減衰系に取付ける単一質量動吸振器の H_∞ 最適化設計のための計算式*

浅見敏彦**

Calculation Formula of H_∞ Optimized Design for a Single-Mass Dynamic Vibration Absorber Attached to a Damped Primary System

Toshihiko Asami

There are three typical criteria used in the design of dynamic vibration absorbers (DVAs): H_∞ optimization, H_2 optimization, and stability maximization. Recently, interest has shifted to the optimization of multi-mass DVAs, but in fact, in even the most basic single-mass DVA, the effect of primary system damping on the optimal solution is still not fully understood with respect to the H_∞ criterion. Exact H_∞ -optimal solution for a series-type double-mass DVA attached to a damped primary system was reported in my paper recently. This article presents the application of this H_∞ optimization method developed for a double-mass DVA to the optimization for a single-mass DVA. In the H_∞ optimization of the mobility transfer function, a highly accurate numerical solution was successfully obtained by solving a single sixth-order algebraic equation. In the case of optimization of compliance and accelerance transfer functions, it is shown that a highly accurate numerical solution can be obtained by solving ternary systems of simultaneous algebraic equations. It should be noted that the equations presented in this paper can be factorized into simpler equations when there is no damping in the primary system. It is also demonstrated herein that the factorized expressions yield the previously published H_∞ -optimal solutions.

Key Words : Vibration Suppression, Viscously Damped Dynamic Vibration Absorber, Optimal Design, H_∞ -Optimal Solution, Damped Primary System

1. 緒 言

制振装置としての動吸振器 (DVA : Dynamic Vibration Absorber) は 1883 年に Watts によって考案され¹⁾, 1909 年と 1911 年に Frahm によって最初に特許を取られたとされている²⁾. その最適化の規範については, H_∞ 最適化, H_2 最適化, および安定度最大化の三つに分類できる³⁾. これらの中で H_∞ 最適化は主系の共振点の高さを最小に抑えることを目的とし, 最も早く提案され, 現在でも最も広く採用されている規範である. Ormondroyd と Den Hartog によって 1928 年に提案された H_∞ 最適化の近似的手法⁴⁾は定點理論と呼ばれる. その方法により, 無減衰系に取付ける単一質量動吸振器に対する最適同調比の式が 1932 年に Hahnkamm⁵⁾によって導かれ, その後, 1946 年に Brock⁶⁾によって動吸振器の最適減衰比の式が導出された. その解の詳細な導出法は 1956 年に出版された Den Hartog の著書⁷⁾に紹介されている. 彼らが導いた近似解は, 力励振を受ける主系のコンプライアンス伝達関数 (絶対変位応答) の最小化に対する解であったが, その後, モビリティ伝達関数 (絶対速度応答) とアクセランス伝達関数 (絶対加速

度応答) に対する近似解も求められ, それらは 1993 年に出版された専門書にまとめられている⁸⁾.

動吸振器の H_∞ 最適化に対する厳密解の導出方法は, 1997 年と 2002 年に西原らによって提案された^{9), 10)}. このとき, コンプライアンス伝達関数に対する最適解も呈示され, これによって定點理論による近似解の精度が極めて高いことが確認された. その後, この西原の方法でモビリティ伝達関数とアクセランス伝達関数に対する厳密解も導出された¹¹⁾. 上記の解は, すべて主系に減衰が存在しない特別な場合の解である.

この重要な進展が始まる前に, 主系に含まれる減衰の影響を考慮した H_∞ 最適解が提案されたが, それらはすべて数値解^{12) ~ 16)}か摂動近似解³⁾であり, 現在に至るまで代数解は得られていない. 一方で, H_2 規範¹⁷⁾と安定度規範¹⁸⁾に対しては, 主系に減衰が存在する場合においても厳密な代数解が得られている^{3), 18)}.

最近では動吸振器の性能向上とロバスト性向上の目的から, 多重動吸振器の最適化^{19) ~ 22)}へと研究の興味が移ってきているが, それらの中で, 減衰系に対する直列二重動吸

振器の H_∞ 最適解の発見²³⁾は、未だに得られていない単一質量動吸振器の H_∞ 最適解導出への希望を抱かせるものであった。このときに発見された解はモビリティ伝達関数に対する H_∞ 最適解であり、それはある 4 次方程式を代数的に解くことによって得られたものである。この 4 次方程式の発見に威力を発揮したのが、連立方程式の重根条件を探索するために使われたヤコビ行列²⁴⁾である。今回の研究で、このヤコビ行列を使う方法を単一質量動吸振器の H_∞ 最適化に適用したところ、モビリティ伝達関数に対して単独の 6 次代数方程式が導かれた。この 6 次方程式は代数的には解けないが、例えば *Mathematica* のコマンド “NSolve” によって簡単に数値解を得ることができる。この方法は、数式を用いない従来の数値解法に比べて圧倒的に高速度・高精度で最適解を導くことができる。本報告ではこの 6 次代数方程式を呈示するが、比較的短い式で収まっている。

さらに、コンプライアンス伝達関数およびアクセラランス伝達関数については、三元連立の高次代数方程式が導かれた。これらも代数的には解けない方程式であるが、上記のコマンド “NSolve” で数値的に解ける。このコマンドを実行すると非常に多くの数値解の組が出力されるが、その中で正の実根の組み合わせは 1 組しか存在しない。これらの連立方程式も比較的短い式であり、ここで紹介する。最後に、これら 3 種類の伝達関数の H_∞ 最適解の特徴と、最適化された振動系の定常応答特性を明らかにする。

