円形断面材による楕円状筒形コイルばねについて

Helical Springs Ellipsed Coiling of Round Bars

竹 之 内 明 好*

A. TAKENOUCHI

1. ま え が き

円形断面円筒形コイルばねは上下荷重だけの作用を受ける場合には、各部応力が均一であって理想的であるが、ウィッシュ・ボーン型の懸架装置に取付けられている円形断面円筒コイルばね上の各部応力は不均一となって、集中的にある一部分において最大となる。

そこでニアアクションをともし系において、応力集中を緩和する一例として円形断面楕円状筒形コイルばねについて検討する。

図 1

2. 記 号

d はばねの素線径 mm; n はコイルばねの有効巻数;
 a は楕円長軸半径 mm; b は楕円短軸半径 mm; $\mu = a/b$;
 E はコイルばねの縦弾性係数 $\approx 21000 \text{ kg/mm}^2$; G はコイ

ルばねの横弾性係数 $\approx 8000 \text{ kg/mm}^2$; k は楕円状筒形コイルばねに上下荷重が働く場合のばね定数 kg/mm ; k_0 は直径 $(2a)$ の円筒形コイルばねのばね定数 kg/mm ; P はコイルばねに働く上下荷重 kg ; L は楕円状筒形コイルばねの 1 コイル当りの切断長 mm; θ は楕円上の任意の点 $C(x, y)$ と原点 O とを結ぶ直線と x 軸とがなす角 (rad); α は点 C を通る楕円の法線と x 軸とがなす角 (rad); $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; x は点 C の x 座標; y は点 C の y 座標; τ_A は点 A においてコイルばねに働く最大せん断応力 kg/mm^2 ; τ_B は点 B においてコイルばねに働く最大せん断応力 kg/mm^2 ; M_0 はニアアクションによって生ずるモーメント $\text{mm} \cdot \text{kg}$.

3. 計 算 式

円形断面楕円状筒形コイルばねの楕円形状の式を(1)式で表わす。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

楕円(1)上の任意の点 $C(x, y)$ に働く、上下荷重 P によるモーメントを M_p 、楕円の切線成分のモーメントを M_T 、法線成分のモーメントを M_B とすれば、それぞれ次式のようになる。

図 2

* 日本発条株式会社

図 3

$$M_P = P \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \dots \dots \dots (2)$$

$$M_T = P \cos (\beta - \theta) \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \dots \dots \dots (3)$$

$$M_B = P \cos (\alpha + \theta) \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \dots \dots \dots (4)$$

ここで

$$\tan \alpha = \frac{b \cos \theta}{a \sin \theta}, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (5)$$

である。

3.1 円形断面楕円筒形コイルばねを平行圧縮する場合のたわみ δ

$$\begin{aligned} \delta / \delta_c = & \frac{2}{\pi \mu^3} \left[\frac{2G}{E} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \left\{ -(\mu^2+1)J_1 + 2J_2 + (\mu^2-1)J_3 \right\} \right. \\ & + \left\{ J_0 + \frac{(\mu-1)(\mu^2+1)}{(\mu+1)} J_1 + \frac{(\mu-1)(\mu^2+2\mu-1)}{(\mu+1)} J_2 \right. \\ & \left. \left. - (\mu-1)^2 J_3 \right\} \right] \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 δ_c は直径 (2a) の円形断面円筒形コイルばねのたわみであって、次式で表わされる。

$$\delta_c = \frac{8n(2a)^3P}{Gd^4} \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \\ J_1(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta \\ J_2(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \\ J_3(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \mu^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

図 5 に μ の値が 1.0~2.0 まで変化するときの $J_0 \sim J_3$ の値を示す。

3.2 上下荷重だけが働く場合のばね定数 k

図 4

図 5

$$k/k_e = \frac{1}{(\delta/\delta_e)} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 k_e は直径 (2a) の円形断面円筒形コイルばねのばね定数であって、次式で表わされる。

$$k_e = \frac{Gd^4}{8n(2a)^3} \quad \dots\dots\dots(10)$$

図 6 に、 μ の値が 1.0~2.0 まで変化するときの k/k_e の値を示す。

図 6

3.3 切断長

円形断面円筒形コイルばねの 1 コイル当りの切断長 L

$$L = 4bJ_0(\mu) \quad \dots\dots\dots(11)$$

図 7 に、 μ の値が 1.0~2.0 まで変化するときの $L/(2\pi a)$ 値を示す。

ここで $2\pi a$ は直径 (2a) の円形断面円筒形コイルばねの 1 コイル当りの切断長である。

3.4 応力

上下荷重 P およびニアクションによって生ずるモーメント M_0 が働く場合、点 A および B の最大せん断応力 τ_A および τ_B は、つぎのように得られる。なお M_0 は図 1 に示される状態では紙面に垂直方向に働く。またここでは M_0 の大きさはコイル上で任意の点において、大きさは同じであるものと仮定する。

$$\tau_A = \frac{Pb\mu \sqrt{1+\lambda^2}}{Z_t} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\tau_B = \frac{Pb(1+\mu\lambda)}{Z_t} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\lambda = \frac{M_0}{Pa} \quad \dots\dots\dots(14)$$

