座屈後変形を利用した積層薄板／細線の 簡易ヤング率測定法（回転固定軸圧縮法）*

大槻敦巳 **, 林 克典 ***

An Innovative Method for Measuring Young's Modulus of Thin Plates and Wires Using Postbuckling Behavior (Compression Column Method)

Atsumi OHTSUKI and Katsunori HAYASHI

In recent years, flexible materials with very high performance are widely used and large deformation analyses of these materials have attracted considerable attention. Therefore, it is very important to evaluate mechanical properties, especially, Young's modulus, of these flexible materials. In this study, a new and convenient mechanical testing method (Compression Column Method) is developed for measuring Young's modulus of each layer in a thin flexible multi-layered material (thin plate, rod, or wire). The method is based on a nonlinear theory under the assumptions of the geometrical nonlinearity that takes into account large deformation behavior of multi-layered materials. Exact analytical solutions for large deformation are obtained in terms of elliptic integrals. By means of measuring the horizontal displacement at the fixed end or the vertical displacement at the middle point of the buckled column, Young's modulus of each layer can be easily obtained for various thin and long multi-layered materials. Measurements were carried out on a two-layered material consisting of PVC (a high-polymer material) and SUS (a stainless steel material). As a result, it is made clear that the new method is suitable for thin flexible multi-layered materials. In the meantime, the new method proposed in this paper can be applied widely to measure Young's modulus of every thin layers formed by PVD, CVD, Electrodeposition, Coating, Paint, Cladding, Lamination, and others.

Key Words : Material testing, Multi-layered material, Young's modulus, Postbuckling deformation, Column, Large deflection

1. 緒 言

高分子材料や金属／非鉄金属系材料などの薄板，細線が機能向上のため積層化され，ばね材のみならず構造部材として広く使用されている．ばねなどにおける各種被覆処理などはその代表例である．したがって，こういった可撓性積層材料の変形特性を把握することは材料設計上不可欠であり，そのために各積層構成要素の機械的性質であるヤング率（縦弾性係数）の実測が工業上重要な課題である．しかし，比較的肉厚／太さのある薄板や細線などのヤング率はこれまで，専用の小荷重引張試験機などを用いて測定されてきたが，肉厚や太さが1mm以下の薄板や細線では，一般に試験片の調製や試験の実施にかなりの熟練と手間が必要であり，単層／単体であっても，従来の材料試験法（微小変形理論を基礎とした引張試験や圧縮試験，片持はり試

験，三点曲げ／四点曲げ試験など）を用いて求めるのは甚だ難しく，積層した薄板や細線などの構成各層のヤング率測定はなおさら困難である．そこで，本論文では，こうした積層材料の試験片を大きく変形させた状態の軸圧縮材料試験によって積層構成各層のヤング率を容易に求める方法として，新しい概念に基づいて開発した“回転固定軸圧縮法”を提案した．本測定法の特徴は，両端を回転固定した支持はりに軸圧縮荷重を作用させたときの薄板／細線などの座屈後大たわみ変形を利用するもので，原理は非線形大たわみ理論^{1,2)}に基づいている．なお，積層はりの変形解析においては，幾何学的非線形性を考慮し，Euler-Bernoulliの仮定が成り立つものと考え，理論の適応範囲は弾性領域で，はりは不伸長とし，せん断力の影響，ポアソン効果などは考慮しないこととする．大変形によって材

原稿受付日 2012年12月11日

* 日本ばね学会2011年度秋季講演会

** 名城大学(Meijo University)

*** 名城大学大学院(Meijo University)

料に塑性変形が生じるおそれのある場合には不向きな方法であるが、塑性変形を伴わず大変形する薄板／細線などには絶好の測定法である。“ピボット軸圧縮法”（後記）に比べ、両端を固定するという支持条件は極めて簡単で、専用の小型試験機でも容易に実施できることも特長の1つである。ちなみに、本測定法は拡張性が高く、通常のばね用積層薄板／細線のほか、めっき薄膜を始め、コーティング薄膜、ICチップ上の薄膜、医用デバイス薄膜、MEMS用薄膜などのマイクロマテリアルやPVD薄膜、CVD薄膜、クラッド材、ラミネート材などのヤング率測定にも応用し得るもので、それぞれの薄層／薄膜材料を剥離／分離することなく積層状態のままでヤング率の測定が可能である。なお、本測定法の適用性については、高分子材料の薄層(PVC)とステンレスの薄層(SUS)から成る積層2層薄板を用いて構成各層のヤング率測定実験を行い、有効性を確かめた。