2. 解析モデルと無次元パラメータの定義

Fig. 1 (b) は、本研究で取り上げる 2 自由度振動系の解析モデルで、 m_1-k_1 系が制振対象となる主系 (P)、 m_2-k_2 系が動吸振器 (DVA) である。主系には調和外力が作用し、主系の定常振動振幅を最小化するように動吸振器が設計される。この振動系から動吸振器を取り外した 1 自由度の振動系が Fig. 1 (a) に示されている。

本研究では、次のように定義された無次元パラメータを用いて計算を進めて行く。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= m_2/m_1, \quad \nu = \omega_2/\omega_1, \quad \lambda = \omega/\omega_1 \\ \zeta_1 &= c_1/(2m_1\omega_1), \quad \zeta_2 = c_2/(2m_2\omega_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで ω_1 と ω_2 は、次のように定義される無減衰固有角振動数である。

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

Fig. 1 Analytical model of viscously damped systems.

式 (1) において、 m_1, k_1, c_1 は主系の質量、ばね定数、および減衰係数で、 m_2, k_2, c_2 は対応する動吸振器のパラメータ、 ω は励振角振動数である。これらのパラメータは無次元化され、 μ は質量比、 ν は同調比、 λ は励振振動数比、 ζ_1 と ζ_2 はそれぞれ主系と動吸振器の減衰比である。式 (1) で定義された五つの無次元パラメータにおいて、励振振動数比 λ はゼロから無限大まで変化すると想定し、質量比 μ と主系の減衰比 ζ_1 が与えられたときに動吸振器の望ましいばね定数と減衰係数を与える ν と ζ_2 の最適値を探ることがこの動吸振器の最適化問題である。

3. H_∞ 最適化の評価指標と無減衰系に対する厳密解

ここでは、次の三つの伝達関数に対して動吸振器の H_∞ 最適化を試みた。

3.1 コンプライアンス伝達関数の H_∞ 最適化

コンプライアンス伝達関数とは、系に入力された外力 $f(t)$ に対する絶対変位応答 $x_1(t)$ の比を表す伝達関数であり、その最大値を表す H_∞ ノルムを無次元化すると次式で表現される。

$$h_{\max} = \left| \frac{x_1}{f/k_1} \right|_{\max} \quad \dots\dots\dots (3)$$

この $h_{\max}$ を最小化することが H_∞ 最適化の目標である。今後、 $h_{\max}$ の最小値は $h_{\min}$ と表される。

3.2 モビリティ伝達関数の H_∞ 最適化

モビリティ伝達関数とは、外力に対する絶対速度応答の比を表す伝達関数であり、その最大値を表す H_∞ ノルムはここでも無次元化されて次式で表現される。

$$h_{\max 2} = \left| \frac{\dot{x}_1}{\omega_1 f/k_1} \right|_{\max} = \left| \frac{\lambda \dot{x}_1}{f/k_1} \right|_{\max} \quad \dots\dots\dots (4)$$

この $h_{\max 2}$ を最小化することが H_∞ 最適化の目標である。今後、この $h_{\max 2}$ の最小値も $h_{\min}$ と表される。

3.3 アクセラランス伝達関数の H_∞ 最適化

アクセラランス伝達関数とは、外力に対する絶対加速度応答の比を表す伝達関数であり、その最大値を表す H_∞ ノルムを無次元化すると次式で表現される。

$$h_{\max 3} = \left| \frac{\ddot{x}_1}{\omega_1^2 f/k_1} \right|_{\max} = \left| \frac{\lambda^2 \ddot{x}_1}{f/k_1} \right|_{\max} \quad \dots\dots\dots (5)$$

この $h_{\max 3}$ を最小化することが H_∞ 最適化の目標である。この $h_{\max 3}$ の最小値も $h_{\min}$ と表される。

3.4 無減衰系に対する H_∞ 最適解

主系に減衰が存在しないときには、上記のすべての伝達関数に対して、すでに動吸振器の厳密な H_∞ 最適解が得られており¹¹⁾、それは今回の研究の出発点になることからここでまとめて紹介する。

まず、コンプライアンス伝達関数に対しては

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{opt}} &= \frac{2}{1+\mu} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{16+23\mu+9\mu^2+2(2+\mu)\sqrt{4+3\mu}}{64+80\mu+27\mu^2}} \\ \zeta_{2\text{opt}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8+9\mu-4\sqrt{4+3\mu}}{1+\mu}} \\ h_{\text{min}} &= \frac{1}{3\mu} \sqrt{\frac{(8+9\mu)^2(16+9\mu)-128(4+3\mu)^{3/2}}{3(32+27\mu)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

次に、モビリティ伝達関数に対しては

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{opt}} &= \frac{1}{1+\mu} \sqrt{-(1+\mu) + \sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}} \\ \zeta_{2\text{opt}} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}}} \\ h_{\text{min}} &= \sqrt{\frac{1}{\mu} \left[\frac{2+\mu}{2(1+\mu)} + \sqrt{\frac{2+\mu}{2(1+\mu)}} \right]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

