閉塞空間内における細線ばね材料の大変形挙動解析 * (医療用ガイドワイヤーへの応用の試み)

大槻敦巳 **, 奥田将大 ***

Analysis of Large Deformations of Thin Elastic Spring Materials in a Rigid Channel (Attempt of Application to Medical Guide Wire)

Atsumi OHTSUKI and Masahiro OKUDA

In recent years, large deformation analyses of flexible spring materials have attracted attention considerably. However, there is not sufficient analysis for practical problems such as large deformation of a cable within a channel (or a pipe), or of a drill inserted in a drilling hole in rock engineering and petroleum production, or of a medical guide wire (catheter) within a blood vessel, and so on. When a thin flexible beam material is pushed through the narrow space, the beam may buckle since the leading edge of the material strikes an obstacle (or a barrier) and cannot proceed any more. The large deformation behavior will be of great concern in handling these flexible materials.

This paper deals with large deformations of a flexible elastic beam contained within a rigid channel with friction under the action of axial compressive forces at each end. Three different deformation stages in a channel are prescribed for our analysis. Using the nonlinear deformation theory, nondimensionalized analytical solutions are derived in terms of elliptic integrals. In this study, several experiments were presented and the experimental results were compared with the theoretical formulas.

As a result, the relation between the applied axial force and the pushed-in beam length is similar to that of predicted calculation by the analytical theory. Furthermore, it is made clear that the existence of friction between the beam and the wall causes a nonuniform large deformation. Incidentally, the analysis presented in this paper would be applied to the medical guide wire (catheter) and the design of machinery for handling flexible elastic materials such as sheets, tapes, films, papers, cloths and so on. In addition, designers of machines for drill, tubing strings, and sewing machines should find the results useful and easy to apply.

Key Words: Large deformation, Postbuckling deformation, Nonlinear problem, Flexible material, Rigid channel.

1. 緒 言

可撓性ばね材料が広く工業界で使用されているが、それに伴い色々な問題が発生している。すなわち、そうしたばね材料が圧縮荷重により座屈し、予想外の大たわみ変形が生じるのである。この座屈後の大たわみ変形には利害が伴うので注意が必要である。こういった大変形問題に関して、自由空間内における弾性はりの座屈後大たわみ変形については既に解析され¹⁾、変形挙動がかなり判明している。しかし一方、変形が周囲から拘束された場合の弾性大たわみ変形については未だ十分に明らかになっていない。チャンネル内のケーブルなど的大変形、各種パイプ内の敷設配線ケーブルなど的大変形、下水配管の掃除用フレキシブルロッド、ホースなど的大変形は実際によく目にする厄介な

問題である。さらに、近年では医療用デバイスである血管内のガイドワイヤー(カテーテル)など的大変形がよく見られる例であり、これが医療事故(ガイドワイヤーのキンキング、血管の突き破り)による患者の死亡などの誘因となっている場合がある。その他にもこうした外的拘束材料の大変形問題は、材料を押しつつ狭い隙間を通過させるシートやフィルム、ペーパー、織布などのジャミングなどの問題、また、鉱業、石油産業のストリングホールにおけるドリルの変形などにも大いに関係しており、工業的にも解明すべき重要課題であると思われる。そこで本論文は、そういった大変形問題の解明を念頭に置いて、例としてチャンネル内の細線ばね材料など、いわゆる可撓性はりに圧縮荷重が作用した場合の大たわみ変形挙動を非線形解析したもので、

原稿受付日 2016年12月7日

* 日本ばね学会2016年度秋季講演会

** 名城大学大学院 Meijo University Graduate School

*** 名城大学大学院 Meijo University Graduate School Student

だ円積分を用いた理論解を得た。解析に際してはチャネル壁とばね材料間の摩擦を考慮し、その影響も検討した。

なお、本解析においては理論の適用範囲を弾性領域とし、Euler-Bernoulliの仮定が成り立つものと考え、はり是不伸長であり、せん断力の影響、ポアソン効果などは考慮しないこととする。

ところで、こうした拘束、接触大たわみ変形問題に関しては解析がほとんどなく²⁾、緩やかで不完全な拘束変形についてSoong³⁾やVaillette & Adams⁴⁾、Benson^{5),6)}らによる解析例が散見される程度である。なお、本解析は非線形理論(エラスチカ理論)^{7)~9)}に基づき行った。

