3 点曲げ大たわみに基づくヤング率および摩擦係数の同時同定法

堀辺忠志*, 木本寛**, 森孝太郎*

A Simultaneous evaluation of for Young's modulus and friction coefficient by three-point bending test in large deflection mode

Tadashi HORIBE, Hiroshi KIMOTO and Kotaro MORI

This paper describes a method for evaluating Young's modulus and the coefficient of friction between a beam and supporting member by three-point bending test in large deflection mode. The result of measurement, i.e., deflection-load curves, are employed for identifying both the elastic modulus of beam and the coefficient of friction. The large deflection three-point bending test with frictional force being considered is first analyzed on the basis of the large deflection theory of beam. Then, analytical results which consist of elliptical integrals, are represented by approximated polynomials in order to reduce the calculation cost in the identifying process. Next, an inverse procedure for determining the Young's modulus and the coefficient of friction is described by minimizing the evaluating function which includes unknown parameters. The approach is validated with experimental data using a piece of piano wire and an acrylic square bar. It is found that the present results showed good agreement with the values which are already known from the other experimental studies.

Key Words : Large Deflection, Nonlinear Analysis, Three Point Bending, Young's Modulus, Coefficient of Friction, Inverse Analysis

1. 緒言

たわみやすいはり構造においてはたわみ状態が生じ、その結果、線形理論では予測し得ない変形や応力状態となるために、これまで様々な荷重条件や境界条件のもとで解析および実験が行われてきている。そのうちで、はりの 3 点曲げの大たわみについては、Conway が支点摩擦のない場合および支点摩擦を考慮した場合について楕円積分を用いた解を初めて誘導し、数値計算例を示している¹⁾。

その後、Iyenger らは、級数解法を用いて集中荷重と等分布荷重とを同時に受ける場合を解析した²⁾。さらに、Gospodnetic は、Conway と同様に楕円積分を導出し荷重と変位の関係における不安定な領域の解析を行った³⁾。Theocaris らは、支点摩擦のほかにローラー支点の半径の大きさも考慮した 3 点曲げの大たわみの解析を行い⁴⁾、大槻は、Gospodnetic と同様な解および Runge-Kutta 法による数値解および実験結果を提示し、3 点曲げにおけるはりの変形挙動を詳細に明らかにした^{5),6)}。また、Mohyeddin らは、せん断力の影響を考慮した解析解を導き、従来の解との比較検討を行っている⁷⁾。Batista は、Theocaris らと同様に、支点摩擦および支点の半径の影響を考慮した楕円

積分を導出し、実験との比較検討を行っている⁸⁾。

その一方で、福田は、エラスティカ状に変形をする CFRP 材料の曲げ曲率とその先端のたわみとの関係をあらかじめ図表化してヤング率を求める手法を提案している⁹⁾。また、可撓性材料のヤング率測定に関して、大槻らは大たわみ状態にあってもノモグラフを用いて適切にヤング率を評価する手法を提案した¹⁰⁾。その後、この手法は様々なはり形状に適用され、その有用性が示されている^{11)~15)}。また、堀辺らは、大槻らのノモグラフを用いる手法の代わりに高精度な近似多項式を用いる手法を提案し、片持ちはりや支点摩擦を無視した 3 点曲げの大たわみのもとのヤング率測定法を提案している¹⁶⁾。さらに、今井、飯塚らは、3 点曲げにおけるたわみ曲線を円弧で近似し、その円弧の平均曲率に基づいて縦弾性係数を測定する手法を提案している¹⁷⁾。

以上、3 点曲げの大たわみについてはさまざまな解析手法や各種のヤング率測定法の提案がなされているが、ヤング率のほかに支点摩擦も同時に同定する研究例は見当たらない。そこで、本研究では、支点摩擦を考慮し 3 点曲げを受けるはりが大たわみ状態になったときの変形を解析し、この解析結果に基づいて、たわみや荷重データをもとに逆

Fig. 1 Large deflection model of three-point bending with friction.