最後に、アクセラランス伝達関数に対しては

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{opt}} &= \frac{2}{8+5\mu} \sqrt{\frac{2}{3} (16+7\mu+c_0)} \\ \zeta_{2\text{opt}} &= \frac{1}{8+5\mu} \sqrt{\frac{64+88\mu+33\mu^2}{2} - (4+3\mu)c_0} \\ h_{\text{min}} &= \frac{8}{3\mu} \sqrt{\frac{16+25\mu-2c_0}{3(32+27\mu)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

where $c_0 = \sqrt{64-16\mu-26\mu^2}$

これらの式を図示した結果が **Fig. 2** に示されている。この図において、 h_{min} に関しては、他に比べて値が大きいことから定数5で除した値が記されていることに注意されたい。この h_{min} の値は、コンプライアンス伝達関数とアクセラランス伝達関数においては1未満にはならないという性質があるが、アクセラランス伝達関数の方が圧倒的に早く1に漸近していき、 $\mu=1.291$ において完全に1になり、これ以上の μ の値に対しては最適解が存在しなくなる。この μ の限界値は、式(8)の最後に記されたパラメータ c_0 が虚数に転じる瞬間である。こうして最適化された動吸振器が取付けられた主系のコンプライアンス、モビリティ、およびアクセラランスの各周波数応答は、後述の **Fig. 4, 6, および 8** において示される。

3.5 動吸振器の近似解との差

緒言で述べたように、 H_∞ 最適化規範に対しては、定点理論によって導出された動吸振器の近似設計式

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{1+\mu}, \quad \zeta_{2\text{opt}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

が長く使われてきた⁷⁾。この式を図示すると、**Fig. 2** に描かれた実線(コンプライアンス伝達関数の式)と重なる。例えば、 $\mu=0.1$ に対して厳密解の値を式(6)から計算する

Fig. 2 H_∞ -optimal solutions for a DVA attached to an undamped primary system ($\zeta_1=0$).

と、 $\mu_{\text{opt}}=0.909058$ と $\zeta_{2\text{opt}}=0.185470$ となる。一方、式(9)の近似解から計算された値は $v_{\text{opt}}=0.909091$ と $\zeta_{2\text{opt}}=0.184637$ である²⁵⁾。このように、近似解は厳密解とほとんど変わらない値を返してくる。ところが、定点は主系に減衰が存在すると消滅するので、この定点理論は減衰系には適用できない。

伝統的に、近似解の式(9)は動吸振器をどのような目的で取付けるかに拘わらず使われてきた。しかしながら、これからはその使用目的に応じて動吸振器の設計式を使い分けるべきであろう。例えば、機械振動によって発生する騒音を減じるために動吸振器を取付ける場合には式(7)が使われるべきであり²⁶⁾、鉄道車両や自動車の乗り心地向上のために動吸振器を設置する場合には式(8)によって設計するのが適している^{27), 28)}。

4. コンプライアンス伝達関数に対する H_∞ 最適化

本節では、ヤコビ行列²⁴⁾を適用して減衰のある系に取付けるコンプライアンス伝達関数に対する H_∞ 最適化の方法を略述する。詳細は他の文献^{23), 26), 29), 30)}を参照されたい。前述の式(6)から(8)は西原の方法¹⁰⁾によって導かれた H_∞ 最適解であるが、このときには重根条件の探索にヤコビ行列ではなくシルヴェスター行列³¹⁾を適用していた。後述のように、西原の方法では最初に二元連立代数方程式が導かれるが、シルヴェスター行列を用いてこの連立方程式の重根を探るには、連立方程式を単独の式に統合しなければならないという制約を受ける。主系に減衰がない場合には、この統合した式はせいぜい4次方程式であることからシルヴェスター行列によって重根条件を計算できたが、主系に減衰が存在していると8次の高次方程式になり、事実上は計算不能になってしまう。そこで、ここでは、シルヴェスター行列の代わりにヤコビ行列を用いて方程式の重根を探る方法を紹介する。

Fig. 1 (b) に示された振動系の主系のコンプライアンス伝達関数は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{x_1}{f/k_1} \right| &= \sqrt{\frac{\text{Num1}}{\text{Den1}}} \\ \text{Num1} &= (\lambda^2 - v^2)^2 + (2\zeta_2 \lambda v)^2 \\ \text{Den1} &= \{\lambda^4 - \lambda^2[1 + 4\zeta_1 \zeta_2 v + (1 + \mu)v^2] + v^2\}^2 \\ &\quad + 4\lambda^2\{\zeta_1(\lambda^2 - v^2) - \zeta_2[1 - \lambda^2(1 + \mu)]v\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

いま、振動系のパラメータを変化させ、振動系に現われる二つの共振点の高さが等しくなるように調整する。その共振点高さを $h_{\max}$ とおき、次の関数 f_n を定義する。

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \text{Den1} - \frac{\text{Num1}}{h_{\max}^2} \\ &= \lambda^8 + b_1 \lambda^6 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^2 + b_4 \\ b_1 &= -2 + 4\zeta_1^2 + 8\zeta_1 \zeta_2 \mu v \\ &\quad - 2(1 + \mu)[1 - 2\zeta_2^2(1 + \mu)]v^2 \\ b_2 &= r^2 + v^2[2(2 + \mu) + (1 + \mu)v^2 \\ &\quad - 8\zeta_1^2(1 - 2\zeta_2^2) - 8\zeta_2^2(1 + \mu)] \\ b_3 &= -2v^2[r^2(1 - 2\zeta_2^2) + (1 - 2\zeta_1^2 + \mu)v^2] \\ b_4 &= r^2 v^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$r = \sqrt{1 - 1/h_{\max}^2} \dots\dots\dots (12)$$

