板番号	第3表 国鉄担ばね各 板曲率計算例		第4表 第3表の修正 例	
	ρ (mm)	$1/\rho$ (mm ⁻¹)	ρ (mm)	$1/\rho$ (mm ⁻¹)
1	45×10 ³	2.2222×10 ⁻⁴	47×10 ³	2.1277×10 ⁻⁴
2	40	2.5000	42	2.3810
3	35	2.8571	37	2.7027
4	31	3.2258	32	3.1250
5	28	3.5714	28	3.5714
6	28	〃	28	〃
7	25	4.0000	28	〃
8	25	〃	25	4.0000
9	25	〃	25	〃
10	23	4.3478	25	〃
11	23	〃	23	4.3478
12	23	〃	23	〃
13	22	4.5455	23	〃
14	22	〃	23	〃
合計		52.0824×10 ⁻⁴	合計	50.4419×10 ⁻⁴

このとき(4)式から,

$$\sigma_{14m} = 62.8 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{1m} = 33.9 \text{ kg/mm}^2$$

……(g),

となる。

以上のように(4)式を用いると簡単かつ合理的に各板の曲率を決定することが出来る。

- (1) 昭和25年10月26日日本機械学会東京臨時大会講演会に於て発表, 文部省自然科学研究費による研究。
- (2) H. Stark, Auto-tech. Z., Bd. 34 Nr. 33 S. 751—756, (1931—11—30)
- (3) 佐賀二郎, 機械学会誌, 53巻377号, P. 225, (昭25年6月)
- (4) E. Lehr, Forsch., Bd. 8 Nr. 4, S. 8—16, (1938—6—25)
- (5) 筆者, 機械学会講演会(昭25年4月)にて発表。
- (6) V.D.I., "Die Federn," A. I. 23.(C), (1938)

板ばねの摩擦と動的特性⁽¹⁾

小 田 尚 輝*

ON THE EFFECT OF FRICTION OF LAMINATED SPRINGS ON THEIR VIBRATION CHARACTERISTICS

Naoteru Oda

Making leaves of 20 mm × 3 mm section from a spring steel, we assembled model laminated springs of cantilever. The spans were 300 mm, off-set were uniform steps and the number of leaves were 3, 5 and 7. The frictional coefficients of the laminated springs were 0.017, 0.028 and 0.040, respectively.

We studied the characteristics of the vibrating systems consisted of these springs and the mass attached to the springs. Exciting the sprung mass, we observed the exciting frequency and the full amplitude; experiments were done at the frequency up to 400 cpm. and the full amplitude of the mass up to 2 mm.

The results: At certain exciting forces, there were differences in the vibration characteristics when the exciting frequency was increasing and the case when it was decreasing, as it usually occurs in the non-linear vibrating systems. Considering that the area of static load-deflection hysteresis curve means the energy loss during 1 cycle, and that resonance occurs when the loss becomes equal to the input energy, we can estimate the resonant amplitude of the system. It becomes clear that difference between the observed and the estimated amplitude is below 20 %.

§ 1. 緒 言

現在の鉄道車輛の台車構造においては, 板ばねは車輛

の振動特性に重要な役割を果している⁽²⁾。即ち板ばねは

* 新扶桑金屬工業株式會社製鋼所

Table 1. Harmonics of the wave-form of Photo. 3, analysed by Fourier Analyser in the form

$$f(t) = a_0 + \sum (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t).$$

Harmonics	$f=14.7\text{gr } (2a=5.43\text{mm})$ 267 cpm. (Resonance)				$f=41.9\text{gr } (2a=15.45\text{mm})$ 216 cpm (Resonance)				$f=41.9\text{gr } (2a=15.45\text{mm})$ 192 cpm (decreasing rpm)			
	a_i mm	b_i mm	$(a_i^2+b_i^2)^{1/2}$ mm	perce- ntage %	a_i mm	b_i mm	$(a_i^2+b_i^2)^{1/2}$ mm	perce- ntage %	a_i mm	b_i mm	$(a_i^2+b_i^2)^{1/2}$ mm	perce- ntage %
1	-0.231	-0.048	0.236	100	0.475	-0.004	0.475	100	0.190	0.004	0.190	100
2	0	0.036	0.036	15.2	0.010	0.015	0.018	3.8	-0.003	-0.015	0.016	8.2
3	-0.026	-0.007	0.027	11.5	-0.012	-0.006	0.014	2.9	-0.004	0.005	0.007	3.6
4	-0.010	-0.005	0.011	4.8	-0.001	0.009	0.009	1.8	0.011	0.010	0.015	7.8
5	0.001	0.014	0.014	6.1	-0.004	0.007	0.009	1.8	0.005	0.003	0.007	3.6
6	0.007	0.007	0.011	4.5	0.003	0.003	0.006	1.2				