解析手法を用いてヤング率および摩擦係数を同時に同定する手法を提案する。さらに、ピアノ線およびアクリル角棒の3点曲げ大たわみ実験を行い、これらの実験で得られたたわみおよび荷重データによってヤング率および摩擦係数を同時に同定する。最後に、他の方法で得られたヤング率および摩擦係数の値と比較して、本手法が十分な同定精度を有していることを示す。

2. 支点摩擦を考慮した3点曲げ大たわみ解析

2.1 支配方程式および解

Fig. 1に示すように、支点Aおよび支点Bによって単純支持されたスパン $2l$ のはりの中央に集中荷重 $2P$ を受けるはりの大たわみを考える。

また、支点摩擦係数を μ 、支点Aにおけるはりのたわみ角および法線方向反力をそれぞれ θ_0 および Q とする。左支点Aを座標原点にとり、はりの水平方向を x 軸、鉛直下方を y 軸と定める。曲げモーメント M と曲率半径 R の間には、 EI を曲げ剛性として

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad \frac{1}{R} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

の関係がある¹⁸⁾。したがって、たわみ y に関する支配方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} \{x + y \tan(\theta_0 - \lambda)\} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}, \quad (0 \leq x \leq l) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる^{1), 5)}。ここで、 $\tan \lambda = \mu$ である。この式(2)が、支点摩擦を考慮し、スパンが $2l$ であり中央に鉛直荷重 $2P$ を受ける両端支持はりの大たわみの支配方程式となる。

さて、議論を一般化するために、無次元変数 $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\alpha = Pl^2/(EI)$ を導入して支配方程式(2)を無次元化すると

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{P}{EI} \{x + y \tan(\theta_0 - \lambda)\} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}, \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。

一方、このはりの左端における境界条件は、

$$y = 0, \text{ and } \frac{dy}{dx} = \tan \theta_0 \quad \text{at } x = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。また、はり中央ではたわみ角がゼロであるから

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{at } x = l \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる必要もある。これらの境界条件を無次元化すると、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 0, \text{ and } \frac{d\eta}{d\xi} = \tan \theta_0 \quad \text{at } \xi = 0, \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= 0 \quad \text{at } \xi = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表される。

以上より、本問は、境界条件式(6)のもとで、非線形の支配方程式(3)を解くことに帰着する。この非線形微分方程式に対して、Conway¹⁾, Gospodnetic³⁾, 大槻⁵⁾, Fay¹⁹⁾らは楕円積分を用いた解析解を導いている。たとえば、はりの中央たわみを $y_{\max}$, $p = \sin(\pi/4 + \lambda/2)$, $\lambda = \tan^{-1}\mu$ としてFayによる結果を示すと

$$\frac{y_{\max}}{l} = \left(\frac{\cos(\theta_0 - \lambda)}{\alpha} \right)^{1/2} \times \left[\sqrt{2} \sin(\theta_0 - \lambda) \cos n + \cos(\theta_0 - \lambda) \Phi(p, n) \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで、

$$n = \sin^{-1} \left[\frac{\cos((\theta_0 - \lambda)/2) - \sin((\theta_0 - \lambda)/2)}{\cos(\lambda/2) + \sin(\lambda/2)} \right],$$

$$\Phi(p, \phi) = F(p, \phi) - K(p) + 2E(p) - 2E(p, \phi)$$

である。ここで、 $K(p)$, $F(p, \phi)$: Legendre の第1種完全および不完全楕円積分, $E(p)$, $E(p, \phi)$: Legendre の第2種完全および不完全楕円積分である。一方、式(3)に対しては、Runge-Kutta 法による数値解^{5), 20)}も示されており、その結果は楕円積分分解と同程度の精度を有することを示している。

さて、はり中央における曲げモーメント M_c は、

$$M_c = P(l + y_{\max} \tan(\theta_0 - \lambda)) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり、これを無次元化すると

$$m_c = \frac{M_c l}{EI} = \alpha(1 + \delta \tan(\theta_0 - \lambda)), \quad \delta = \frac{y_{\max}}{l} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