は、式(11)に分数式が現われることを避けるために導入されたパラメータである。このパラメータ変換によって、 $h_{\max}$ を最小化する問題は r を最小化する問題に置き換えられる。この r の最小値は $r_{\min}$ と表記される。式(11)に示されるように関数 f_n は λ^2 に関する4次式になるが、この関数をゼロと置いた方程式 $f_n = 0$ は二つの共振点のそれぞれで重根をとる筈である。そのことから、次の二つの恒等式が導出できる¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} b_1 \sqrt{b_4} - b_3 &= 0 \\ (b_1/2)^2 - 2\sqrt{b_4} - b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(13)のパラメータ $b_1 - b_4$ に式(11)を代入して整理すると、次の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0, \quad f_2 = c_0 r^2 + c_1 r + c_2 = 0 \\ a_0 &= 1 - 2\zeta_2^2 \\ a_1 &= -1 + 2\zeta_1^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \mu v - (1 + \mu)[1 - 2\zeta_2^2(1 + \mu)]v^2 \\ a_2 &= (1 + \mu - 2\zeta_1^2)v^2, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -2v^2 \\ c_2 &= 4\zeta_2^2(1 + \mu)^3[1 - \zeta_2^2(1 + \mu)]v^4 \\ &\quad + 8\zeta_1 \zeta_2 \mu(1 + \mu)[1 - 2\zeta_2^2(1 + \mu)]v^3 \\ &\quad + \{2 - 4\zeta_1^2[1 - \mu - 2\zeta_2^2(1 + \mu)(1 - 3\mu)] \\ &\quad - 4\zeta_2(1 - \mu^2)\}v^2 + 8\zeta_1(1 - 2\zeta_1^2)\zeta_2 \mu v - (1 - 2\zeta_1^2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(14)は、2自由度振動系において現われる二つの共振点の高さを等しくする条件である。次に、この共振点の高さ

($h_{\max}$ すなわち r) を最小化する条件を付け加える。それは、最適化すべき二つのパラメータ v と ζ_2 に関する r の全微分式がゼロ、すなわち

$$dr = \frac{\partial r}{\partial v} dv + \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} d\zeta_2 = 0 \dots\dots\dots (15)$$

が成立することである²⁶⁾。共振点の高さ r は二つの関数 f_1 と f_2 の中に含まれているので、その全微分 dr の式は次のように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} dr \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial f_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv \\ d\zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots (16)$$

式(16)の中央の式の第二行列はヤコビ行列と呼ばれる。式(16)において、 v と ζ_2 が自明でない解を持つためには、このヤコビ行列がランク落ちしていなければならない³²⁾。すなわち

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

式(17)は連立方程式(14)の重根を探し求める方法であるとも言える。この式から、 H_{∞} 最適解探索に必要な次の第3番目の重根条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= d_0 r^3 + d_1 r^2 + d_2 r + d_3 = 0 \\ d_0 &= \zeta_2 v \\ d_1 &= -\zeta_1 \mu(1 + \mu)^2[1 + 4\zeta_2^2(1 + \mu) - 4\zeta_2^4(1 + \mu)^2]v^3 \\ &\quad - \zeta_1 \mu[1 + 6\zeta_2^2(1 + \mu) - 12\zeta_2^4(1 + \mu)^2]v^2 \\ &\quad - \zeta_2\{1 - 2\zeta_2^2(1 - \mu^2) - 2\zeta_1^2[1 - \mu \\ &\quad - 2\zeta_2^2(1 + \mu)(1 - 3\mu)]\}v - 2\zeta_1(1 - 2\zeta_1^2)\zeta_2^2 \mu \\ d_2 &= [\zeta_2(1 + \mu)^4 v^3 + \zeta_1 \mu(1 + \mu)^2 v^2 \\ &\quad + \zeta_2(1 + \mu - 4\zeta_1^2)\mu(1 + \mu)v + \zeta_1 \mu(2 + \mu - 4\zeta_1^2)]v^2 \\ d_3 &= (1 + \mu - 2\zeta_1^2) \times \{-\zeta_2(1 + \mu)^3[1 - 2\zeta_2^2(1 + \mu)]v^3 \\ &\quad - \zeta_1 \mu(1 + \mu)[1 - 6\zeta_2^2(1 + \mu)]v^2 \\ &\quad + \zeta_2(1 + \mu)[1 - \mu - 2\zeta_1^2(1 - 3\mu)]v - \zeta_1(1 - 2\zeta_1^2)\mu\}v^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

式(14)と(18)は、三つの未知数(v , ζ_2 , r)を含む三元連立方程式を構築している。主系減衰 ζ_1 がゼロの場合には、これらの式はさらに因数分解でき、代数解の式(6)が導かれる。この連立方程式は、残りのパラメータ μ と ζ_1 に希望する値を入れれば、数式処理ソフトの *Mathematica* のコマンド“NSolve”を用いて解くことができる。その結果、非常に多くの解の組が得られる(ある計算条件では14組の実根と56組の複素根が得られた)が、その中で正の実根は1組だけである。実用的には、この式を“NSolve”によって直接解くよりも、式(6)からの計算値を初期値として、*Mathematica* のコマンド“FindRoot”を用いて解くことを勧める。