ところで、薄板／細線といった薄肉材料のヤング率測定に関しては、単体の箔や薄膜について既存の引張試験法を改良した方法で求めた例^{3)~5)}もあるが、材料の座屈後大たわみ変形を利用したヤング率測定法についてはほとんど無く、単層薄肉材料に関する片持はり法⁶⁾、ピボット軸圧縮法^{7)~10)}、円リング法^{11)~13)}、また積層薄肉材料については片持はり法^{14),15)}、さらに、自重を利用した方法として単層片持はり法^{16),17)}、積層片持はり法¹⁸⁾など、散見される程度である。

2. 回転固定軸圧縮法の基礎理論

測定原理は、両端部の回転を固定された可撓性積層試験片を軸圧縮した場合に生じる座屈後の大たわみ変形に注目した方法であり、大たわみ変形であっても変形自体は弾性範囲の変形である。

Fig.1に示すように、座屈荷重を越えた水平方向軸圧縮荷重 P が作用する全長 L の両端固定積層はりにおいて、両端部間の水平方向変位を λ 、中央部の垂直方向変位を δ とする。はりの一端Aを座標原点とし、水平方向に距離 x 、垂直方向に距離 y をとり、たわみ角を θ 、たわみ曲線の円弧長さを s 、曲率を $1/R$ 、積層はりを構成する各要素のヤン

Fig. 1 Schematic illustrations of a typical deformation shape (buckled beam).

グ率を $E_1 \sim E_n$ 、中立軸に関する各要素の断面二次モーメントを $I_1 \sim I_n$ とする。特に、Fig.2は2層薄板($n=2$)の場合の断面図を例示したもので、 z 軸から中立軸までの距離を $\bar{y}$ 、中立軸から任意軸までの距離を y とする。

曲げモーメントを M とすると、はりにおける R , M , s , x , y , θ の各量間に成り立つ関係は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= -\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \\ dy &= ds \cdot \sin\theta, \quad dx = ds \cdot \cos\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

任意点N(x,y)に作用する曲げモーメント M は

$$M = P \cdot y + M_A \dots\dots\dots (2)$$

ここで、大たわみ変形の一般的特性の把握に便利のように、次に示す無次元変数

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \zeta = \frac{s}{L}, \quad \rho = \frac{R}{L} \\ \gamma &= \frac{PL^2}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)}, \quad \alpha = \frac{M_A L}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を導入すれば、式(1), (2), (3)より

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \gamma \cdot \sin\theta = 0 \dots\dots\dots (4)$$

非線形微分方程式(4)は軸圧縮を受ける回転固定はりの座屈後の大たわみ変形挙動を支配する重要な基礎式である。

ところで、微分方程式(4)において、はり固定端の点Aでのたわみ角 $\theta=0$ に対して $d\theta/d\zeta|_{\theta=0}=\alpha$ なる境界条件を考慮すれば、最終的に式(5)が導かれる。

Fig. 2 Illustrations of cross-section (two-layered beam)

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\gamma} \sqrt{\cos \theta + \frac{\alpha^2 - 2\gamma}{2\gamma}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

なお、式(5)の正負符号(±)は無次元円弧長さζに対するたわみ角θの増減特性によって選択されるもので、例えばFig.1の点D、E(点D、Eは変曲点)を境に符号が変化する。

非線形微分方程式(5)を解析するにあたり

$$\frac{\alpha^2 - 2\gamma}{2\gamma} = 2\kappa^2 - 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\cos \theta = 1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \phi \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(0 \leq \phi \leq \pi/2)$$

