カムに駆動されるばね - 質量一体振動系に対するカムフォロアの影響 (正弦カム - 円端カムフォロアに起こる高調波振動)

小竹茂夫 *

Effect of Cam Follower to Cam-driven 1DOF Spring-mass Oscillator (Higher harmonics caused with sinusoidal cam and roller follower)

Shigeo KOTAKE

Since residual vibration decreases lifetime of springs in the system, the profiles of spring-loaded cam and cam follower are important design factors of cam mechanism in automation machineries or engines. By simplifying the vibration by modeling it as a 1DOF oscillator, trajectory of cam follower, called pitch curve, affects the oscillation by modifying enforced displacement of the oscillator base. Although both profiles of cam and cam follower influence the pitch curve, people usually consider merely cam profile and ignore the effect from the shape of cam follower. In this report we study the effect of radius of roller follower, which contacts a periodical sinusoidal translation cam. In case the radius is smaller than the amplitude of the cam profile, almost sinusoidal enforced displacement can excite merely a resonant condition in the oscillator. However, in case the radius size cannot be ignored against the amplitude of the cam profile, higher harmonics excitations, especially 2nd harmonics, also occurs in the oscillator. Hence the radius of cam follower affects harmonics of cam mechanism, we should consider the trajectory of pitch curve as the combination of cam and cam follower profiles in design them.

Key Words: Residual vibration, Cam, Cam follower, Curvature, Higher harmonics

1. 緒 言

自動機械やエンジンの弁機構を始めとして、多くのばねがカムによる強制変位を受ける形で使われている。自動機械の多くは、決められた変位後の位置決め精度が問題となることが多く、そのためばね - 質量系における残留振動が重要となる¹⁾。またエンジンの弁機構においては、高回転域において、ばねのサージングが発生しやすいことから、弁躍りを誘発しやすく、サージングの防止が重要な課題となっている²⁾。そして何よりも、ばねの疲労を抑える意味からも、不用意なばねの振動を抑える必要がある。

自動機械の持つ様々な振動は、各固有振動数を持つ単振動からなる振動モードとして理解され、各モードがカムによって駆動される場合、一つ一つのモードは、Fig. 1に示すような強制変位を受ける一自由度(1DOF)ばね-質量系として理解される¹⁾。そのため、これら各モードのばね-質量系の振動をいかに抑えるように設計するかが重要な鍵となる。

一般にカムの性能は、そのカム曲線とカムフォロアの移動速度によって定まる軌道に大きく依存する。ここでカム曲線とはカムに接するカムフォロアの軌道であり、ピッチ

Fig. 1 Schematic figure of 1DOF oscillator, whose base is enforcedly displaced with cam system.

カーブとも呼ばれる。同じカムでもカムフォロアの形や移動速度に影響を受ける。一般に周期的な外力が線形振動体に与える影響は共振現象として理解され、外力が振動体の固有周期と同じスペクトルをどれだけ持つかに掛かっている。そのため周期的な強制変位として働くピッチカーブは、その関数をスペクトル分解することで議論される。

ところが一般にカムの評価は、カム自身の軌道面の形状を議論することが多い³⁾。その場合、専らカム軌道面を計測し、そのスペクトルから得られる各ハーモニクスの大きさを評価しており、カムフォロアは言外に曲率半径0の尖端のカムフォロアを仮定していた。それでは、実際の有限の半径を持つ円端カムフォロアがカム軌道面に接触する場合、カムフォロアの半径は、どのようにカムに接続される振動体の振動にどのような影響を与えるのであろうか？この問いへの答えが本研究の目的である。

今回は単純な一波数のハーモニクスのみを持つ正弦カムを取り上げ、これにローラフォロアである円端カムフォロアが接する場合に生成するピッチカーブと、これによって強制変位を受けるばね - 質量系に発生する高調波振動について議論する。主としてシミュレーションによって議論を行い、解析的な考察は今後の課題としたい。

2. 主たる記号・単位

x : 直進カムの進行方向

y : 円端カムフォロアの変位方向

$2h$: 正弦カム軌道面1周期の最大変位 [m]

h : 正弦カム軌道面1周期の最大振幅 [m]

d : 正弦カム軌道面1周期の進行距離 [m]

v : 円端カムフォロアの進行速度 [m/s]

$T=d/v$: 正弦カム1周期の移動時間 [s]

r : 円端カムフォロアの半径 [m]

R : 正弦カムの曲率半径 [m]

$R_{\min}$: 正弦カムの曲率半径の最小値 [m]

C : 正弦カム軌道面と円端カムフォロアの接触点

F : 円端カムフォロア中心点

p : 接触点 C の進行距離 [m]

q : 接触点 C の変位 [m]