こうして、連立方程式 (14) と (18) の解として得られた動吸振器の最適同調比 ν_{opt} と最適減衰比 $\zeta_{2\text{opt}}$ 、および最小化された共振振幅 h_{min} の値を Fig. 3 に示す。この図の横軸には主系の減衰比 ζ_1 が $1/\sqrt{2} = 0.7071$ の値までとられている。よく知られているように、Fig. 1 (a) に示された 1 自由度の粘性減衰系のコンプライアンス伝達関数は、振動数比 $\lambda = 0$ において 1 から始まり、減衰比 ζ_1 が 0.7071 に達すると、振動数の増加と共に単調に減少していくことになる。このことから、動吸振器の最適値は $\zeta_1 = 0.7071$ までは存在しない。この図に示されるように、最適同調比

 (a) Optimal tuning ratio ν_{opt}

 (b) Optimal damping ratio $\zeta_{2\text{opt}}$

 (c) Minimized resonance amplitude h_{min}

 Fig. 3 Optimization of the compliance transfer function for a damped primary system by the H_∞ criterion.

は $\zeta_1 = 0.7071$ においてゼロになるまで単調に減少していき、最適減衰比は単調に増加していく。共振振幅 h_{min} の値は動吸振器の質量が大きく、主系減衰が大きくなるほど小さくでき、 $\zeta_1 = 0.7071$ において完全に 1 になる。グレーで表示された $\mu = 0$ の曲線は動吸振器を取付けない 1 自由度振動系の共振振幅を表している。

Fig. 4 は、 $\mu = 0.05$ から 0.2 までの代表的な質量比の動吸振器が取付けられた振動系のコンプライアンス伝達関数を示している。この図から、パラメータとしてとられた主系減衰の値が大きくなるほど共振点の高さが低くなり、グ

 (a) Mass ratio $\mu = 0.05$

 (b) Mass ratio $\mu = 0.1$

 (c) Mass ratio $\mu = 0.2$

 Fig. 4 Optimized compliance transfer functions for a damped primary system based on the H_∞ criterion.

レーの曲線 ($\zeta_1=0.7071$ の線) で示された 1 自由度振動系の応答曲線に近づいていくようすが分かる. さらに, コンプライアンス伝達関数を最小化する動吸振器の H_∞ 最適解が $\zeta_1=0.7071$ までしか存在しない理由もこの図から理解できる.

5. モビリティ伝達関数に対する H_∞ 最適化

モビリティ伝達関数についても, 同様に三元連立の代数方程式が得られるが, 一部の式が代数的に解けることから, 最終的には以下に記された v^2 に関する単独の 6 次代数方程式を解く問題に帰することになる.

$$\left. \begin{aligned} f_n &= a_0 v^{12} + a_1 v^{10} + a_2 v^8 + a_3 v^6 + a_4 v^4 + a_5 v^2 \\ &\quad + a_6 = 0 \\ a_0 &= (1+\mu)^6 \\ a_1 &= (1+\mu)^4 [(1+\mu)(3-\mu) - \zeta_1^2(9-\mu)] \\ a_2 &= -(1+\mu)[2(1+\mu)^2(3+3\mu+2\mu^2) \\ &\quad - \zeta_1^2(1+\mu)(21+18\mu+13\mu^2) + 8\zeta_1^4\mu^2] \\ a_3 &= -2[(1+\mu)^2(5+2\mu+\mu^2) \\ &\quad + \zeta_1^2(1+\mu)(5+4\mu-3\mu^2) + 4\zeta_1^4\mu^2] \\ a_4 &= (3+\mu)(7+9\mu+4\mu^2) - 2\zeta_1^2(3+2\mu+\mu^2) \\ a_5 &= -(3+\mu)^2 + 3\zeta_1^2(1-\mu), \quad a_6 = \zeta_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この方程式を解くと μ の正の実根が複数個現われる. それらを式 (20) の第 1 式に代入すると, 最適減衰比 ζ_{2opt} が計算できるが, 正の実数となる最適減衰比を与える v の値は一つしかなく, それが最適同調解 v_{opt} になる. 最後に, これらの最適解を式 (20) の第 2 式に代入すると, 最小化された共振振幅の値 h_{min} が計算できる.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{2opt} &= \frac{-\zeta_1 \mu v_{opt}^3 + \sqrt{g_1}}{1 - 2v_{opt}^2 + (1+\mu)v_{opt}^4} \\ h_{min} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - v_{opt}^2}{g_2}} \\ g_1 &= \zeta_1^2 \mu^2 v_{opt}^6 + (1 - v_{opt}^2)[1 - (1+\mu)v_{opt}^2] \\ &\quad \times [1 - 2v_{opt}^2 + (1+\mu)^2 v_{opt}^4] \\ g_2 &= [\zeta_1(1+\mu) + \zeta_{2opt}(1+v_{opt} + \mu v_{opt})] \\ &\quad \times [\zeta_1(1-\mu) - \zeta_{2opt}(1 - v_{opt} - \mu v_{opt})] \end{aligned} \right\} \quad \dots (20)$$

もし主系減衰 ζ_1 がゼロであるなら, 式 (19) は次のように因数分解できる.

$$f_n = v^2(v^2-1)[(1+\mu)^3 v^4 + 2(1+\mu)^2 v^2 - (3+\mu)]^2 = 0 \quad \dots (21)$$

この式の最後の因数である v^2 に関する 2 次方程式に最適解が含まれ, その解は式 (7) の第 1 式と一致する.