また、はり中央に作用する水平方向軸力 S_c は、Fig. 1より $S_c = P \tan(\theta_0 - \lambda)$ となるから、無次元引張り軸力 s_c は

$$s_c = \frac{S_c l^2}{EI} = \alpha \tan(\theta_0 - \lambda) \quad \dots\dots\dots (10)$$

と得られる。

2.2 数値解析結果

以上の解析結果に基づいて、支点摩擦を考慮した3点曲げの大たわみについての楕円積分を用いた数値計算例を以下に示す。摩擦係数 μ をパラメータにし、無次元化した中央たわみ $\delta (= y_{\max}/l)$ と無次元荷重 $\alpha (= Pl^2/(EI))$ の関係をFig. 2に示す。図には、 $\mu = 0$ の場合のRunge-Kutta法を用いて得られた解も示しており、楕円積分分解と極めて

Fig. 2 Dimensionless load α plotted against dimensionless center deflection δ for various coefficient of friction.

Fig. 3 Dimensionless moment m_c plotted against dimensionless center deflection δ for various coefficient of friction.

Fig. 4 Dimensionless force s_c plotted against dimensionless center deflection δ for various coefficient of friction.

良く一致している。無次元荷重 α は無次元たわみ δ とともに増加するが、 δ が0.46～0.62付近で最大値をとった後に減少する。これは、3点曲げの大たわみ固有の現象であり、この最大荷重点の前後では不安定な状態で変形が進行する。

摩擦係数 μ をパラメータにし、はり中央の無次元たわみ δ とはり中央の曲げモーメント m_c の関係をFig. 3に示す。最大荷重点を過ぎた後に m_c が最大値をとることがわかる。

Fig. 4は、摩擦係数 μ をパラメータにしたときの、 δ とはり中央の無次元圧縮軸力 s_c の関係である。摩擦係数 μ が大きくなると、変位が小さい場合には支点での水平変位が抑制されるために、はじめに引張り軸力が生じ、その後変形の進行とともに圧縮力に転じていくことが示されている。

3. 実験

3.1 実験装置

Fig. 5は、3点曲げの大たわみを実現するために作製した実験装置の外観である。この実験装置は、はり中央をバークランプによって押し下げて変位を与え、実験装置を載せている電子天秤によって荷重を測定するという、変位制御型の装置である。試験片の両端は、直径3mmの鋼製丸棒(S45C)により支持されている。また、この鋼製丸棒は通常はベアリングで支持されているが、本実験ではベアリングが回転ができないように固定して支点摩擦を生じさせている。

3.2 試験片

実験に用いた試験片として、直径 $d=1\text{mm}$ のピアノ線

Fig. 5 View of experimental apparatus for three-point bending.

Table 1 Dimension and material property of specimens.

Specimen name	Piano wire	Acrylic bar
Cross-section	$d=1\text{mm}$	$h=2.03, b=2.04\text{mm}$
Second moment of inertia $I [\text{m}^4]$	4.904×10^{-14}	1.436×10^{-12}
Young's modulus $E [\text{GPa}]$	205	3.13

(SWP-A) 丸棒および幅 $b=2.03\text{mm}$ 、高さ $h=2.04\text{mm}$ のアクリル製角棒を用いた。それぞれの試験片の断面寸法、スパン $2l$ 、断面 2 次モーメント I およびヤング率 E を Table 1 に示す。

なお、ヤング率 E については、後述の同定手法の妥当性の確認のために、あらかじめ以下のように求めた。すなわち、微小変形範囲内で、ピアノ線については片持ちはりとして先端に荷重 P を負荷したときの先端のたわみ y_0 をレーザー距離計 (マキタ, LD080PI) により求める。同様に、アクリル角棒については自重 w が作用するときの先端のたわみ y_0 を求め、それぞれについて

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{Pl^3}{3Iy_0} \quad (\text{For piano wire}) \\ E &= \frac{wl^4}{8Iy_0} \quad (\text{For acrylic bar}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