とおき、角度θについて変数変換して解析すれば、微小無次元円弧長さdζは

$$d\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \phi}} \cdot d\phi \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、微小無次元垂直距離dηは

$$d\eta = d\zeta \cdot \sin \theta$$

$$= \pm \frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \sin \phi \cdot d\phi \quad \dots\dots\dots (9)$$

同じく、微小無次元水平距離dξは

$$d\xi = d\zeta \cdot \cos \theta$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \left[\frac{2\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \phi}}{-\frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \phi}}} \right] \cdot d\phi \quad \dots\dots\dots (10)$$

一方、角度変数φに関しては

$$\phi = \text{Sin}^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2\kappa^2}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係より、 $\theta_A = \theta_B = \theta_C = 0$ であるため、 $\phi_A = \phi_B = \phi_C = 0$ となる。また、変曲点D、Eでの条件($d\theta/d\zeta = 0$)より、角度φ_D、φ_Eは式(11)より

$$\phi_{D,E} = \text{Sin}^{-1} \sqrt{\frac{1 - 1 + 2\kappa^2}{2\kappa^2}} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

したがって、たわみ曲線上の任意点N(x,y)までの無次元円弧長さζは、変曲点D、E及び点Bによって変わる符号に注意し、式(8)を角度変数φ_A~φ(実角度θ_A~θに対応)にわたって積分することによって得られ、任意点N(x,y)の存在区間に応じて次のように表される。

【区間AD】

$$\zeta = \int_{\phi_A=0}^{\phi} d\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \{ F(\kappa, \phi) - F(\kappa, 0) \} \quad \dots\dots\dots (13-1)$$

【区間DB】

$$\zeta = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\zeta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left\{ 2F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\kappa, \phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (13-2)$$

【区間BE】

$$\zeta = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\zeta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\zeta + \int_{\phi_C=0}^{\phi} d\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left\{ 2F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) + F(\kappa, \phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (13-3)$$

【区間EC】

$$\zeta = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\zeta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\zeta + \int_{\phi_C=0}^{\phi_E=\frac{\pi}{2}} d\zeta$$

$$- \int_{\phi_E=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\zeta$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left\{ 4F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\kappa, \phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (13-4)$$

同様にして、任意点N(x,y)までの無次元垂直距離ηは、式(9)より

【区間AD】

$$\eta = \int_{\phi_A=0}^{\phi} d\eta$$

$$= \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot (1 - \cos \phi) \quad \dots\dots\dots (14-1)$$

【区間DB】

$$\eta = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\eta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\eta$$

$$= \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot (1 + \cos \phi) \quad \dots\dots\dots (14-2)$$

【区間BE】

$$\eta = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\eta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\eta + \int_{\phi_C=0}^{\phi} d\eta$$

$$= \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot (2 - \cos \phi) \quad \dots\dots\dots (14-3)$$

【区間EC】

$$\begin{aligned}\eta &= \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\eta - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\eta + \int_{\phi_C=0}^{\phi_D=\frac{\pi}{2}} d\eta \\ &\quad - \int_{\phi_D=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\eta \\ &= \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot (1 - \cos \phi) \quad \dots\dots\dots (14-4)\end{aligned}$$

さらに、任意点N(x,y)までの無次元水平距離 ξ は、式(10)より

【区間AD】

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\phi_A=0}^{\phi} d\xi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left\{ 2E\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\kappa, \phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (15-1)\end{aligned}$$

【区間DB】

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\xi - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\xi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left[2 \left\{ 2E\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2E(\kappa, \phi) - F(\kappa, \phi) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (15-2)\end{aligned}$$

【区間BE】

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\xi - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\xi + \int_{\phi_C=0}^{\phi} d\xi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left[2 \left\{ 2E\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2E(\kappa, \phi) - F(\kappa, \phi) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (15-3)\end{aligned}$$

【区間EC】

$$\begin{aligned}\xi &= \int_{\phi_A=0}^{\phi_B=\frac{\pi}{2}} d\xi - \int_{\phi_B=\frac{\pi}{2}}^{\phi_C=0} d\xi + \int_{\phi_C=0}^{\phi_D=\frac{\pi}{2}} d\xi \\ &\quad - \int_{\phi_D=\frac{\pi}{2}}^{\phi} d\xi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \cdot \left[4 \left\{ 2E\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2E(\kappa, \phi) - F(\kappa, \phi) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (15-4)\end{aligned}$$