こうして計算された最適解と最小化された共振振幅の値を Fig. 5 に示している. この場合の最適解は $\zeta_1 = \infty$ まで存在すると考えられる. モビリティ伝達関数は $\lambda = 0$ においてゼロから始まり, $\lambda = \infty$ においてゼロに収束する関数であり, Fig. 5(c) に示された h_{min} の値は 1 よりも小さくなることもある. このとき, パラメータ r は虚数になるが, r の値は虚数になっても有効であることが確認されてい

る. Fig. 6 は, 代表的な質量比 μ の値に対して最適化されたモビリティ伝達関数の例を示している. 力加振系では振動系が固定基礎上に据え付けられているので, 主系減衰 ζ_1 が大きいほど振動はゼロに向かって小さくなっていく.

6. アクセランス伝達関数に対する H_∞ 最適化

アクセランス伝達関数に関しても三元連立の代数方程式が導かれる. まず, 二つの共振点の高さを等しくするという条件より

(a) Optimal tuning ratio v_{opt}

(b) Optimal damping ratio ζ_{2opt}

(c) Minimized resonance amplitude h_{min}

Fig. 5 Optimization of the mobility transfer function for a damped primary system by the H_∞ criterion.

$$\left. \begin{aligned}
 f_1 &= a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \\
 f_2 &= c_0 r^4 + c_1 r^3 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4 = 0 \\
 a_0 &= (1 - 2\zeta_2^2)^2, \quad a_1 = -1 + 2\zeta_2^2 - (1 + \mu - 2\zeta_1^2)v^2 \\
 a_2 &= 1 - 2\zeta_1^2 - 4\zeta_1\zeta_2\mu v + (1 - 4\zeta_2^2)\mu v^2 - 2\zeta_2^2\mu^2 v^2 \\
 c_0 &= -4\zeta_2^2(1 - \zeta_2^2)v^4, \quad c_1 = 2v^2, \quad c_3 = 0 \\
 c_2 &= -1 - 2[1 + \mu - 2\zeta_1^2(1 - 2\zeta_2^2) \\
 &\quad - 2\zeta_2^2(1 + 2\mu)]v^2 - 8\zeta_1\zeta_2(1 - 2\zeta_2^2)\mu v^3 \\
 &\quad - \mu[\mu + 4\zeta_2^2(3 + \mu) - 8\zeta_2^4(2 + \mu)]v^4 \\
 c_4 &= [1 - 2\zeta_1^2 - 4\zeta_1\zeta_2\mu v + (1 - 4\zeta_2^2)\mu v^2 - 2\zeta_2^2\mu^2 v^2]^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

次に、共振点の高さを最小化するという条件より

(a) Mass ratio $\mu = 0.05$

(b) Mass ratio $\mu = 0.1$

(c) Mass ratio $\mu = 0.2$

Fig. 6 Optimized mobility transfer functions for a damped primary system based on the H_∞ criterion.

$$\left. \begin{aligned}
 f_3 &= d_0 r^5 + d_1 r^4 + d_2 r^3 + d_3 r^2 + d_4 r + d_5 = 0 \\
 d_0 &= \zeta_2 v^5 \\
 d_1 &= -\zeta_2 v^3 \{1 - 4\zeta_2^4 + (1 + \mu - 2\zeta_1^2)v^2 \\
 &\quad + 2\zeta_2^2[2 - (1 + \mu - 2\zeta_1^2)v^2]\} \\
 d_2 &= v[\zeta_1 \mu v^3 + \zeta_2 - \zeta_2 \mu v^2 + 2\zeta_2 \mu(2 + \mu)v^4] \\
 d_3 &= -\zeta_2[1 + \mu - 2\zeta_1^2(1 - 2\zeta_2^2) - 2\zeta_2^2(1 + 2\mu)]v \\
 &\quad - \zeta_1(1 + 6\zeta_2^2 - 12\zeta_2^4)\mu v^2 - \zeta_2[1 + \mu - 2\zeta_1^2(2 + 3\mu) \\
 &\quad + 4\zeta_1^4 - 4\zeta_2^2\mu(3 + \mu) + 8\zeta_2^4\mu(2 + \mu)]v^3 \\
 &\quad - \zeta_1(1 + \mu - 2\zeta_1^2)(1 - 6\zeta_2^2)\mu v^4 \\
 &\quad - \zeta_2(1 + \mu - 2\zeta_1^2)[3 + \mu - 4\zeta_2^2(2 + \mu)]\mu v^5 \\
 d_4 &= \mu v^2 \{ \zeta_1[2 + \mu + \mu(2 + \mu)v^2] - 4\zeta_1^3 \\
 &\quad + \zeta_2 v[2 + 2\mu + \mu^2 + \mu(2 + \mu)^2 v^2] - 4\zeta_1^2 \zeta_2(1 + \mu)v \} \\
 d_5 &= -2\zeta_1(1 - 2\zeta_2^2)\zeta_2^2\mu + \mu \{ \zeta_2 - \zeta_2^3(2 + \mu) \\
 &\quad - 2\zeta_1^2 \zeta_2[1 - 2\zeta_2^2(2 + 3\mu)] \} v - \zeta_1 \mu[1 + \mu \\
 &\quad - 2\zeta_1^2(2 + \mu) + 4\zeta_1^4 + 6\zeta_2^2\mu - 12\zeta_2^4\mu(2 + \mu)]v^2 \\
 &\quad - \zeta_2 \mu[2 + 2\mu + \mu^2 - 2\zeta_1^2(4 + 6\mu + 3\mu^2) \\
 &\quad + 4\zeta_1^4(2 + 3\mu) + 4\zeta_2^2\mu(2 + \mu) - 4\zeta_2^4\mu(2 + \mu)^2]v^3 \\
 &\quad - \zeta_1 \mu^2(1 + \mu - 2\zeta_1^2)[1 - 6\zeta_2^2(2 + \mu)]v^4 \\
 &\quad - \zeta_2 \mu^2(2 + \mu)(1 + \mu - 2\zeta_1^2)[1 - 2\zeta_2^2(2 + \mu)]v^5
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) と (23) で構成される連立方程式も主系減衰 ζ_1 がゼロの特別な場合には因数分解でき、代数的に解くことができる。その解は式 (8) と一致することを確認している。主系減衰がゼロでない場合には、*Mathematica* のコマンド “NSolve” で解くことができ、その結果が Fig. 7 に示されている。