2. 大たわみ変形の解析

2.1 基礎理論

Fig.1に示すように、一端Aを固定支持(ローラー)、他端Dを単純支持した真直はり(全長 l 、支点AD間距離 L)に圧縮荷重 F を負荷した場合を解析する。点Aを座標原点とし、水平方向に距離 x 、鉛直方向にたわみ y 、たわみ角に θ 、曲率に $1/R$ 、たわみ曲線の円弧長さに s をとり、さらにチャネル壁に面接触した部分の長さを d 、チャネル壁の隙間を h とする。また、曲げモーメントを M 、はり要素のヤング率を E 、断面二次モーメントを I とすれば、 M 、 R 、 x 、 y 、 θ の各量間には次の関係式(1)が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{ds} \\ dx &= ds \cdot \cos \theta, dy = ds \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

圧縮荷重が作用した場合のはりの任意点 $N(x, y)$ に作用する曲げモーメント M は

$$M = (F \cos \alpha)y - (F \sin \alpha)x - M_A \dots\dots\dots (2)$$

となる。

ここで、次のような無次元変数を定義すると、

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{s}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \gamma = \frac{FL^2}{EI} \\ \gamma^* &= \frac{F^*L^2}{EI}, D = \frac{d}{L}, \nu = \frac{QL^2}{EI} \\ y_0 &= \frac{y_C}{L}, h_0 = \frac{h}{L}, l_0 = \frac{l}{L} \\ M_0 &= \frac{M_C L}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Fig. 1 Schematic configuration of buckled beam between two rigid walls (Stage I, II, III).

大たわみ変形の基礎式は、式(1)、(2)より、次式(4)が得られる。

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\gamma \{ \cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta_B - \alpha) \}} \dots\dots\dots (4)$$

なお、式(4)の正負符号($\pm$)は無次元円弧長さ ζ に対するたわみ角 θ の増減特性、すなわち図中の変曲点Bで変化する。ここで、式(4)において

$$\left. \begin{aligned} k &= \sin\left(\frac{\theta_B - \alpha}{2}\right) \\ k \sin \phi &= \sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

とおき、角度変数変換を行うと

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm 2k\sqrt{\gamma} \cos \phi \dots\dots\dots (6)$$

となる。

また、各微小量 $d\theta$ 、 $d\zeta$ 、 $d\xi$ 、 $d\eta$ は

$$d\theta = \mp \frac{2k \cos \phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \dots\dots\dots (7)$$

$$d\zeta = \mp \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi \dots\dots\dots (8)$$

$$d\xi = \mp \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\begin{aligned} &-2k \sin \alpha \sin \phi \\ &+ 2 \cos \alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \\ &\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \right) d\phi \dots\dots\dots (9)$$

$$d\eta = \mp \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\begin{aligned} &2k \cos \alpha \sin \phi \\ &+ 2 \sin \alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \\ &\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \end{aligned} \right) d\phi \dots\dots\dots (10)$$

で表される。

以上より、各区間に対する変形諸量を求めることができる。因みに、式(8)、式(9)、式(10)の右辺符号は区間AB(点Bは変曲点)では無次元円弧長さ ζ が増加するにつれて角度 ϕ が増加するので正(+)符号、区間BCでは無次元円弧長さ ζ が増加するにつれて角度 ϕ が減少するので負(-)符号を採用する。各変形区間の任意点 $N(x, y)$ における計算式は以下の通りである。

【区間AB($\theta_A \leq \theta \leq \theta_B$)】

・無次元円弧長さ ζ ：

$$\zeta = \int_{\theta_A}^{\theta} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \{ F(k, \phi) - F(k, \phi_A) \} \dots\dots\dots (11)$$

・無次元水平距離 ξ :

$$\xi = \int_{\phi_A}^{\phi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[\{ \Phi(k, \phi) - \Phi(k, \phi_A) \} \cos \alpha \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

・無次元たわみ η :

$$\eta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[\{ \Phi(k, \phi) - \Phi(k, \phi_A) \} \sin \alpha \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

【区間BC ($\theta_C \leq \theta \leq \theta_B$)】

・無次元円弧長さ ζ :

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_{\phi_A}^{\phi_B} d\zeta + \int_{\phi_B}^{\phi} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \{ 2F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A) - F(k, \phi) \} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

・無次元水平距離 ξ :

$$\begin{aligned} \xi &= \int_{\phi_A}^{\phi_B} d\xi + \int_{\phi_B}^{\phi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} &\{ 2\Phi(k, \phi_B) - \Phi(k, \phi_A) - \Phi(k, \phi) \} \\ &\times \cos \alpha + 2k \sin \alpha \cdot (2 \cos \phi_B \\ &- \cos \phi_A - \cos \phi) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots (15) \end{aligned}$$

