日刊工業新聞社。