Fig. 7 (a) から明らかなように、アクセランス伝達関数では、最適同調比 ν_{opt} は ζ_1 の増加と共に大きくなる。また、他の二つの伝達関数と違い、質量比 μ が大きくなるに従って最適解の存在領域が狭くなる。それは、Fig. 7 (c) に示されるように、 μ が大きくなると、より小さな ζ_1 において h_{min} がその最小値 “1” に到達し、これ以降は最適解が存在しないからである。

さらに詳しいことは、最適化されたアクセランス伝達関数の Fig. 8 を観察するとよく理解できる。Fig. 8 (a) – (d) の各図において、赤線 ($\zeta_1 = 0.7071$ を除く最大減衰比の線) は最適値が存在する極限における伝達関数の形を表している。一方、グレーの曲線は Fig. 1 (a) の 1 自由度振動 (SDOF) 系の $\zeta_1 = 0.7071$ に対応する応答曲線である。どちらの曲線も最大値は 1 になっているが、赤線の方は一旦 “1” に到達した後、減少に転じてから再び増加して 1 に漸近していくのに対して、グレーの曲線は単調増加によって 1 に漸近していく。このことは、特に Fig. 8 (d) の $\zeta_1 = 0.27071$ と $\zeta_1 = 0.7071$ の曲線によく示されている。すなわち、Fig. 4 に示されたコンプライアンス伝達関数では最適値の極限は 1 自由度振動系の $\zeta_1 = 0.7071$ の曲線に近づいていくが、Fig. 8 に示されたアクセランス伝達関数における最適値の極限は 1 自由度振動系の $\zeta_1 = 0.7071$ の曲線ではないという違いがある。

7. 結 言

単一質量の粘性減衰型動吸振器の H_∞ 最適化に関する研究は90年以上の歴史があるが、実はまだ未完の研究でもあった。主振動系に粘性減衰が存在する場合の動吸振器の最適解が、数値解または近似解という不完全な形でしか得られていなかったのである。本論文はこの長い研究に対する現時点での到達点である。主振動系の代表的な3種類の伝達関数について粘性減衰型動吸振器の H_∞ 最適化を行い、以下の結論を得た。

(1) モビリティ伝達関数については、動吸振器の最適同調条件が単独の6次代数方程式を解くことによって精度的に

Fig. 7 Optimization of the accelerance transfer function for a damped primary system by the H_∞ criterion.

Fig. 8 Optimized accelerance transfer functions for a damped primary system based on the H_∞ criterion.

厳密解と遜色のない数値解が得られる。この方程式を数式処理ソフトの *Mathematica* のコマンド “NSolve” で解くと6個の解が得られるが、最適減衰比も含めると正の実根の組み合わせは1組しか現われない。そのことから上記の6個の解の中から最適解を見出すのは容易である。

(2) コンプライアンス伝達関数とアクセランス伝達関数については、最適解の導出は三元連立代数方程式を解く問題に帰着される。この方程式も上記のコマンド “NSolve” で解くことができ、得られた約70組の解のうち、最適解は1組のみである。ここでも正の実根は1組しか現われない。

(3) 上記の単独の高次方程式あるいは連立方程式は、主系減衰がゼロの場合には因数分解によってさらに簡単な式になり、それらの式を解くと以前に報告されていたのと同じ厳密解が得られる。

8. 謝 辞

本研究を遂行するにあたっては、汎用数式処理ソフトの *Mathematica* Ver. 12.0 には大変お世話になった。 *Mathematica* 開発者の Stephen Wolfram 氏には最大級の敬意を表する。また、本研究は日本国の文部科学省の科学研究費助成金(19K04276)の支援を受けている。合わせて謝意を表する次第である。