・無次元たわみ η :

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{\phi_A}^{\phi_B} d\eta + \int_{\phi_B}^{\phi} d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} &\{ 2\Phi(k, \phi_B) - \Phi(k, \phi_A) - \Phi(k, \phi) \} \\ &\times \sin \alpha - 2k \cos \alpha \cdot (2 \cos \phi_B \\ &- \cos \phi_A - \cos \phi) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

したがって、支点Aから接触点Cまでの無次元円弧長さ ζ_{AC} 、無次元水平距離 ξ_{AC} 、無次元たわみ η_{AC} などは、最終的に

$$\zeta_{AC} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left\{ F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \phi_C) \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\xi_{AC} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} &\left\{ \Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k, \phi_C) \right\} \\ &\times \cos \alpha - 2k \sin \alpha \cos \phi_C \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\eta_{AC} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} &\left\{ \Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k, \phi_C) \right\} \\ &\times \sin \alpha + 2k \cos \alpha \cdot \cos \phi_C \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

(ここで、 $\Phi(k, \phi) = 2E(k, \phi) - F(k, \phi)$)

で表される。

なお、関数 $F(k, \phi)$ 、 $E(k, \phi)$ はそれぞれ Legendre-Jacobi のだ円積分第一種、第二種である。特に、 $\phi = \pi/2$ のときは完全だ円積分第一種、第二種と称する。

同様に、新たに点Dを基準として解析すれば、区間CDの任意点N(x, y)に作用する曲げモーメントおよびたわみの基礎式は、式(2)、(4)に対応して

$$M = (F^* \cos \alpha^*)y - (F^* \sin \alpha^*)x - M_B \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\gamma^* \{ \cos(\theta - \alpha^*) - \cos(\theta_D - \alpha^*) \}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。

ところで、式(18)の解析に際し、

$$\left. \begin{aligned} k^* &= \sin\left(\frac{\theta_D - \alpha^*}{2}\right) \\ k^* \sin \phi &= \sin\left(\frac{\theta - \alpha^*}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

とおき、たわみ角 θ について変数変換すると

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm 2k^* \sqrt{\gamma^*} \cos \phi \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。

式(23)の右辺符号について、区間CD(この区間は変曲点無し)においては無次元円弧長さ ζ が増加するにつれて角度 ϕ が減少することから負(-)符号を採用すれば、最終的に、変形区間CDの任意点N(x, y)における各量の計算式は、それぞれ次のように表される。

【区間CD ($\theta_C \leq \theta \leq \theta_D$)】

・無次元円弧長さ ζ :

$$\zeta = \int_{\phi_D}^{\phi} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \{ F(k^*, \phi_D) - F(k^*, \phi) \} \quad \dots\dots\dots (24)$$

・無次元水平距離 ξ :

$$\xi = \int_{\phi_D}^{\phi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left[\begin{aligned} &\{ \Phi(k^*, \phi_D) - \Phi(k^*, \phi) \} \cos \alpha^* \\ &+ 2k^* \sin \alpha^* \cdot (\cos \phi_D - \cos \phi) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

・無次元たわみ η :

$$\eta = \int_{\phi_D}^{\phi} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left[\begin{aligned} &\{ \Phi(k^*, \phi_D) - \Phi(k^*, \phi) \} \sin \alpha^* \\ &- 2k^* \cos \alpha^* \cdot (\cos \phi_D - \cos \phi) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

したがって、接触点Cから支点Dまでの無次元円弧長さ ζ_{CD} 、無次元水平距離 ξ_{CD} 、無次元たわみ η_{CD} などは、最終的に次式(27)、(28)、(29)で表される。

$$\zeta_{CD} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left\{ F\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) - F(k^*, \phi_C^*) \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

Fig. 2 Schematic deformation (Stage I).

$$\xi_{CD} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left[\left\{ \Phi\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k^*, \phi_C^*) \right\} \cos \alpha^* \right. \\ \left. - 2k^* \sin \alpha^* \cdot \cos \phi_C^* \right] \quad \dots\dots (28)$$

$$\eta_{CD} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left[\left\{ \Phi\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k^*, \phi_C^*) \right\} \sin \alpha^* \right. \\ \left. + 2k^* \cos \alpha^* \cdot \cos \phi_C^* \right] \quad \dots\dots (29)$$