巻ばねと共に車輛の緩衝装置として欠くべからざるものになっており (Fig. 1), 特に板ばねはその摩擦によつて振動エネルギーを吸収する目的を持っている。

Fig. 2はこのことを示す一例であつて, これは同一の車輛において (振動模型は Fig. 1 で与えられるもの), 板ばねの胴締間に木片を入れて仿かぬようにした場合と普通のように仿いている場合の走行性を比較したものである(3)。この車輛の場合では上下動の差が最高 25% 程度となつている。

Fig. 2. The difference of the two cases, the laminated springs are free to move and forbidden to move.

The laminated springs are

- forbidden to move } vertical vibration
- — free to move } vertical vibration
-△..... forbidden to move } transversal vibration
- ×— free to move } transversal vibration

しかし Fig. 1 の如き振動系に対する解析的取扱には何れも板ばねの有する固体摩擦の影響のために困難となつている。この板ばねそれ自身の振動特性については, 最近種々研究があるが(4), いまだ不明の点もかなり多いように思われる。我々の研究の目的は Fig. 1 の振動系に対する解析であるが, この板ばねの摩擦の問題のためにここでは板ばね自身の動的特性を取り上げようと思う。

しかしここで考へべきことは, 普通の板ばねでは, 幾多の因子を問題にしなければならないことで, 例えばニップの影響, 胴締の影響などが入ってくる。更に組立てた板ばねでは摩擦係数がほぼ一定の範囲にあり, かつ実験装置も大規模になる。そこで此研究では先づ模型によつて板ばねの摩擦と動的特性の関係を調べる事にした。

§ 2. 板ばねの模型および実験装置

模型のばね片としては, 当所にて製作中のばね材 SUP3 を厚さ 3mm に圧延し, 長さ 450mm (又は 300mm) 巾 20mm に切出し, これに正規の熱処理を施したものをを用いた。これを適当に組み合わせて片持梁の板ばねを組立てる。この個々のばね片には所謂ニップに相当するものはつけてない。その板ばねとしての特性は, 親ばねの先端に荷重を載せることによつて, それぞれのばね片が先端で接触して摩擦の生ずることを利用したものである。

ここで報告するのは, 板ばねの枚数が 3, 5, 7 の場合の実験結果であるが, その場合の模型の組立寸法および静的荷重曲線は Fig. 4, 5, 6 に示してある。何れもスパンを 300mm とし, 段差を等しくしてある。

実験装置は Fig. 3 および Photo. 1 に示す。2HP 超分撹電動機 (300~3000 rpm) を用い, 二段に減速して減速比約 7.7 として偏心装置を駆動する。これから巻

Fig. 3. Experimental apparatus. Amplitude of the mass is observed by an optical lever.

Photo. 1. Experimental apparatus.

ばね k_2 を介して板ばねにかかる質量 M を加振する。さらに k_2 の静的張力を補償するために M を k_1 で釣つておく。この際、質量 M としては円筒形の鉄または鉛を用い、その円筒の母線が鉛直方向に正確に向いているように注意した。偏心装置の偏心度は連続的に変化しうるようにし、最大 $2a=100\text{mm}$ までとりうる。

質量 M の振巾の測定には光の挺子を用いた。ここで特に挺子の各部にガタのないように注意し、実験には精密級の電圧計のピボットを流用して組立てた。その取り付け状態は Photo. 2 の通りである。普通振巾のみの測定には凹面鏡の反射を利用し、また波形の撮影にはオシログラフ用鏡からの反射をオシログラフのオプティカル・ボックスに入れ、普通のオシログラムと同様に撮影した。また波形を撮影する場合には、ばね k_2 の偏心側の動きを同時に入れて位置関係を見ることにした。光の挺子の

Photo. 2. A model laminated steel springs of 5 leaves and an optical lever

Photo. 3. Some examples of wave form. The wave forms of external force are photographed inversely.