の関係より、最小 2 乗法を用いて E を算出した。ここで、 l ははりの長さ、 I は断面 2 次モーメントである。

3.3 摩擦係数測定

支点の摩擦係数についても、あらかじめ以下の方法によりその大きさを求めた。すなわち、鋼製の支持丸棒と試験片との接触部分の摩擦係数を求めるための方法として、傾斜面上における試験片の滑り出しを利用する方法を採用した。Fig. 6 は、傾けた試験装置に載せた試験片が滑り出す様子を示した図である。このとき、斜面上に置かれた物体が 2 支点上を滑り始めるときの傾斜角を θ とすると、2 物体間の静止摩擦係数 μ は、

$$\mu = \tan\theta \dots\dots\dots (12)$$

により求められる。

Fig. 7 は、ピアノ線およびアクリル角棒が鋼製丸棒支点を滑り出す角度を 6 回測定したときの摩擦係数を示している。それらの平均値をとると、ピアノ線では $\mu=0.148$ 、アクリル角棒で $\mu=0.129$ と得られる。

3.4 大たわみ実験結果

以上に準備したピアノ線およびアクリル角棒試験片に対して、スパン $2l=198\text{mm}$ の 3 点曲げの大たわみ実験を行った。それらの変形と荷重の関係を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。横軸ははり中央の無次元たわみ δ 、縦軸は電子天秤で測定した荷重 $2P$ をもとに無次元化した荷重 α である。なお、ここでは、ヤング率 E として微小変形実験から求めた Table 1 の値を用いて整理している。いずれも上に凸な曲線状変化を示すが、 $\mu=0.148$ および $\mu=0.129$ とした

Fig. 6 Coefficient of friction between specimen and roller support by slope sliding method.

ときの、実線で示した大たわみの理論解と良好に一致していることがわかる。また、変位制御方式の実験装置を用いているため、不安定な変形が進行する荷重ピーク付近でも安定したデータが得られていることもわかる。

Fig. 7 Coefficient of friction for piano wire and acrylic square bar obtained by slope sliding method.

Fig. 8 Load deflection curve for piano wire.

Fig. 9 Load deflection curve for acrylic square bar.

4. 支点摩擦を考慮した 3 点曲げにおけるヤング率および摩擦係数の同定

2 章および 3 章では、支点摩擦を有する場合で 3 点曲げを受けるはりが大たわみ状態にあるときの变形などについて、理論解析および実験的検討を行った。また与えられたヤング率や摩擦係数のもとで理論および実験結果の比較検討を行って、その变形特性などを調べた。ここでは、それらの特性を基にして、変形量や荷重値から逆にヤング率や摩擦係数を同定する手法について述べる。

4.1 応答曲面の作成

2 章で明らかにしたように、大たわみのもとで 3 点曲げを受けるはりの中央のたわみは、荷重の大きさ P と摩擦係数 μ によって決定され、その具体的な関係を Fig. 2 に示した。この図のパラメータ μ も変数として、無次元荷重 $\alpha (=Pl^2/EI)$ の大きさを求め、それを 3 次元表示すると

Fig. 10 のようになる。そこで、大たわみのもとで 3 点曲げ実験を行い、そこで得られた荷重 P と中央たわみ $y_{\max}$ のデータを用いてヤング率 E および摩擦係数 μ を同定する手順を考える。

はじめに、無次元荷重 α を求めるための複雑な計算を省略できるように、Fig. 10 に示した無次元荷重 α の曲面の多項式近似式を考える。そこで、 $0 \leq \delta \leq 1.5$ の範囲で 15 分割、 $0 \leq \mu \leq 0.8$ で 8 分割し、合計 144 通りの組み合わせの曲面データ（以降、順解析データと呼ぶ）を、2 章に示した楕円積分解に基づいて求めた。これらの曲面データを覆う近似式は、以下に示すヤング率同定に大きく影響するため、曲面形状に適した補間式を選択する必要がある。