なお、関数 $F(\kappa, \phi)$ 、 $E(\kappa, \phi)$ などはそれぞれLegendre-Jacobiの楕円積分第一種および楕円積分第二種である。

以上より、点Cまでの最大無次元円弧長さについて $\xi_{AC} = \xi_{\max} = 1$ 、点Bでの最大無次元たわみ(つまり、最大無次元距離)について $\eta_{AB} = \eta_{\max} = \delta/L$ 、また、点Cまでの最大無次元水平位置(つまり、最大無次元水平距離)に関して $\xi_{AC} = \xi_{\max} = 1 \cdot \lambda/L$ とすれば、最終的に次のような関係式が得られる。

$$\xi_{AC} = 1 = \frac{4}{\sqrt{\gamma}} \cdot F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\eta_{AB} = \frac{\delta}{L} = \frac{4\kappa}{\sqrt{\gamma}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\xi_{AC} = 1 - \frac{\lambda}{L} = \frac{4}{\sqrt{\gamma}} \left\{ \begin{array}{l} 2E\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \\ - F\left(\kappa, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

こうした関係式(16)～(18)が座屈後大たわみ変形を利用した積層各層のヤング率測定の基礎理論式であり、原理的にはこの理論に基づいてヤング率が算出できるが、概して測定理論の取り扱いは一様に容易ではない。

一方、簡易方法として、式(3)を変形した次式(19)を用いれば、各層のヤング率 E_i を算出することが可能である。

$$\sum_{i=1}^n (E_i I_i) = \frac{PL^2}{\gamma} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、式(19)より各層ヤング率 E_i を求めるには無次元荷重 γ を知る必要がある。したがって、大たわみ変形を利用した本測定法においては、この必須の γ が実験で計測される水平変位 λ や垂直変位 δ から得られるように、解析理論の式(16)～(18)を基にあらかじめ関係図を作図しておくことと便利である。

ところで、式(19)を利用して積層はり各層のヤング率を計算するに際しては、各積層構成要素の曲げ剛性の総和 $\sum_{i=1}^n (E_i I_i)$ が重要なファクターで、そのためには積層はり全体の中立軸位置を知る必要がある。特に、非対称断面になる積層薄板はりの場合には必ず中立軸を算定しなければならない。一方、積層細線の場合は断面が対称で、積層材料の中心が常に中立軸となるのでその算定は不要である。

積層薄板はりの場合についていえば、任意構成要素(厚さ h_i 、同一幅 b)の横断面が中立軸に関して持つ断面二次モーメント I_i の一般式は

$$I_i = \frac{bh_i^3}{12} + bh_i \left(\bar{y} - \frac{h_i}{2} - \sum_{k=1}^n h_{k-1} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

(ただし、 $h_0 = 0$ 、 $i \leq n$)

で表され、中立軸の位置 $\bar{y}$ は任意 i 層の横断面(断面積 A_i)が z 軸に関して持つ断面一次モーメントを $(S_i)_z$ とすれば

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i (S_i)_z}{\sum_{i=1}^n (E_i A_i)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $(S_i)_z$ の一般式は

$$(S_i)_z = \frac{bh_i^2}{12} + bh_i \left(\sum_{k=1}^n h_{k-1} \right) \dots\dots\dots (22)$$

3. 新ヤング率測定手法の概略

微小変形線形理論に基づく従来の一般的な測定法(引張り, 片持ち, 支点曲げ試験など)においては計測した実験データから簡単な計算式によって直接にヤング率の算出が可能であるが, 本論文のような座屈後大たわみ変形を対象とした非線形理論による測定法の場合には数式的取り扱いが煩瑣であり, 実験データから直接にヤング率を計算によって求めることは甚だ難しい。そこで, ここでは導出した解析理論を応用してあらかじめ計算図表(ノモグラフ)を作成しておき, その計算図表を適宜利用して, ヤング率を求める簡便な方法を提案する。なお, 実験で得られる基礎データとしては, はり固定端の水平変位 λ あるいははり中央部における垂直変位 δ を想定している。