ところで、大変形解析に際して考慮すべきことは、チャネル壁に挟まれたはりの圧縮変形のプロセスとして3種類の状況が想定されることである。すなわち

(1) はりの垂直たわみが最大となる点Cが未だチャネル壁に接触せず、はりが自由に変形する非接触変形状態(Stage I)。

(2) 次に、点Cではりがチャネル壁に接触し、曲率を有する接触変形状態(Stage II)。

(3) その後、一層接触変形が進行し点Cが曲率を有せず接触部位が平坦化する接触変形状態(Stage III)。

そこで、以上の基礎理論を基に、各変形状態(各Stage)に対して解析を進めることとする。

2.2 Stage I の大たわみ変形

Fig.2に示すStage Iにおいては、変形するはりの点Cとチャネル壁(ここでは、下部分)は非接触状態であり、このときの力の釣り合いは、壁面からの力は無いので

$$\left. \begin{aligned} \gamma \cos \alpha &= \gamma^* \cos \alpha^* \\ \gamma \sin \alpha &= -\gamma^* \sin \alpha^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (30)$$

となる。

したがって、式(5)、式(20)、式(30)より

$$\gamma = \gamma^*, \alpha = -\alpha^*, k = k^*, \phi_A = -\phi_C \quad \dots\dots (31)$$

また、無次元水平距離 ξ に関する境界条件 $\xi_{AC} + \xi_{CD} = 1$ を考慮すれば、

$$\sqrt{\gamma} = \left[\begin{aligned} & \left\{ 2\Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - 2\Phi(k, \phi_C) + \right. \\ & \left. \Phi\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k^*, \phi_C^*) \right\} \cos \alpha \\ & \left. - 2\sin \alpha (2k \cos \phi_C + k^* \cos \phi_C^*) \right] \quad \dots\dots (32) \end{aligned}$$

となる。

さらに、無次元円弧長さ ζ の境界条件 $\zeta_{AC} + \zeta_{CD} = l_0$ より

Fig. 3 Schematic deformation (Stage II).

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{ \begin{aligned} & 2F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - 2F(k, \phi_C) \\ & + F\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) - F(k^*, \phi_C^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (33)$$

である。

また、無次元たわみ η の境界条件 $\eta_{AC} + h_0/2 = \eta_{CD}$ より、チャネル壁間の無次元たわみ $h_0 (=h/L)$ は

$$h_0 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} & \left\{ \Phi(k^*, \phi_C^*) - \Phi\left(k^*, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \sin \alpha \\ & \left\{ -2\Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + 2\Phi(k, \phi_C) \right\} \sin \alpha \\ & - 2\cos \alpha (2k \cos \phi_C - k^* \cos \phi_C^*) \end{aligned} \right] \quad \dots\dots (34)$$

となる。

一方、点Cの無次元たわみ y_0 (点Cにおける η の値)は

$$y_0 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left[\begin{aligned} & \left\{ \Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k, \phi_C) \right\} \sin \alpha \\ & + 2k \cos \alpha \cos \phi_C \end{aligned} \right] \quad \dots\dots (35)$$

で表される。

なお、Stage Iの変形状態においては、この無次元たわみ y_0 (実たわみ y_C)はチャネル壁間の無次元隙間 h_0 (実隙間 h)より大きくなることはない。

2.3 Stage II の大たわみ変形

Fig.3に示すStage IIでは、変形はりの点Cがチャネル壁に接触しつつ曲率を有している場合である。チャネル壁面からの反力(Q)を考慮すれば、力の釣り合いは

$$\left. \begin{aligned} \gamma \cos \alpha &= \gamma^* \cos \alpha^* + \mu \nu \\ \nu &= \gamma \sin \alpha + \gamma^* \sin \alpha^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (36)$$

となる。

また、式(36)より、次の関係を定義する。

$$\gamma^* = \gamma \left(\frac{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}{\cos \alpha^* + \mu \sin \alpha^*} \right) = \gamma \delta \quad \dots\dots (37)$$

無次元たわみ η に関する境界条件 $\eta_{AC} = \eta_{CD} = h_0$ より

$$\sqrt{\gamma} = \left(\frac{4}{h_0} \right) \left[\begin{aligned} & \left\{ \Phi\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Phi(k, \phi_C) \right\} \\ & \times \sin \alpha + 2k \cos \alpha \cdot \cos \phi_C \end{aligned} \right] \quad \dots\dots (38)$$