倍率は最大約 200 倍である。Photo. 3 はその波形の一例である。

Fig. 9a. Static load-deflection hysteresis curves (7 leaves).

Fig. 9b. Static load-deflection hysteresis curves (7 leaves).

の上下に出るが、ここでは片側のみで試験している。しかしここで報告する振動試験の振動程度では、静的荷重曲線の加荷および減荷の曲線は殆ど平行と見てもよいと思われる。従つてこの両方の場合の履歴曲線の形は実験誤差の範囲で等しいと見てもよいと思う。

このようにして得られた静的履歴曲線によつて囲まれる面積をプランニメーターで測定し、その面積と、そのときの最大撓み（動的状態では全振幅に相当するもの）との関係を図示したものが Fig. 10, 11, 12 の太い実線である。これらを見るとその共通のこととして、全振幅がある一定以上の大きになると、面積が直線的に増加す

Fig. 10. The area of the static load-deflection hysteresis curves and the energy input by the external forces (3 leaves).

Fig. 11. The area of the static load-deflection hysteresis curves and the energy input by the external forces (5 leaves).

Fig. 12. The area of the static load-deflection hysteresis curves and the energy input by the external forces (7 leaves).

るものと見做しうることがわかる。

また Fig. 7, 8, 9 から明かにわかるように履歴曲線

は枚数の少ない程平行四辺形に近い形もしている。従つて上の面積が直線的に増加する部分に対しては、平行四辺形の相対する二辺は変化せず、他の相対する二辺の長さが変化するとして近似的にその面積の計算が出来る。

§ 4. 共振特性

Fig. 3 に示したような実験装置によつて、加振々巾 $2a$ を一定に保ち、加振々動数を次第に増加し、ある程度に達したならば逆に次第に減少して所謂共振特性を調べた。実験は何れも最大振巾 1.5mm 程度までで行つた。これは鉄道車輛の板ばねの静的撓みと動的撓みの比と大体同程度であることをねらつたのである。また共振々動数も現在と同程度の 100~150 rpm 附近で実験を行いたかつたが、これは装置の都合で充分とはゆかなかつた。

これらの共振特性を求める場合は一つの加振々巾に対する特性に約 1 時間かかる程度で、極めてゆつくり実験を行つた。また特に 3 枚の場合は同一加振々巾で 5 回程度の実験を繰返し共振特性の再現性を確めた。全振巾が 1.5mm 程度の場合には実験誤差よりやや大きいと思われる程度の差が生じた場合もあるが、振巾が小さいときは充分再現性がある。

Photo. 3 に実験で表はれる波形の一例を示す。何れも 3 枚の場合で、加振力 f および加振々動数がそれぞれ、

Fig. 13. Resonance characteristics of the model laminated spring (3 leaves).

Fig. 14. Resonance characteristics of the model laminated spring (5 leaves).

Fig. 15. Resonance characteristics of model laminated springs (7 leaves).

$f = 14.7$ g ($2a = 5.43$ mm), 267 rpm; $f = 41.9$ g ($2a = 15.45$ mm), 216 rpm, 192 rpm (加振々動数下降時)の3つの場合である。この中の初めの2つは何れも共振の場合の波形である。これらの波形が正弦波からどの程度歪んでいるかを見るためにフーリエ解析を行った結果は Table. 1 に示す通りである⁽⁵⁾。その歪みの程度を見

る一つの方法として基本波を100としたときの高調波の大きい割合を表示してある。この二通りの共振点では振巾の小さい方が正弦波からの歪みが大い。

これら 3, 5, 7 枚の場合の共振特性は Fig. 13, 14, 15 に示すが、これらを見て直ちにわかることは、加振々巾が大きくなるに従い共振々動数が低い方へずれることで