P : 中心点 F の進行距離 [m]

Q : 中心点 F の変位 [m]

m : モード質量 [kg]

k : モードばね定数 [N/m]

c : モード減衰係数 [N s/m]

$c_0=\sqrt{km}$: モード臨界減衰係数 [N s/m]

$\zeta=c/c_0$: モード減衰比

$\omega_0=\sqrt{k/m}$: 固有角周波数 [1/s]

$\tau_0=2\pi/\omega_0$: 固有周期 [s]

u : モード質量の変位 [m]

$p^*=p/d$: 接触点 C の正規進行距離(x 座標) [-]

$q^*=q/h$: 接触点 C の正規変位(y 座標) [-]

$P^*=P/d$: 中心点 F の正規進行距離(x 座標) [-]

$Q^*=Q/h$: 中心点 F の正規変位(y 座標) [-]

$r^*=r/h$: 円端カムフォロアの正規半径 [-]

3. 正弦カムと接する円端カムフォロアのモデル

以下では、簡単のため、外部拘束平面カム的一种である円端直動従節直進カムを例として考察を行う。Fig. 2に今

回考察する円端直動従節直進カムの概略図を示す。現実のカムがFig. 1で示される中心軸が固定された円板カムであった場合、これに対応する直動カムは、縦方向にのみに変動し、円周長さの軌道面が周期境界条件で無限に続く直動カムとして理解される。またカムフォロアは板ではなく、円形の形状を持つ円端カムフォロアとし、縦方向にのみ従節子は変動するものとする。

Fig. 3に軌道面上の点 $C(p, q)$ でカムとこれに接する半径 r の円からなる円端カムフォロアの様子を示す。円端カムフォロアの直進方向を x 軸、カムによる円端カムフォロアの変動方向を y 軸とする。

Fig. 2 Schematic figure of 1DOF oscillator, whose base is enforcedly displaced with translation cam with roller translating follower.

Fig. 3 Relation between pitch curve of cam and trajectory surface with roller follower.

円端カムフォロアの中心点 F の座標を (P, Q) 、接点 C における正弦カムの法線と y 軸とのなす角を α とすると、座標 C と座標 F の関係は以下の式で表される。

$$P = p - r \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$Q = q + r \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (2)$$

$q = g(p) = h \sin(p)$ で表される最大振幅 h の正弦カムの軌道面に対する円端カムフォロアの中心点 F の軌跡であるピッチカーブは数値解でしか表されないため、ピッチカーブは解析関数としては表現できない。

Fig. 4(a), (b)に示すように、円端カムフォロアの半径が大きくなるにつれ、ピッチカーブの形が $h=1$ となる正弦カムの軌道面の形からずれることとなり、カムが凹面を通過する進行距離 d ごとに、ピッチカーブの傾きが不連続となる。つまり、円端カムフォロアの半径が無視できない

場合、カムの振動への影響は、軌道面のハーモニクスからは理解できないことがわかる。

Fig. 4 Trajectory of cam profile and roller follower, whose radius is (a) much smaller than the curvature radius of cam, or (b) equivalent to the curvature radius of cam.

4. 円端カムフォロアに接続されたばね一質量系

カムにより駆動される自動機械は、剛性の低い部分を中心に振動が生じる。これらの機械は複数のモードからなる連続体の振動からなり、各モードは、それぞれがモード質量 m 、モードばね定数 k 、モード減衰係数 c を持つ一体振動子として近似することができる (Fig. 2)。カムによるカムフォロア中心点の変位 Q は、ばねの根元の強制変位となって働くことから、一体振動子が振動する。いまモード質量の釣合位置からの変位を u とすると、この運動方程式は、以下で表される。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k(u - Q) = 0 \quad (3)$$

またこれを整理することで、運動方程式はモード減衰比 (ζ) と固有振動数 (ω_0) によって以下のように表される。

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + \omega_0^2(u - Q) = 0 \quad (4)$$

一方、ばね自身の振動であるサージングにおいても、その振動は複数のモードからなり、同様に各モードをモード

質量 m とモードばね定数 k からなる一体振動系とみなすことができる。例えばエンジンの弁ばねに発生する1次のサージングは、弁とタペットをカムフォロアとみなすことで、円板カムにより根元が駆動される一体振動系と等価となる²⁾。今回は直接、円板カムと平端カムフォロアからなるエンジンの機構が生むサージングについては議論しないが、幾何学的な考察を進めることで、以下と同様な議論が可能となる。