Fig. 4 Schematic deformation (Stage III).

$$\sqrt{\gamma^*} = \left(\frac{1}{h_0} \right) \left[\left\{ \Phi \left(k^*, \frac{\pi}{2} \right) - \Phi(k^*, \phi_C^*) \right\} \times \sin \alpha^* + 2k^* \cos \alpha^* \cdot \cos \phi_C^* \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

が得られ、無次元水平距離 ξ の境界条件、 $\xi_{AC} + \xi_{CD} = 1$ より

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \left[\left\{ \Phi \left(k, \frac{\pi}{2} \right) - \Phi(k, \phi_A) \right\} \cos \alpha \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \left[\left\{ \Phi \left(k^*, \frac{\pi}{2} \right) - \Phi(k^*, \phi_C^*) \right\} \cos \alpha^* \right. \\ & \left. - 2k^* \sin \alpha^* \cdot \cos \phi_C^* \right] = 1 \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

が得られる。

全無次元円弧長さ ζ に関する境界条件 $\zeta_{AC} + \zeta_{CD} = l_0$ より

$$\begin{aligned} l_0 = & \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \right) \left\{ F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) - F(k, \phi_A) \right\} \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma^*}} \right) \left\{ F \left(k^*, \frac{\pi}{2} \right) - F(k^*, \phi_C^*) \right\} \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

が得られる。

また、区間ACと区間CDに関する無次元曲げモーメント $M_0 [=McL/(EI)]$ が点Cにおいて釣り合うことから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \gamma \eta_{AC} \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma \xi_{AC} \sin \alpha \\ & = \gamma^* \eta_{CD} \cos \alpha^* - \gamma^* \xi_{CD} \sin \alpha^* \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

が成り立ち、式(28)、(29)、(32)、(33)より

$$k \cos \phi_C = \sqrt{\delta} k^* \cos \phi_C^* \quad \dots\dots\dots (43)$$

となる。

したがって、式(37)、(40)、(41)、(43)より a 、 θ_B 、 a^* 、 θ_D などの各値を算出することができる。

なお、Stage IIにおいては、点Cでの曲げモーメントが常に正、すなわち $M_0 = (1/2)Fh_0 \cdot \cos a - (1/2)F\xi_{AC} \cdot \sin a > 0$ より、次の関係が成り立つ。

$$h_0 > \xi_{AC} \tan \alpha \quad \dots\dots\dots (44)$$

2.4 Stage IIIの大たわみ変形

Fig.4に示すStage IIIにおいては、大変形したはりがチャネル壁に接触しつつ、その接触部位が平坦化する場合である。このときは、前述の2.2節で示した無次元水平距離 ξ についての境界条件($\xi_{AC} + \xi_{CD} = 1$)や無次元円弧長さ ζ の境界条件($\zeta_{AC} + \zeta_{CD} = l_0$)を適用することができず、別の条件が必要である。接触平坦部の無次元距離をDとすると、新たな条件として次式(45)、(46)に示す関係が成り立つ。

$$\xi_{AC} + \xi_{CD} + D = 1 \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\zeta_{AC} + \zeta_{CD} + D = l_0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここで、点Cにおいて曲げモーメントが0であることを考慮すると、式(6)、(23)より

$$\phi_A = \phi_C = -\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (47)$$

また、式(5)、(22)より

$$\theta_B = 2\alpha, \theta_D = 2\alpha^* \quad \dots\dots\dots (48)$$

さらに、無次元たわみ η に関する境界条件 $\eta_{AC} = \eta_{CD} = h_0$ より

$$\sqrt{\gamma} = \left(\frac{8}{h_0} \right) \left\{ \Phi \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \alpha \right\} \quad \dots\dots\dots (49)$$

Fig. 5 Experimental set-up.

$$\sqrt{\gamma^*} = \left(\frac{2}{h_0} \right) \left\{ \Phi \left(k^*, \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \alpha^* \right\} \dots\dots\dots (50)$$

となる。

ところで、式(45)、式(46)より、以下の関係が得られる。

$$l_0 = \zeta_{AC} + \zeta_{CD} + 1 - (\zeta_{AC} + \zeta_{CD}) \dots\dots\dots (51)$$

そこで、式(51)に式(17)、(18)、(27)、(28)の関係を代入すると、最終的に

$$l_0 = h_0 \left[\frac{2F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot F \left(k, \frac{\pi}{2} \right)}{4\Phi \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \alpha} - \left(\frac{1}{2} \cot \alpha + \cot \alpha^* \right) \right] + 1 \dots\dots\dots (52)$$