ある。このことは既によく知られたことである。しかしここでよく注意すれば、ある適當の加振々巾のときに加振々動数を増加しながらとつた場合と減少しながらとつた場合とで、共振特性が一致しないことがわかる。即ち3枚の $2a=9.97\text{ mm}$ の場合のごとく、加振々動数を増加してゆくとある振動数で振巾が飛躍的に大きくなり、逆に振動数を減少してくるとこれと違つた振動数で飛躍的に振巾が小さくなる。このような現象は加振々巾の大きさのある一定の範囲で起つていて、その範囲よりも加振々巾が大きくても、また小さくても起らない。

この加振々動数の増加と減少で特性の一致しないのは非線型振動ではよく見られることであるが、従来の板ばねの振動試験ではこのことは見られない⁽⁶⁾。しかも今までよくある非線型の場合と非常に違うのは、この飛躍現象が加振々動数を増加する場合には起るが、減少する場合には起ないと云うようなこともあることである（例えば3枚 $2a=15.45\text{ mm}$ ）。5, 7枚の場合のこれらの現象は Fig. 14, 15 に別にとり出して示してある。なお、この飛躍現象については更に実験を進めたいと思う。

§ 5. 実験結果の考察

これらの実験結果に対する理論的考察は別に行うこととして⁽⁷⁾、本報では実験上の誤差に関する議論およびエネルギー法による共振々巾の説明について報告したいと思う。

(1) 質量の回轉運動の影響

この実験のように質量 M として有限の大きさのものをを用いると、如何なる場合にも M の上下方向の運動に伴つて回轉運動がおこる。回轉運動が生ずれば必然的に運動のエネルギーが増加し、上下振動に対しては質量が見掛け上増加したことになる。その程度を見るために1枚のばねの場合について簡単な計算を行つてみる。但し回轉運動が上下振動と別の型の振動となる場合は問題は別で、ここではそのような場合は考えていない。

1枚の板ばねを片持梁とし、先端に質量 M をつけた場合の先端の静的撓み δ_0 および傾斜角 φ_0 は、

$$\delta_0 = \frac{Mgl^3}{3EI}, \quad \varphi_0 = \frac{Mgl^2}{2EI}.$$

但し l : 板ばねの長さ, I : 板ばね断面の慣性モーメント, E : ヤング率である。

これより、

$$\varphi_0 = (3/2l)\delta_0.$$

従つてこの位置からの微小変位 φ, δ に対し、

$$\varphi = (3/2l)\delta_0.$$

が成立つ。振動する質量の回轉軸の周りの慣性モーメントを I_0 とすると、この系の運動のエネルギー T は、

$$T = (1/2) \cdot (M\dot{\delta} + I_0\dot{\varphi}).$$

質量として高さ h , 半径 r の円筒をばねの下方につけると、上の φ と δ の関係を考慮して、

$$T = \frac{1}{2} M \left\{ 1 + \left(\frac{3}{2l} \right)^2 \left(\frac{3r^2 + h^2}{12} + \frac{h^2}{4} \right) \right\} \dot{\delta}^2.$$

質量として3枚の場合に用いた円筒 $2r=96\text{ mm}$, $h=95\text{ mm}$ について計算すると、補正項は、

$$\alpha = (3/2l) (3r^2 + 4h^2)/12 = 0.086.$$

従つて周期の増加は、 $(1/2) \cdot 0.086 = 0.043$,

即ち 4.3% の増加となる⁽⁸⁾。

この考え方と 3, 5, 7 枚のそれぞれについて周期の増加を計算すると、3.8, 9, 16 % となる。

(2) 加振用ばねの影響

Fig. 3 のような実験装置では、板ばねおよび巻ばね k_1, k_2 を綜合したものがばね系をなしている。その静的履歴曲線は Fig. 7, 8, 9 に示してある。しかしこの場合板ばねのみの系に比べ、どれ位異つているかを見るために $(k_1 + k_2)/K$ を計算してみると、3, 5, 7 枚の場合でそれぞれ 0.062, 0.045, 0.071 となる。但し K としては普通に云われている意味での板ばね常数を用いてある。動的な場合のばね常数と云うのはまだ明瞭でないが、上の K よりも剛いと考えるのが普通であろう。従つてこの $(k_1 + k_2)/K$ は上の値より小さくすると考えるべきであろう。

(3) 親ばねのみの振動

質量 M を加振する場合、子ばねは上下方向に運動せ

Fig. 16. At certain exciting forces, amplitude make a loop change (5 leaves).