便利な計算図表として, 無次元荷重 γ と水平変位 λ の関係($\gamma-\lambda/L$)をFig.3, 無次元荷重 γ と垂直変位 δ の関係($\gamma-\delta/L$)をFig.4にそれぞれ示す。こうした計算図表を利用することによって無次元荷重 γ を知り得れば, 積層各層のヤング率 E_i は式(19)を用いて容易に求めることができる。そこで, こうした手法の利便性周知のため, 高分子材料の薄層(PVC)(第1層: 厚さ $h_1=0.515\text{mm}$)とステンレス薄層(SUS)(第2層: 厚さ $h_2=0.100\text{mm}$)から構成される積層2層薄板(幅 $b_1=b_2=b=27.0\text{mm}$ 及び長さ $L_1=L_2=L=250\text{mm}$ は共通)について, 構成各薄層ヤング率の算出プロセスの一例を以下の3.1, 3.2節に示す。

ところで, 本測定手法に基づく実験データの収集にあたって注意すべきことは, ヤング率未知な積層数に応じて複数回(ステップ数)の大たわみ変形実験を必要とすることである。すなわち, 3層ともヤング率未知の3層積層はりの場合には, 3層状態で実験→2層状態で実験→単層状態で実験という具合に積層数を減じつつ3回(3ステップ)の実験が必要であり, 各実験ステップで収集したデータを基に連立方程式を解いてようやく各層ヤング率が確定するということである¹⁴⁾。なお, 積層する薄層の減じ方としては, 実験条件などを勘案して適当な機械的方法, 化学的方法などから測定者が適宜選択するといふ。

3.1 水平変位 λ を実験基礎データとしたヤング率測定法【測定法1】

軸圧縮荷重 P を負荷したときの固定端の水平変位 λ を計測し, $\gamma-\lambda/L$ の関係を示す計算図表(Fig.3)を用いて, 無次元荷重 γ の値を読取り, その γ を式(19)に代入して各層ヤング率を計算する方法である。積層数に応じてデータ収集のステップが変わるが, 例として積層2層薄板の場合は次の①, ②のように2ステップの実験を要する。

① 第1ステップ(2層状態でデータ計測)

積層状態(2層)において, 軸圧縮荷重 $P=3.73\text{N}$ に対する $\lambda=21.3\text{mm}$ を計測し, この無次元値 $\lambda/L=0.0852$ に対応する無次元荷重 $\gamma=41.24$ をFig.3より得た場合【注】, 2層薄板に関する曲げ剛性の総和 $\sum_{i=1}^n (E_i I_i)$ ($n=2$)は, 式(19)より

$$\begin{aligned} E_1 I_1 + E_2 I_2 &= \frac{PL^2}{\gamma} = \frac{3.73 \times (0.25)^2}{41.24} \\ &= 5.643 \times 10^{-3} \quad [\text{N}\cdot\text{m}^2] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

② 第2ステップ(単層状態でデータ計測)

次いで, 高分子薄板(PVC, 第1層)の単層状態(第2層のステンレス薄層(SUS)は無し)で, 軸圧縮荷重 $P=0.706\text{N}$ に対する $\lambda=30.6\text{mm}$ を計測し, この無次元値 $\lambda/L=0.1238$ に

Fig. 3 Non-dimensional chart for finding the parameter γ when the parameter λ/L is given.

Fig. 4 Non-dimensional chart for finding the parameter γ when the parameter δ/L is given..