となる。

3. 理論計算および実験例

チャンネル内の弾性はりの大たわみ変形について導出した大変形理論の適応性を確認するため、アクリル(PMMA)板をチャンネル壁とし、変形はりとして高分子(PVC)の薄板(長さ450mm、幅10.3mm、厚さ0.31mm、縦弾性係数3.40 GPa)を使用し、適宜チャンネル壁間の隙間量(すなわち、高さ)を変化させた軸圧縮大たわみ変形実験を行った。はり固定条件を満たしつつはり移動が容易となるよう、一端をローラー支持、他端を単純支持として、一定の支点間距離 $L=240\text{mm}$ に保持される。軸圧縮荷重は、ローラー支持端ではりの押し込みによって負荷される。実験装置の概略をFig.5に示す。装置は基本的に長尺レールおよびスライドユニット(THK製リニアベアリング)から構成される小型直動転がり案内を利用したもので、滑車を介してローラーではりを押し込み、圧縮荷重を負荷する。なお、LMブロックを固定することによって支点間距離を一定に保持した。

実験に際しては、所定の圧縮荷重 $F \cos \alpha$ に対して、変形後のはりの円弧長さ s およびたわみ y 、さらにStageⅢの変形状態において生じる接触平坦部長さ d などを実験装置底面に貼付した方眼紙スケール(1mm方眼)により測定した。

Fig.6は、チャンネル壁の無次元高さ $h_0=0.2$ ($h=48\text{mm}$)の場合について、チャンネル壁とはり間の摩擦係数 $\mu=0.0, 0.2, 0.4$ とした場合の各摩擦係数値に対するはりの無次元荷重 γ と無次元はり長さ l_0 の関係について変化傾向を例示したもので、無次元座屈荷重 γ_c (:10.78)に至るまでは、水平荷重が作用してもはりは真直のまま($l_0=1$ の状態)であり、 γ が γ_c に至るとはりが座屈し、突然StageⅠの大きなたわみ変形が現れることがわかる。すなわち、 γ が γ_c に到達後はりの円弧長さが大きく増加するのである。無次元高さ $h_0=0.2$ の場合は、無次元たわみ y_0 が無次元高さ $h_0=0.2$ に

Fig. 6 Relationship of nondimensional compressive force γ to nondimensional beam length l_0 ($h_0=0.2$).

Fig. 7 Relationship of nondimensional contact length D to nondimensional beam length l_0 ($h_0=0.2$).

到達までStageⅠの変形状態であり、無次元円弧長さ $l_0=1.066$ になればはりがチャンネル壁に接触するStageⅡの変形状態に移る。StageⅡにおいては、チャンネル壁から垂直力(いわゆる壁からの反力)が作用するため無次元円弧長さがさらに増加するには無次元荷重 γ が急激に上昇することを示しており、この傾向は摩擦係数 μ が大きいほど顕著である。なお、本図を基に、チャンネル壁に接触し始める無次元円弧長さ $l_0=1.066$ 以降も負荷し続けた場合を医療デバイスのガイドワイヤーの例に擬えていえば、血管壁の剛性が高いとキンキングが生じ、血管壁の剛性が極めて低いと血管の突き破りによる大出血が発生することなどの要因説明が可能と思われる。ところで、接触点(Fig.3、点C)の曲げモーメントが変形の進行に伴い徐々に減少し、0になると接触部が平坦化するStageⅢの変形状態に移行する。StageⅡからStageⅢへと変形状態が変わるときの無次元円

弧長さは $l_0=1.107$ である。また、StageⅢの変形状態において、無次元荷重 γ が最大に達したのち減少するのは接触部位が全体的にはり先端部の方に移動するためである。さらに、StageⅢの変形が出現する場合は、条件に応じてStageⅢの後再びStageⅡの変形が生じることがあることがわかる。

Fig.7は、チャンネル壁の無次元高さ $h_0=0.2$ の場合について、StageⅢの変形状態における平坦部の無次元距離 D と無次元はり長さ l_0 の関係を表したもので、 l_0 が増すにつれて無次元距離 D が徐々に上昇し、最大に達したのち減少する傾向を示しており、条件によっては再び無次元距離 D が0となるStageⅡが出現すると推測される。Fig.6によると、こうしてStageⅢからStageⅡへと変形状態が変わるときには無次元荷重 γ も減少するのがわかる。また、本図より摩擦係数 μ が大きいほど無次元距離 D が増すのは、すなわちはりがチャンネル壁に接触し易く、離れ難いということである。