ここでは、 $\alpha = f(\delta, \mu)$ として

$$\begin{aligned} \alpha = f(\delta, \mu) = & a_{10}\delta + a_{01}\mu + a_{20}\delta^2 + a_{11}\delta\mu + a_{02}\mu^2 \\ & + a_{30}\delta^3 + a_{21}\delta^2\mu + a_{12}\delta\mu^2 + a_{03}\mu^3, \\ & (0 \leq \delta \leq 1.5, 0 \leq \mu \leq 0.8) \end{aligned} \quad \dots (13)$$

の 3 次多項式を仮定し、最小 2 乗法により係数 $a_{10} \sim a_{03}$ を以下のように決定した。

$$\begin{aligned} a_{10} = & 3.57661, a_{01} = -0.0813682, a_{20} = -4.7209, \\ a_{11} = & 1.75014, a_{02} = -0.0530298, a_{30} = 1.58033, \\ a_{21} = & 0.744376, a_{12} = -0.148373, a_{03} = 0.0442791 \\ & \dots \end{aligned} \quad (14)$$

近似式 (13)、(14) によれば、決定係数 R^2 は 0.998 であり、十分な近似が行われていることがわかる。

4.2 たわみおよび荷重データを用いた摩擦係数とヤング率の同定

次に、実験により得られたはり中央のたわみ $(y_{\max})_i$ と荷重 $P_i (i=1, \dots, n)$ が多項式近似された応答曲面に一致するよう、パラメータであるヤング率 E および摩擦係数 μ を求める最適化問題を考える。Fig. 10 に示す曲面において、実測値と曲面近似多項式に基づく数値解析の結果との誤差を最小化するための評価関数 $W(E, \mu)$ を、次に示す残差の 2 乗和で表す。

Fig. 10 Dimensionless load $\alpha (=Pl^2/EI)$ plotted against dimensionless center deflection $\delta (=y_{\max}/l)$ and coefficient of friction μ .

$$W(E, \mu) = \sum_{i=1}^n (E_i - E)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i l^2}{\alpha_i I} - E \right)^2 \dots \dots \dots (15)$$

ただし、 P_i は電子天秤で測定した中央荷重の 1/2、 n は実験データ数、 I は試験片の断面 2 次モーメント、 α_i は曲面近似関数 $f(\delta_i, \mu)$ より得られる値、 δ_i は $(y_{\max})_i / l$ である。このとき、評価関数 $W(E, \mu)$ を最小にするパラメータ E, μ の組み合わせを同定値と考えればよい。なお、評価関数の最小値を実際に求めるにあたっては、エクセルのソルバー機能を利用し、非線形最適化法の一つである GRG 法 (generalized reduced gradient method) を用いた。

- 実際の同定手順としては、必要なデータを入力した後に、
 (1) 同定パラメータ E, μ の初期推定値を入力。
 (2) 応答曲面 (式 (13)) を利用して各測定点のヤング率 E_i

Fig. 11 Flow chart for identifying Young's modulus E and coefficient of friction μ simultaneously.

Fig. 12 Approximated response surface α as a function of δ and μ and plot of experimental data obtained by forward analysis for $\mu = 0.1$.

を計算。

- (3) 評価関数 $W(E, \mu)$ を計算し、収束判定を行う。
 (4) 収束条件を満たさなければ、GRG 法によってパラメータ E および μ を更新し (2) へ移動。
 (5) 収束条件を満たせば、結果を出力。

となる。このパラメータ同定を流れ図に示すと Fig. 11 のようになる。

4.3 同定結果

以上に示した同定手法に基づいて、パラメータ E および μ の同定を行った結果を以下に示す。

はじめに、式 (13) により示した多項式曲面の近似度および本手法の有効性を確認するために、順解析により得られたたわみおよび荷重データを用いた逆解析を行った。 $\mu = 0.1, 0.2$ の 2 通りを考え、試験片の寸法および物性値は Table 1 のピアノ線を想定した。また、無次元たわみとしては、 $0 < \delta < 1.1$ の範囲の 7 点および 13 点の 2 つの場合を考えた。Fig. 12 に、多項式近似式 (13) から得られた曲面および $\mu = 0.1$ のときの順解析データから選び出した仮想的な実験点 (13 点) を示す。 E の初期値を荷重とたわみの線形部分から概算した値、 μ の初期値を 0.0 と設定したところ、以下のいずれの場合も良好な収束を示し、反復回数は最大で 15 回であった。