対しFig.3より無次元荷重 $\gamma=42.084$ を得たとき【注】、単層薄板に関する曲げ剛性 $\sum_{i=1}^n (E_i I_i)$ ($n=1$)は、式(19)より

$$E_1 I_1 = \frac{PL^2}{\gamma} = \frac{0.706 \times (0.25)^2}{42.084} = 1.048 \times 10^{-3} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad \dots\dots\dots (24)$$

したがって、曲げ剛性($E_1 I_1$)の関係式(24)において、PVC単層の $I_1=3.073 \times 10^{-13} \text{m}^4$ (注：積層板の場合、単層と2層のときでは中立軸の位置が異なるため、式(23)における I_1 と同値ではない)を考慮すれば、第1層(PVC)のヤング率 $E_1=3.41 \text{GPa}$ が求まる。

さらに、第2ステップで確定した第1層ヤング率 E_1 (:3.41GPa)と第2層ヤング率の仮値 E_2 を用いて式(20)、(21)より I_1 、 I_2 を推定し、式(23)を満たす適切な E_2 を得るまで“挟み撃ち法(False Position Method)”などによって計算を繰返すことにより最終的 E_2 が確定する。本例では、第2層のステンレス薄層(SUS)のヤング率として $E_2=206.39 \text{GPa}$ が得られた。

3.2 垂直距離 δ を実験基礎データとしたヤング率測定法【測定法2】

軸圧縮荷重 P を負荷したときのはり中央の垂直変位 δ を計測し、 γ - δ/L の関係を示す計算図表(Fig.4)を用いて、無次元荷重 γ の値を読み取り、得られた γ を式(19)に代入して各層ヤング率を計算する方法である。積層2層薄板の場合は3.1節と同様に、次の①、②に示す2ステップの実験を要する。

① 第1ステップ(2層状態でデータ計測)

積層した状態(2層)において、軸圧縮荷重 $P=3.73 \text{N}$ に対する $\delta=45.1 \text{mm}$ を計測し、この無次元値 $\delta/L=0.1804$ に対応する無次元荷重 $\gamma=41.23$ をFig.4より得た場合【注】、2層薄板に関する曲げ剛性の総和 $\sum_{i=1}^n (E_i I_i)$ ($n=2$)は、式(19)より

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = \frac{PL^2}{\gamma} = \frac{3.73 \times (0.25)^2}{41.23} = 5.645 \times 10^{-3} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad \dots\dots\dots (25)$$

② 第2ステップ(単層状態でデータ計測)

次いで、高分子薄板(PVC、第1層)の単層状態(第2層のステンレス薄層(SUS)は無し)で、軸圧縮荷重 $P=0.706 \text{N}$ に対する $\delta=53.6 \text{mm}$ を計測し、この無次元値 $\delta/L=0.2144$ に対しFig.4より無次元荷重 $\gamma=42.084$ を得たとき【注】、単層薄板に関する曲げ剛性 $\sum_{i=1}^n (E_i I_i)$ ($n=1$)は、式(19)より

$$E_1 I_1 = \frac{PL^2}{\gamma} = \frac{0.706 \times (0.25)^2}{42.084} = 1.048 \times 10^{-3} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad \dots\dots\dots (26)$$

したがって、曲げ剛性 $E_1 I_1$ の関係式(26)において、PVC単層の場合の $I_1=3.073 \times 10^{-13} \text{m}^4$ (注：積層板の場合、単層と2層のときでは中立軸の位置が異なるため、式(25)における I_1 と同値ではない)を考慮すれば、第1層(PVC)のヤング率 $E_1=3.41 \text{GPa}$ が求まる。

さらに、第2ステップで確定した第1層ヤング率 E_1 (:3.41GPa)と第2層ヤング率の仮値 E_2 を用いて式(20)、(21)より I_1 、 I_2 を推定し、式(25)を満たす適切な E_2 を得るまで“挟み撃ち法(False Position Method)”などを用いて繰返しの計算を実行することにより最終的 E_2 が確定する。