図 7

ここで、

$$Z_t = \frac{\pi}{16} d^3 \quad \dots\dots\dots(15)$$

である。

コイル上の各部に働くモーメントは次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_c &= Pa; & M_{PA} &= M_{PA'} = Pa \\ M_{PB} &= M_{PB'} = Pb \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

円筒形コイルばねにニアクションによるモーメント M_0 が働く場合、点 B に生ずる応力の方が点 A に生ずる応力より高くなることは図 4 (a) から判る。

いま円筒形コイルばねにおいて点 A に生ずる応力の方が点 B のそれより高い条件、すなわち $\tau_A \geq \tau_B$ を求めれば

$$\mu \geq \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。

4. 計算例

円形断面円筒形コイルばねの諸元がつぎのような場合 $d=16\text{mm}$, $D=120\text{mm}$, $n=7$, $k_e=5.42\text{kg/mm}$, $P=745\text{kg}$, $M_0=5000\text{mmkg}$, $\tau=62.0\text{kg/mm}^2$
上記の円形断面円筒形コイルばねとばね定数が同じになる円形断面円筒形コイルばねの諸量を表 1 に示す。

5. 結 言

計算例から、ニアクションをとまう系においては円形断面円筒形コイルばねと円形断面円筒形コイルばねとのばね定数を同じにする場合、円筒形の方が円筒形よりも応力的に楽であって、切断長または重量はそれ

表 1

b, mm	a, mm	μ	$L/(120\pi)$	λ	τ_A, kgmm^2	$\tau_B, \text{kg/mm}$
40	79.5	1.98	1.02	0.0845	74.0	43.0
45	74.5	1.66	1.01	0.0900	69.5	48.0
50	70.0	1.40	1.005	0.0965	65.0	52.5
55	65.0	1.18	1.00	0.1035	60.5	57.0
60	60	1	1	0.1120	56.0	62.0

ほど変わらないことが判る。

また図4から点BおよびB'の応力振巾の方が、点AおよびA'の応力振巾より大きいことが判る。

本紙においては、楕円形について述べたが、直線と円弧とを組合せた曲線とか三角形とかの筒形状のものも

興味があると思われる。なお、(1)コイルばねのピッチアングル効果(2)カーベチュア効果は無視した。

なお以上は理論的、実験的に立証したものであり、これを実用化、特に量産に移すためには製造技術面での研究を必要とするであろう。

〔抄 録〕

非線形ばねの設計

(Improve your Product with Nonlinear Spring)

William A. Welch

Product Engineering, Vol. 36, No. 21 (Oct. 11. '65)

対称形非線形復原力の働く系の強制振動の方程式を $m\ddot{x} + k(x + C^2x^3) = F \cos \omega t$ とすると、この系の固有円振動数はよく知られているように

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{3C^2x^2}{4} \right)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で近似できる。指定された振幅で指定された円振動をもつ非線形系を設計するには、 k と C^2 のいずれか一方の値を仮定して他方を式(1)から算出すればよい。ただし得られた k と C^2 とが妥当な値となるまでには一般に何回かの試行計算が必要である。質量の変位速度と系の固有振動数との関係に指定がある場合にはつぎのようにする。まずばねに貯えられるポテンシャルエネルギーと質量の運動エネルギーとを等置して得られる式と式(1)とから

$$C^2x^4 + \left\{ 2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{x}C^2}{\omega} \right)^2 \right\} x^2 - 2 \left(\frac{\dot{x}}{\omega} \right)^2 = 0$$

が導かれるから、指定された ω と $\dot{x}$ との関係と C^2 の仮定値とを上式に入れて x を求め、それを式(1)に代入することによって k がきまる。 ω が $\dot{x}$ の一次式で要求されている場合には、このようにして求めた結果が要求から2%程度しかはずれない。なおこのほかに折線状の荷重たわみ特性をもつ系の振幅と固有振動数の計算式を紹介し、あわせて片持ばりが荷重とともに放物線状の曲面に接着してゆく場合の計算式にも言及している。

〔小林 節夫〕