以上の手法に基づいて得られた同定結果を Table 2 に示す。この表より、 E, μ に対して良好な同定が行われていることがわかる。なお、順解析データを実験点に選んでおり、

Table 2 Identified Young's modulus E and coefficient of friction μ of piano wire using forward analysis data. Here, n is the number of data for the identification.

	Reference values	Identified values	
		$n=7$	$n=13$
E [GPa]	205	199	199
μ	0.1	0.105	0.105
E [GPa]	205	198	198
μ	0.2	0.211	0.211

Table 3 Identified Young's modulus E and coefficient of friction μ of piano wire and acrylic square bar using experimental data. Here, n is the number of data for the identification.

Piano wire			
	Reference values	Identified values	
		$n=12$	$n=18$
E [GPa]	205	196	198
μ	0.148	0.156	0.134
Acrylic square bar			
	Reference values	Identified values	
		$n=11$	$n=15$
E [GPa]	3.13	3.11	3.12
μ	0.129	0.108	0.106

いわば誤差を含まない実験データを利用していることになるため、実験点数を 7 点に減らしても同定精度の低下が生じていない。

次に、実験データに基づいた同定を考える。実験データとして、Fig. 8 および Fig. 9 に示したピアノ線の 12, 18 個のたわみと荷重データそしてアクリル角棒の 11, 15 個のたわみと荷重データ ($y_{\max}$)_i, P_i を用い、以上に示した手法に基づいてパラメータ同定を行った結果を Table 3 に示す。なお、初期値の設定は順解析データに基づく同定と同様である。

ピアノ線、アクリル角棒ともに、15 点以上の実験点があれば良好な同定が得られていることがわかる。なお、ピアノ線のヤング率が低めに同定されたのは、Fig. 8 に示したピーク点近傍の荷重データの低下による。この点では曲げ剛性の小さい材料では不安定な変形挙動を示す。このため、変位や荷重の測定に誤差が生じやすい点となっている。ローラー支点とはりの接触部に作用する法線方向力については、傾斜面の滑り出しの場合に比べて大たわみ実験の場合がはるかに大きい。ピアノ線およびアクリル角棒の摩擦係数がやや低めに同定されている結果は、接触面に作用する垂直荷重が大きくなるとともに静摩擦係数は減少するという研究結果²¹⁾に一致する。また、アクリル試験片は角棒であり、ローラー支点との接触部で片当たりし、結果的に小さな摩擦力が生じていたことも考えられる。

5. 結 言

3 点曲げの大たわみ実験から得たたわみ-荷重曲線に対して、最適化手法を用いて、ヤング率および支点摩擦係数を同時に同定する手法を提案し、実験結果に基づいて考察を行った。得られた結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 支点摩擦を考慮した 3 点曲げの大たわみについての既存の理論結果に基づき、中央たわみ、摩擦係数および荷重の関係を求めた。さらに、この関係に基づき、中央たわみ、摩擦係数を変数とする荷重の応答曲面を作成した。さらにこの応答曲面に対し、最小 2 乗法を適用して簡単な近似多項式によって曲面を近似し、この近似曲面が元の曲面を精度良く再現できることを示した。
- (2) ヤング率および摩擦係数を引数とした評価関数を式 (15) により定義し、この評価関数に基づいてヤング率および支点摩擦係数を同定する手法を提案した。
- (3) たわみやすい材料としてピアノ線およびアクリル角棒を用い、これらの試験片の 3 点曲げ大たわみ実験を行って本同定手法を適用した。その結果、3 点曲げ大たわみ実験によって得られるはり中央のたわみと荷重のデータから、ヤング率および支点摩擦を同時に同定可能なことを示した。