Fig.8は、特に、摩擦係数 $\mu=0.0, 0.4$ における変形状態(無次元高さ $h_0=0.2$ の場合)を例示したもので、壁間内のはりの大たわみ変形のプロセスや様相がよくわかる。なお、変形状態を示す記号(a)～(e)および(A)～(E)はFig.6, Fig.7の図中に示した同記号に対応している。

Fig.9は、チャンネル内の大たわみ変形の実験例を示したもので、実験には壁としてアクリル(PMMA)板、また変形はりとして高分子(PVC)薄板を用いた。両材料間の摩擦係数は $\mu=0.4$ で、チャンネル壁間の無次元高さ $h_0=0.2$ の場合について実験を行った。本例では、無次元荷重 γ の代わりに水平方向に実際に負荷した軸圧縮荷重に対する無次元水平荷重 γ_h を採用し、この無次元水平荷重 γ_h (： $\gamma/\cos\alpha$)と無次元はり長さ l_0 の関係を図示した。本図より推察できるように実験値と理論値の一致性は良好であり、本解析理論はチャンネル内に生ずる大たわみ変形挙動を知るためにはかなり有効な理論であるといえる。

Fig.10は、同様の実験条件(摩擦係数 $\mu=0.4$ 、無次元高さ $h_0=0.2$)における壁面接触変形のStageⅢの場合について、平坦部の無次元距離 D と無次元はり長さ l_0 の関係を表したものである。本図においても実験値と理論値はよい一致を示しており、本解析理論はチャンネル内における大たわみ変形の推定に対してかなりの適用性があるといえる。

Fig.11は、チャンネル壁間の隙間(いわゆる、高さ)の相違によってはりの変形様態に違いが生ずることを示したものである。ここでは無次元高さ $h_0=0.4$ の場合について、無次元荷重 γ と無次元はり長さ l_0 の関係を各摩擦係数 $\mu=0.0, 0.2, 0.4$ に対して図示した。図中記号(a)～(c)および(A)～(C)については後述のFig.12における同記号に対応している。

本図より明らかなように、Fig.6に示した無次元高さ $h_0=0.2$ の場合のはりの変形様相とはかなり異なることがわかる。すなわち、無次元高さ $h_0=0.4$ において現れる大たわ

Fig. 8 Several examples of large deformation ($h_0=0.2$).

Fig. 9 Relationship between l_0 and γ_h ($h_0=0.2$).

み変形はStage I と Stage II のみの変形であってStageⅢの変形は決して出現しないことがわかる。以上、わかり易い例として無次元高さ $h_0=0.4$ の場合のみを論述したが、子細な理論計算の結果、実際にはチャンネル壁間の無次元高さ

Fig. 10 Relationship between l_0 and D ($h_0=0.2$). Fig. 12 Several examples of large deformation ($h_0=0.4$). Fig. 11 Relationship between γ and l_0 ($h_0=0.4$). Fig. 13 Relationship between γ_h and l_0 ($h_0=0.4$).

$h_0=0.4$ 以下の場合でもStageⅢの変形が生じないことがあり得ることが判明している。要するに、StageⅢの変形が出現しなくなるのは無次元高さが $h_0=0.29$ 以上の場合であり、しかも通常は無次元高さ h_0 が大きいほど変形に対する摩擦係数 μ の影響は小さくなるが、無次元高さが $h_0=0.29$ 以上になる場合には摩擦係数 μ の大小に関わりなくStageⅢの変形が生じないのである。

Fig.12は、特に、チャネル壁間の隙間の影響について、無次元高さ $h_0=0.4$ の場合(摩擦係数 $\mu=0.0, 0.4$)の変形状態のプロセスを図示したものであるが、無次元高さ $h_0=0.2$ の(Fig.8)に比べ、この条件ではStageⅢの変形が現れないことがわかる。

Fig.13は、無次元水平荷重 γ_c ($:\gamma/\cos\alpha$)と無次元はり長さ l_0 の関係(無次元高さ $h_0=0.4$ 、摩擦係数 $\mu=0.4$ の場合)を

図示したもので、Fig.9(無次元高さ $h_0=0.2$ の場合)における傾向とはかなり異なっていることがわかる。Fig.12に関して既に論じたように、この場合、StageⅢの変形が現れないのである。なお、この例においてもFig.9と同様な実験を行ったが、実験値と理論値はかなりよい一致を示していることがわかる。