参考文献

- 1) Watts, P., On a Method of Reducing the Rolling of Ship at Sea, Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol.24 (1883), 165-190.
- 2) Frahm, H., Device for Damping Vibrations of Bodies, U.S. Patent No.989 (1911), 3576-3580.
- 3) Asami, T., Nishihara, O., and Baz, A. M., Analytical Solutions to H_∞ and H_2 Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Attached to Damped Linear Systems, ASME J. Vib. Acoust., Vol.124, No.2(2002), 284-295.
- 4) Ormondroyd, J., and Den Hartog, J. P., The Theory of the Dynamic Vibration Absorber, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.50, No.7 (1928), 9-22.
- 5) Hahnkamm, E., Die Dämpfung von Fundamentalschwingungen bei veränderlicher Erregerfrequenz, Ingenieur Archiv, Vol.4 (1932), 192-201.
- 6) Brock, J. E., A Note on the Damped Vibration Absorber, ASME J. Applied Mech., Vol.13, No.4(1946), p.A-284.
- 7) Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations, 4th ed. (1956), McGraw-Hill, New York.
- 8) Korenev, B. G., and Reznikov, L. M., Dynamic Vibration Absorbers (1993), John Wiley & Sons, New York.
- 9) 西原修, 松久寛, 動吸振器の最大振幅倍率最小化設計(代数的な厳密解の導出), 日本機械学会論文集(C編), Vol.63, No.614 (1997), 3438-3445.
- 10) Nishihara, O., and Asami, T., Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Vibration Absorbers (Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors), ASME J. Vib. Acoust., Vol.124, No.4 (2002), 576-582.
- 11) Asami, T., and Nishihara, O., Closed-Form Solution to H_∞ Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems), ASME J. Vib. Acoust., Vol.125, No.3 (2003), 398-405.
- 12) Ikeda, K., and Ioi, T., On the Dynamic Vibration Damped Absorber of the Vibration System, Bull. of the JSME, Vol.21, No.151 (1978), 64-71.
- 13) Randall, S. E., Halsted, D. M., and Taylor, D. L., Optimum Vibration Absorbers for Linear Damped System, ASME J. of Mechanical Design, Vol.103, No.4 (1981), 908-913.
- 14) Thompson, A. G., Optimum Tuning and Damping of a Dynamic Vibration Absorber Applied to a Force Excited and Damped Primary System, J. of Sound and Vibration, Vol.77, No.3 (1981), 403-415.
- 15) Soom, A., and Lee, M., Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped System, ASME J. Vib. Acoust., Vol.105, No.1 (1983), 112-119.
- 16) Sekiguchi, H., and Asami, T., Theory of Vibration Isolation of a System with Two Degrees of Freedom, Bulletin of the JSME, Vol.27, No.234 (1984), 2839-2846.
- 17) Crandall, S. H., and Mark, W. D., Random Vibration in Mechanical Systems, (1963), Academic Press, p.71.
- 18) 西原修, 松久寛, 安定度規範による制振装置の設計と調整, D&D Conference '97, No. 97-10-1 (1997), 165-168.
- 19) Iwanami, K., and Seto, K., An Optimum Design Method for the Dual Dynamic Damper and Its Effectiveness, Bulletin of the JSME, Vol.27, No.231 (1984), 1965-1973.
- 20) 神谷圭二, 鎌形健太郎, 松本進, 背戸一登, 多重動吸振器の最適設計法, 日本機械学会論文集(C編), Vol.62, No.601 (1996), 3400-3405.
- 21) 安田正志, 潘公宇, 直列二重動吸振器の最適設計と制振効果, 日本機械学会論文集(C編), Vol.69, No.688 (2003), 3175-3182.
- 22) 潘公宇, 安田正志, 多重動吸振器のロバスト最適設計方法, 日本機械学会論文集(C編), Vol.71, No.712 (2005), 3430-3436.
- 23) Asami, T., Exact Algebraic Solution of an Optimal Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Attached to a Damped Primary System, ASME J. Vib. Acoust., Vol.141, No.5 (2019), 051013.
- 24) Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M., Jacobian Determinant, Section 14.313 in Tables of Integrals,

- Series, and Products, 6th ed. (2000), San Diego, CA: Academic Press, 1068-1069.
- 25) Asami, T., Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel, ASME J. Vib. Acoust., Vol.139, No.1 (2017), 011015.
- 26) Asami, T., Mizukawa, Y., and Ise, T., Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Minimizing the Mobility Transfer Function, ASME J. Vib. Acoust., Vol.140, No.6 (2018), 061012.
- 27) 大野央人, 鉄道車両の乗り心地, 騒音制御, 日本騒音制御工学会, Vol.21, No.1 (1997), 17-20.
- 28) 武井一剛, 石黒陸雄, 乗員の官能評価にもとづく乗り心地評価, 豊田中央研究所 R&D レビュー, Vol.30, No.3 (1995), 47-56.
- 29) Asami, T., and Yamada, K., Numerical Solutions for Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Attached to a Damped Primary System, Bull. of the JSME Mechanical Engineering Journal, Vol.7, No.2 (2020), 19-0051.
- 30) 浅見敏彦, 二重動吸振器の最適設計のための代数的厳密解, ばね論文集, 第 65 号 (2020), 59-68.
- 31) Akritas, A. G., Sylvester's Forgotten Form of the Resultant, Fibonacci Quarterly, Vol.31, No.4 (1993), 325-332.
- 32) 西原修, 二重動吸振器の最大振幅倍率最小化設計(並列型および直列型における最適性基準法の適用), 日本機械学会論文集, Vol.83, No.849 (2017), 16-00549.