ず、親ばねのみが振動するような型の振動は起つていないであろうか。即ち Fig. 16 のごとく、片持梁が更に点 A で支えられているような型の振動は問題にしくてもよいのであろうか。このことは特に 3 枚の場合のように段差が大きい場合には問題と考えられるので、3 枚の場合の親ばねについて計算してみることにする。

Fig. 16 のような場合に先端に荷重をかけると、ばね常数に相当するものは、

$$k = \{l_2^3/2 - 3/4 \cdot l_1(l_2 - l_1)^2\} / EI$$

となる。3 枚の場合は $l_2 = 300\text{mm}$, $l_1 = 200\text{mm}$ で $k = 1.15\text{ kg/mm}$, これから $Mg = 5.26\text{ kg}$ として固有振動数 $f_0 = 7.34\text{ c/s}$ となる。この振動数では実験の範囲内では影響は表われない。

(4) エネルギー法による共振の振巾の説明

加振々巾 a と加振ばねのばね常数 k_1 がわかれば、加振の 1 周期にその振動系に与えられるエネルギーを求むることが出来る。即ち加振々動が正弦波のときは、それは $\pi k_1 a x_0$ となる。ここに x_0 は質量の振巾である。共振状態ではこのエネルギーが、振動系の内部で 1 周期に費されるエネルギーと等しい場合であると考えられるので⁽⁹⁾、この $\pi k_1 a x_0$ の値を静的荷重曲線によつて囲まれる面積の曲線の図に書き入れてみる。動的な場合の荷重

Fig. 17. At certain exciting forces, amplitude make a loop change (7 leaves).

曲線がこの静的な場合と等しいならば、この両方の線が交わる振巾が共振の振巾を与えるものと考えられる。

Fig. 10, 11, 12 にはこの両方の曲線が書き入れてある。ここで外力の 1 周期でこの系に与えられるエネルギー $\pi k_1 a x_0$ は直線となる。図中の点線は実測した振巾をこの直線上にとり、これを結んだもので、動的な場合のエネルギー吸収はこの曲線のように変化するのではないかと思われる。

これを見ると 5 枚の場合にはこの考え方が最もよくあ

てはまり、3 枚の場合は高々 10%, 7 枚ではかなりの差異が生じており、最大 20% に及んでいる。このことは 7 枚程度の板ばねで摩擦が大きくなると、動的な場合の荷重と撓みの履歴曲線が静的に求めたものと、かなり違ってくることを示すように思える。

Fig. 18. A mode of vibration of one leaf.

これらの面積の曲線と、共振特性を比較して直ちに気のつくことは、§ 4 で述べた共振特性の飛躍現象は、面積曲線の曲線部から直線部に移る近傍で現われることであつて、これは 3, 5, 7 枚の場合に共通である。

§ 6. 結 論

板ばねの摩擦と振動特性の関係を研究する目的で、模型の片持梁の板ばねを組立て、3, 5, 7 枚の場合についてその振動特性を調べた。これらのばねの摩擦係数はそれぞれ 0.017, 0.028, 0.040 である。偏心装置から加振用ばねを介して、普通よく行はれているような方法でその共振特性を求め、次の結果が得られた。

- (1) 振動試験を行つた程度の振巾に相当する範囲で、荷重と撓みとの履歴曲線を静的に求めると、振巾がある一定以上の大きになると、その履歴曲線によつて囲まれる面積が振巾と共に直線的に増加することがわかる。
- (2) 加振力が大きくなるに従い共振々動数は低くなるが、これは既に発表された幾多の研究結果と同様である。
- (3) ある一定の加振力の場合に、加振々動数を増加しながら得られた共振特性と、減少しながら得られた共振特性とは一致せず、非線型特性が見られる。これは一定の加振力の大きさの範囲で起り、加振力がそれより大きくても、また小さくても現われない。この現象が現われるのは、(1)の静的履歴曲線によつて囲まれる面積が直線的に増加し始める近傍の振巾においてである。