4. むすび

限られた閉塞空間内に閉じ込められた柔軟弾性はりが圧縮荷重を受ける場合の大たわみ変形挙動を知ることは工業的にも、学術的にも重要な課題であると考え、その解決の一助として、本論文は、チャネル壁に挟まれた柔軟弾性はりの圧縮大たわみ変形挙動について、はりと壁面間の摩擦を考慮して非線形解析し、はり円弧長さ s や無次元水平距

離 ξ , 無次元たわみ η , 無次元水平荷重 γ_h , 無次元垂直荷重 γ_v などに対してだ円積分を用いた理論解を得たもので, 閉塞空間内における弾性はりの大たわみ変形について非線形解析した先駆的な研究である. さらに, 本解析理論を用いてはりの大たわみ変形状態を理論的に計算するとともに, 代表的な変形様態についてわかり易い図表を提示し視覚化した. また, 解析理論の適用性を確認するためアクリル(PMMA)板をチャンネル壁とし, 弾性はりとして高分子(PVC)の薄板を用いたチャンネル内の大たわみ変形実験を行い, はりの大たわみ変形挙動の様相を実験的にも明らかにした. 以上の理論的, 実験的解析の結果, チャンネル内の弾性はりの大たわみ変形特性として次の諸点が明らかになった.

- (1) はりには, 可能性として3種類の大たわみ変形状態, すなわちStage I (接触無し変形), Stage II (接触有限曲率有り変形), Stage III (接触平坦部有り変形)の変形状態が起こり得る.
- (2) 変形は通常このStageの順に進展するが, 条件によってはStage IIIの後に再びStage IIが出現することがある.
- (3) 一般に, 摩擦係数値が高いほど, はりを変形させるためには大きな圧縮荷重を必要とし, それに伴い押し込むはりの長さが増加する.
- (4) Stage IIIの接触大たわみ変形が出現する場合は, 摩擦の影響によって様相の異なる変形状態が現れる. すなわち, 摩擦係数が高いほど接触平坦部の距離が増加する.
- (5) 接触大たわみ変形が生じない変形の場合においては, 摩擦係数の影響は極めて小さく, すなわち大たわみ変形状態の進行に摩擦の有無がほとんど影響しない.
- (6) チャンネル壁間の隙間(高さ)は弾性はりの大たわみ変形に大きく影響する. すなわち無次元高さが $h_0=0.29$ 以下の場合にはStage IIIの変形が出現するが, これより大きい無次元高さのときにはStage IIIの変形は出現しない.
- (7) なお, 本解析は2次元変形に限られるものの, 拘束壁

が剛体と見做し得るチャンネルや各種パイプ, 下水配管, 石油産業のストリングホールなどの内部において頻繁に生じるフレキシブルロッド, ケーブル, ホース, ドリルなどの大変形(Stage I : 接触無し変形, Stage II : 接触有限曲率有り変形, Stage III : 接触平坦部有り変形)の様態の推定にかなり有効と思われる.

- (8) さらに, 医療現場で死亡事故などの誘因となる血管内ガイドワイヤー(カテーテル)の大変形挙動の様子がかなりよく類推できるとと思われる(ただし, 血管壁を簡易的に剛体と見做すことができる場合はキンキング, 剛性が極めて低い血管壁の場合は血管の突き破り, といった現象が発生する).

参考文献

- 1) 大槻敦巳, 大島成通, 名城大学理工研究報告, 第36号, (1998), 48-56.
- 2) 大槻敦巳, 早川 徹, ばね論文集, 第59号, (2014), 29-36.
- 3) Soong, T. C., Proc. 15th Ann. Meet. Soc. Engng. Sci., (1978), 267-272.
- 4) Vaillette, D. P. and Adams. G. G., J. Appl. Mech., Vol.50, No.3, (1983), 693-694.
- 5) Benson. R. C., Appl. Mech., Vol.48, No.4, (1981), 895-899.
- 6) Benson. R. C., Appl. Mech., Vol.49, No.1, (1982), 231-232.
- 7) Love. A. E. H., "A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity", 4th ed., Chapter 19, (1944), Dover., New York.
- 8) Frisch-Fay. R., "Flexible Bars", (1962), Butterworth., London.
- 9) Timoshenko, S. P. & Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", (1961), McGRAW HILL.