本例では、第2層のステンレス薄層(SUS)のヤング率として $E_2=206.39 \text{GPa}$ が得られた。

4. 積層薄板のヤング率測定実験

提案した新測定法の有効性を確かめるため、大きな可撓性を有する積層材料として、高分子材料(PVC)の薄層とステンレスの薄層(SUS)から成る積層2層板を用いて構成各層のヤング率測定実験を行った。実験装置の概略をFig.5に示す。はりの両端部はそれぞれブロックと試材押さえの間に差し込んで固定した。実験では、水平方向にプーリーを介してはりに軸圧縮荷重 P を作用させ、はりが座屈後に側面方向(図手前方向)に大きくたわんだ状態で、固定端の水平変位 λ 及び中央の垂直変位 δ を装置基台に取付けた方眼紙スケール(1mm)を利用し、ブロック側面に設置の指針(インジケータ)を用いて測定した。なお、いずれの薄層のヤング率も不明な積層2層薄板のため、各層ヤング率を求めるに際しては、2層状態と単層状態の各ステップで大たわみ変形実験を実施し、所要の実験データ(λ, δ)の収集を行った。

Fig.6は、高分子材料(PVC)(第1層)の薄層(厚さ $h_1=0.515 \text{mm}$ 、幅 $b_1=27.0 \text{mm}$ 、長さ $L_1=250 \text{mm}$)に対する測定結果を示したもので、またFig.7には、ステンレス(SUS)(第2層)の薄層(厚さ $h_2=0.100 \text{mm}$ 、幅 $b_2=27.0 \text{mm}$ 、長さ $L_2=250 \text{mm}$)に対する測定結果を図示した。図中の Av. は作用する軸圧縮荷重に対する測定値の平均を示し、S.D.は標準偏差(Standard Deviation)を表している。また、ヤング率

Fig. 5 Experimental set-up (a specimen of multi-layered plate is shown).

Fig. 6 Comparison of Young's moduli of a high-polymer thin plate (PVC: E_1) between the two measuring methods for various values of the axial load P . (Note: E_2 of SUS is known previously.)

に与える軸圧縮荷重の影響傾向を把握するため軸圧縮荷重 (P) として便宜上積層2層薄板の状態で負荷される荷重で表示した(注: 単層状態の荷重で表現することも可能). なお, 高分子薄層(PVC)(第1層)のヤング率については単層状態の実験であらかじめ確定したステンレス薄層(SUS)(第2層)のヤング率($E_2=205.6$ GPa)を利用し, 一方, ステンレス薄層(SUS)(第2層)のヤング率については単層状態の実験であらかじめ求めた高分子薄層(PVC)(第1層)のヤング率($E_1=3.41$ GPa)をそれぞれ用いて, 2層状態の実験データと組み合わせ, 所定の連立方程式を解いて算出したものである.

Fig.6から明らかなように, 測定法1(水平変位 λ 計測)と測定法2(垂直変位 δ 計測)ではヤング率算出に採用する収集データが異なっているが, 両測定法とも多少のばらつきがあるものの本実験の負荷範囲で測定された高分子薄層(PVC)(第1層)のヤング率は軸圧縮荷重の大小に依らずほぼ一定で, 平均値で0.3%程度の違いはあるが全体的には互いに良く一致していることがわかる. したがって, ヤング率測定に際しては種々勘案し, 実験上, より便利な測定法(測定法1: 水平変位 λ あるいは測定法2: 垂直変位 δ)を選択すればよいといえる. また, Fig.7のステンレス薄層(SUS)(第2層)のヤング率についても総体的には同様で,

Fig. 7 Comparison of Young's moduli of a stainless steel thin plate (SUS: E_2) between the two measuring methods for various values of the axial load P . (Note: E_1 of PVC is known previously.)

平均値で0.6%程度の違いはあるものの大きな差異は見られず, 互いに良く一致する傾向を示しており, この例でもヤング率測定に関しては基礎データとして水平変位 λ , 垂直変位 δ のいずれのデータを収集しても測定には支障がないといえる.

以上の測定例から, 新しく提示した“回転固定軸圧縮法(測定法1, 測定法2)”を適用することによって可撓性積層材料を構成する各層のヤング率を容易に測定可能なことがわかる.

5. むすび

本論文は, 微小変形線形理論に準拠する従来の一般的材料試験法とは異なった斬新なヤング率測定法を提案したものであり, 内容を要約すると以下の通りである.