5. ばね一質量振動系のシミュレーション

5.1 計算方法

以下では、カムによって駆動される無減衰 $(\zeta=0)$ の一体振動系の固有角周波数を $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 、固有周期を $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ と固定し、円端カムフォロアの進行速度 v により正弦1周期の移動時間 T を変化させることによって生じる振動の変化について、式(4)の微分方程式を数値計算により解くことにより、シミュレーションによる議論を行う。計算には科学技術計算ソフトウェアMathematicaの持つ数値積分コマンドであるNDSolveを用いることにより、Runge-Kutta-Gill法による数値計算をおこなった。

5.2 無減衰振動の加振周期依存性

5.2.1 カムフォロアの影響がない場合

円端カムフォロアの大きさが無視でき $(r/h \ll 1)$ 、尖端カムフォロアとして近似できる場合には、式(1)、(2)で示したように、中心点 F のピッチカーブ (P, Q) は、接触点 C のカムの軌道面 (p, q) と等価となることから、一体振動系の根元の変位であるピッチカーブは正弦変動となる (Fig. 4 (a))。円端カムフォロアの進行速度を変えることで、正弦カム1周期の移動時間 T を変化させた場合、 $t = 50T$ 後の一体振動系のモード質量の振幅は $T = \tau_0$ となる共振点で大きな振幅を示した (Fig. 5)。

Fig. 5 Relation between the ratio of natural period to translational period of cam and the amplitude of 1DOF oscillator without damping in case radius of cam follower, $r=0$.

一方、他の移動時間においては、振動は大きく成長せず、高調波振動は発生しなかった。これは正弦カムのハーモニクスが一つしか存在しないことに由来し、今回選定したカムの特殊さによる。

5.2.2 カムフォロアの影響がある場合

一方、有限の大きさの円端カムフォロアが、正弦カムの軌道面に接して移動した場合、前述したように、一体振動系の根元の変位であるピッチカーブは、円端カムフォロアの半径が大きくなるにつれ軌道面からずれることとなる (Fig. 4(b)).

正規半径が $r^*=0.4$ の円端カムフォロアが接する正弦カムにおいて、1周期の移動時間 T を変化させた場合の $t=50T$ 後の一体振動系の振幅をFig. 6に示す。特に今回の計算は、一体振動系に減衰を考慮しないことも手伝って、モード質量の振幅は $T=\tau_0$ となる共振点以外にも、 $T=\tau_0/2$ となる2次高調波共振の条件や、その他の高次の高調波においても、共振の発生が観測された。

一般に正弦関数でない任意の形状のカムが周期的な変位をする場合、高調波の共振である高次のハーモニクスを考慮するが、これはそのカム軌道面の関数とその整数倍の波数をもつ調和関数の和からなるフーリエ成分をもつことと同義である。今回はある意味従来の議論から大きく逸脱してはいないが、今回の場合のようにカムフォロアの影響により変化するピッチカーブが高調波振動をより誘発することは、従来のカム軌道面だけからは議論できないことに注意したい。

Fig. 6 Relation between the ratio of natural period to translational period of cam and the amplitude of 1DOF oscillator without damping in case radius of cam follower, $r=0.4h$.

5.3 減衰振動の加振周期依存性

一方、カムによって駆動される一体振動系が減衰能を持っていた場合、正弦カム1周期の移動時間 T を変化させることによって生じる振動は、円端カムフォロアの半径を変化させることで、どのように影響を受けるだろうか？

前述の5.2.2節の条件と同じく、正規半径が $r^*=0.4$ の円端カムフォロアが、正弦カムの軌道面に接して移動した場合において、これに接続された一体振動系が減衰を持っていた場合、正弦カム1周期の移動時間 T の大きさを変化させた際の $t=50T$ 後における振動体の振幅の変化をFig. 7に示す。Fig. 6との比較でもわかるように、減衰比が $\zeta=0.01$ の場合 (Fig. 7(a)), 各ピークの幅は若干広がり、ピーク高さも減少するものの、共振ピークと2次高調波ピークの高さの比はあまり変化しない。一方、減衰比が $\zeta=0.1$ の場合

(Fig. 7(b)), 各ピークの幅は大きく広がり、ピーク高さも大きく減少する。また共振ピーク以外の2次高調波ピーク等は僅かにしか現れない。ピークの幅が広がることで、特定振動数以外の周波数でも振動が加振される。一般に減衰のない振動子は存在しないことから、これはどのような回転をカムに与えても、固有振動は僅かながら誘発されることになる通常の経験を裏打ちする。

Fig. 7 Relation between the ratio of natural period to translational period of cam and the amplitude of 1DOF oscillator with damping: (a) $\zeta=0.01$, (b) $\zeta=0.1$.