本手法によれば、たわみの大小を問わずに、また支点摩擦の影響を排除したヤング率を同定、評価することが可能となる。これは、従来の実験方法にはない利点であり、各

方面での利用が期待される。

終わりに、本研究の一部は、平成 30 年度の卒業研究として葛西 駿君、希代 駿君が取り組んだ研究であることを付記し、両名に深甚なる謝意を表する。

参考文献

- 1) H. D., The large deflection of simply supported beams, Philosophical Magazine, 38-287(1947), 905.
- 2) Sundara Raja Iyenger K. T. and Lakshmana Rao S. K., Large deflections of simply supported beams, Journal of Franklin Institute, Vol. 259(1955), 523.
- 3) Gospodnetic D., Deflection curve of a simply supported beam, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 26-4(1959), 675.
- 4) Theocaris P. S., Paipetis S. A. and Paolinelis S., Three-point bending at large deflections, Journal of Testing and Evaluation, 5-6(1977), 1.
- 5) 大槻敦巳, 3 点曲げによる大たわみ変形, 精機学会論文集, 51-8(1985), 1582.
- 6) Ohtsuki, A., An analysis of large deflections in a symmetrical three-point bending of beam, Bulletin of the JSME, 29-253(1986), 1988.
- 7) Mohyeddin A. and Fereidoon A., An analytical solution for the large deflection problem of Timoshenko beams under three-point bending, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.78(2014), 135.
- 8) Batista M., Large deflections of a beam subject to three-point bending, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 69 (2015), 84.
- 9) 福田 博, 先進複合材料のための圧縮曲げ試験法, 日本航空宇宙学会誌, 41-475(1993), 52.
- 10) 大槻敦巳, 高田 仁, 圧縮円リングを用いた薄板/細線の新ヤング率測定法, ばね論文集, No. 47(2002), 27.
- 11) Ohtsuki, A., A new method of measuring Young's modulus for flexible thin materials using a cantilever, Applied Mechanics and Materials, Vols.3-4 (2005), 53.
- 12) 大槻敦巳, 林 克典, 片持ちはりを用いた可撓性積層薄肉材料の革新的ヤング率測定法, ばね論文集, No. 54(2009), 41.
- 13) Ohtsuki, A., An innovative own-weight cantilever method for measuring Young's modulus in flexible thin materials based on large deflection, Applied Mechanics and Materials, Vols. 24-25(2010), 371.
- 14) Ohtsuki, A., An innovative method for measuring Young's modulus of multi-layered materials using postbuckling behavior, Procedia Engineering, Vol.1(2011), 1041.
- 15) 大槻敦巳, 蔣 驍, 円リングにおける自重大たわみ変形を利用した薄肉積層材料の新ヤング率測定法(自重大変形積層円リング法), ばね論文集, No. 63(2018), 53.

- 16) 堀辺忠志, 森 孝太郎, 佐藤 剛, 木本 寛, はりの大たわみの近似式に基づくヤング率測定法(片持ちはりおよび3点曲げの場合). 日本ばね学会 2018 年度秋期講演会講演論文集(2018). 27.
- 17) 今井秀孝, 飯塚幸三, 両端支持はりによる薄板ばね材料のばね性試験の一方法, 精密機械, 43-2(1977), 162.
- 18) Frish-Fay, R. 著, 堀辺忠志訳, たわみやすいはりの大変形理論 (2019), P.1, 三恵社 .
- 19) Frisch-Fay, R, Particular cases of large deflections, Australian Journal of Applied Science, Vol. 11(1960), 443.
- 20) Horibe T. and Mori K., Large deflections of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material, Mechanical Engineering Journal, 5-1(2018), 1.
- 21) Otsuki M. and Matsukawa H., Systematic breakdown of Amontons' law of friction for an elastic object locally obeying Amontons' law, Scientific Reports 3 (2013): 1586.