(4) 共振状態においては、1 周期の間に外力によつて与えられるエネルギーと、板ばねの摩擦によつて消費されるエネルギーが等しいと考えられる。いまこの摩擦によつて消費されるエネルギーが(1)の静的履歴曲線によつて囲まれる面積に相当するものと考え、5 枚の場合の共振の振巾は非常によく説明される。3 枚の場合は最大 10% 程度、7 枚の場合は最も悪く最大約 20% 程度の差が見られる。

(5) (4)の結果から次のことが云える。即ち(1)の荷重曲線によつて囲まれた面積が予め計算出来れば、板ばねと質量からなる振動系の最大振巾を計算のみによつて推定することが出来る。それには荷重曲線に加荷曲線から減荷曲線に移る間の部分の計算式が必要である⁽¹⁰⁾。

(6) (4), (5)で述べたことは、動的状態における荷重曲線の履歴現象が現在のところ不明であるために、静的荷重曲線を用いたものである。何らかの方法で動的状態における履歴特性が明かとなれば、(4)のエネルギー法がもつと正確に適用出来るであろう。

〔註〕

(1) 日本機械学会第27期講演會(昭25. 4)において講演したものに若干加筆せるもの。

(2) 日本機械學會吳地方臨時大會講演會(昭24. 10)において講演；永島菊三郎、小田尙輝；臺車構造における板ばねの役割；論文は扶桑金屬, 3 (1951) 27.

(3) 2の一部

(4) 日本機械學會(昭25. 4)において本論文と同時に次の諸研究が發表された。廣瀬正吉；重ね板ばねの動的剛性について。論文は鐵道業務研究資料, 第7巻第18號(昭25. 11), 4頁；樺木義一；重ね板ばね特性を有す

る系の静的特性と動的特性の關聯性について；樺木義一；履歴損失を伴う復原力特性を有する振動系の強制振動に對する圖式解法について。

なお、大阪大學菊川助教授の研究も發表された。Makoto Kikukawa : On Forced Vibrations of Systems with Hysteresis Characteristics, Technology Reports of the Osaka University, 1 (1951) 1.

(5) 大阪大學工學部城研究室の御厚意により、同研究室のフーリエ解析器によつたもの。

(6) (4)の諸研究では何れも表はれていない。

(7) (4)の樺木教授、菊川助教授の研究とは獨立に大阪大學工學部福尾氏の研究がある。

(8) Rayleigh : Theory of Sound, Vol. 1, p. 113

(9) Den Hartog : Mechanical Vibrations, p. 66.

(10) この研究と同時に機械學會(昭和25. 4)で次の研究が發表された。永島菊三郎、佐賀二郎；板ばねの撓み計算式。この論文は機械學會論文集に掲載の豫定；なお計算例については Jiro Saga : On the Hysteresis Curve of Laminated Springs, J. Institute of Polytechnics, Osaka City University, Vol. 1. Series E (1950) 15.

重ね板ばねの振動試験

志 熊 平 治 郎*

VIBRATION TEST OF LEAF SPRINGS

Heiji Shiguma

To understand the mechanism of inter-leaf friction in leaf springs, the author tried the vibration test for three kinds of springs.

By these tests it has become clear that damping factors and natural frequencies are variable with amplitude. It is considered that variation of damping factor shows complex of friction mechanisms, and variation of natural frequency is due to hysteresis characteristics.

Now, the author intends to investigate variation of forced vibration characteristics by amplitude and relation of vibration test to static test and, moreover, influence of nip, lubrication and liner between leaves on vibration characteristics of leaf spring.

1. 序

重ね板ばねは振動の際クーロン摩擦を伴うことは周知のところであるが、実際のばねについて測定例を余り見ない。今回吾社の板ばね疲労試験機兼振動試験機によ

り3個の現用ばねにつき実測を試みた。

試験は一定重錘をばねに吊し、強制振動と最初或る変位を与えておいての自由振動を行なわせ、実測しただけ

* 日本發條株式會社