5.4 振動の円端カムフォロアの径依存性

以下では、正弦カム1周期の移動時間を $T=\tau_0/2$ の2次の高調波に固定した場合において、円端カムフォロアの半径を変化させることによって生じる振動の変化についてシミュレーションによる議論を行う。これは高調波共振の一例を取り上げたものであり、他の高調波共振条件でも同様な結果となる。

Fig. 8に示すように、半径が無視できる場合において最初0であった2次高調波は、円端カムフォロアの半径の増加とともに加振振幅が急激に大きくなる。一方、円端カムフォロアの半径 r が正弦カムの最大振幅 h の1.6倍となると、振動はピークを迎えた後、しだいに減少する様子がわかる。前者の増加は、Fig. 4に示される通り、円端カムフォロアが大きくなるにつれて、カム軌道面の凹部極小点でのピッチカーブの傾きの変化が急激になり、傾きが不連続となることに対応している。この現象がどう振動の増加と関係しているかについては、また別の機会にその理由を述べたい。

Fig. 8 Relation between the ratio of radius of cam follower to the height of cam and the amplitude of 2nd harmonics in 1DOF oscillator without damping.

一方、後者の振幅の減少は、円端カムフォロアがカム軌道面の凹部近傍で接点が2点となり、軌道面の極小領域まで接触できなくなったために、ピッチカーブ自体の振幅が小さくなったことに起因する。こうした二つのメカニズムが働くことで、Fig. 8に示した変化を示すことがわかる。もっとも実際のカム機構の場合、円端カムフォロアの半径は、カムの最大変位のせいぜい数割以下であることから、生じる高調波は2次を中心とした僅かなものが現れるだけとなり、カムフォロアの半径が増加するにしたがって、一体振動系の振幅は増加する傾向のみが見られることとなる。

溝カムの場合、カムフォロアと軌道面との曲率の違いからピッチカーブがカムの軌道面に追従できなくなる現象は、軌道面の凸面で生じ切下げとして議論されてきたが、今回のように外部拘束カムの場合、むしろ軌道面の凹面で生じることがわかる。

以上の考察から、正弦カムの場合、カム軌道面の曲率が円端カムフォロアの半径に近づくことで急激な高調波振動が発生することが確認された。一般にカムの軌道面が最初から凹面で設計されていることは少ないことから、今回のような変化はカムが摩耗し、凹面の曲率が円端カムフォロアの半径に近づくことで発生する可能性がある。特に個々のカム曲線やカム機構については、こうした事例の発生の可能性を考察する必要がある。

ばねの産業的側面を考えた場合、エンジンにおける弁ばねのサージング防止はエンジンの性能や効率を向上させるためにも重要な課題である。本論文では、直接エンジンのカム機構が生むサージングについては議論しなかったが、今回の結果はエンジンのカムによるサージングを議論する場合にも、カム軌道面のハーモニクスのみを考察するだけでは議論が足りないことを示唆する。

6. 結 言

カム機構に接続されたばね-質量一体振動系に発生する振動において、直動従節直進する正弦カムに接して変位する円端カムフォロアの中心点の軌道であるピッチカーブについて、円端カムフォロアの半径の影響を議論するため、シミュレーションをおこなった。その結果、以下のことが明らかとなった。

- (1) 円端カムフォロアの半径 r が正弦カムの最大振幅 h に比べて十分に小さく($r \ll h$)、点接触として近似できる場合には、正弦カム1周期の移動時間 T が一体振動系の固有周期 τ_0 と同じになる共振のみが発現する。
- (2) 円端カムフォロアの半径が正弦カムの最大振幅に対して無視できない場合には、一体振動系は共振のみならず、2次を中心とした高調波振動も発現する。
- (3) 円端カムフォロアの半径が大きくなるにつれ、高調波振動がより大きく成長し、 $r = 1.6h$ の関係を満たすところでピークを示す。
- (4) 正弦カムにおいて、円端カムフォロアによって生じるピッチカーブの正弦関数からのずれは、高調波振動を発生させる要因となることから、カムの軌道面ではなく、カムフォロアの半径の影響を加味したピッチカーブのハーモニクスを議論する必要がある。

参考文献

- 1) Andresen, U. and Singhose, W., ASME Journal of Mechanical Design, 126, (2004) 1105.
- 2) 小竹茂夫, 川北雄一郎, 日本自動車技術会第24回内燃機関シンポジウム講演概要集, (2013), 94.
- 3) 秋葉機四郎, 日本機械学会論文集 (B編), 65-631, (1999), 1076.