- (1) 可撓性積層薄肉材料(薄板/細線など)における構成各層の未知ヤング率が測定可能な新手法を理論解析した.
- (2) 本測定法は, 積層材料の軸圧縮による座屈後大たわみ変形を利用したもので, 大きく変形させた試験片で実験データを収集する方法(回転固定軸圧縮法)である.
- (3) 本測定法は, かなり変形量の大きい領域を取り扱う

ために実験データが得やすいなどの特長がある。

- (4) ヤング率算出の基礎データは、はり固定端における水平変位あるいは中央部の垂直変位である。
- (5) ヤング率算出に際しては、基礎理論を基に作成した計算図表(ノモグラフ)を利用する簡便な方法を提案した。
- (6) 本測定法の簡便さ周知のため、計算図表を用いたヤング率の算出プロセスをわかりやすく例示した。
- (7) 本測定法の有効性確認のため、大きな可撓性を有する積層2層薄板(PVC薄層+SUS薄層)を用いて、構成各層のヤング率測定実験を行った。
- (8) 測定した積層2層薄板(PVC+SUS)のヤング率に関して、計測する基礎データ(固定端水平変位あるいは中央垂直変位)の違いによる大きな差異は見られず、採用するデータは水平、垂直いずれの変位でもよい。
- (9) 本測定法は、積層薄板の測定結果や試験の簡易さからみて実用上十分有用性のある測定法であるといえる。
- (10) 本測定法は拡張性が高く、各種の処理加工による薄板/薄膜など(めっき、コーティング、ICチップ上の薄膜、医用デバイス薄膜、MEMS用薄膜、PVD、CVD、クラッド、ラミネートなど)のように単体の薄層/薄膜での測定が極めて困難な材料のヤング率測定にも応用可能である。
- (11) 本測定法は、比較的簡単な支持条件(両端固定)のため専用の小型試験機でも容易に実施できる。

【注】：無次元荷重 γ の読取りに際し、例示した計算図表(Fig.3, Fig.4)を拡大複写して用いれば、所期の目的はある程度達せられる。もし、上記の拡大複写図より高い精度を要する場合は、計算図表の元データ及びその詳細描画図(著者提供応需)を利用するとよい。本論文読者の計算による自作計算図表も使用可。

引用文献

- 1) Timoshenko, S.P. & Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", (1961), p.77, McGRAW HILL.
- 2) 鶴戸口英善, 川田雄一, 倉西正嗣, "材料力学(上巻)", (1957), p.18, 裳華房.
- 3) Johansson, S., Ericson, F. and Schweitz, J.-Åke., J. Appl. Phys., 65, (1989), 122-128.
- 4) 尾田十八, 山田耕二, 坂本次郎, 久保田隆司, 日本機械学会論文集(A編), 57-535, (1991), 686-691.
- 5) 福士みゆき, 宮田 寛, 村上 明, 日本機械学会論文集(A編), 72-718, (2006), 880-885.
- 6) Ohtsuki, A., Experimental Mechanics, Vol.3, (2005), 53-58.
- 7) Ohtsuki, A. and Hattori, M., Experimental Techniques, Vol. II, (1999), 517-522.
- 8) Ohtsuki, A., Proc. SEM Annual Conference, Session 67, (2002), 74(1)-74(4).
- 9) Ohtsuki, A., Thin-Walled Structures, (2004), 233-240.
- 10) Ohtsuki, A., Experimental and Applied Mechanics, Sec.78, (2006), 78(1)-78(4).
- 11) 大槻敦巳, 高田 仁, ばね論文集, No.47, (2002), 27-31.
- 12) Ohtsuki, A., Experimental Mechanics, (2004), 150(1)-150(8).
- 13) Ohtsuki, A., Experimental and Applied Mechanics, Sec.72, (2005), 113(1)-113(8).
- 14) 大槻敦巳, 林 克典, ばね論文集, No.54, (2009), 41-48.
- 15) Ohtsuki, A., Thin-Walled Structures, (2008), 189-196.
- 16) 大槻敦巳, 鈴木理智, ばね論文集, No.55, (2010), 39-44.
- 17) Ohtsuki, A., Applied Mechanics and Materials, Vol.24-25 (2010), 371-377.
- 18) 大槻敦巳, 鈴木理智, ばね論文集, No.56, (2011), 25-31.