引張コイルばねに与える初張力 (Ⅱ)

Initial Tension able to give to Helical Tension Spring

——初張力を大きくすることにより，最大軸荷重，内部応力を減らすことが出来ること——

Bigger the Initial Tension, Smaller the Generated Maximum Load & Internal Stress.

仲 田
M. NAKADA

実*

1. はしがき

筆者はさきに本論文集⁽¹⁾において，引張コイルばねに初張力を与える場合に，各種の製造方法において大した苦勞なしに線間を密着させる程度の第1種の初張力と，設計上の必要から多少の努力を払っても付与したい第2種の初張力とに区分した。

なお後者の第2種の初張力でも，真直であった線材がコイル状に捲かれる段階で，幾何学的には充分大きな初張力に相当する線材のねじり力が発生しうることを指摘した。

引張コイルばねの縮んだ位置にあって，必要とする最小作動荷重が指定され，この位置から限定された作動範囲までこのばねが伸ばされ，この伸び寸法に應ずるばねの軸荷重の下に原位置まで戻り，再び作動指令のあるのを待つようなばねの使用法の場合に，作動範囲が一定であって，縮んだ位置における引張軸荷重が同一であり，伸ばされた位置における軸荷重をより小とする，いわゆるばね定数の小さいものを用いた方が，最大内部応力も却って小さくしうる設計があることを指摘してある。

しかしこれを在来の引張コイルばねの設計法に従って，設計，組立てる場合には，ばね自由長は通常は著しく増大し，装置全体が大形化する傾向となる。

前記の構想の下に，この大形化を防止するためには，著者のいう第2種の初張力をもつコイルばねを利用すれば可能となる。ただし最大軸荷重が稍小さくとも，発生内部応力が大きくなれば，ばね寿命に重大な影響をもたらすことになるので好ましくないことは当然である。

2. ばね定数の異なる2種の引張コイルばねによる設計値比較

2.1 用途上の比較

(図1)において，所要最小作動荷重 P_i は2種のばね

の縮んだ場合の作用位置における軸荷重とし，これから δ だけの変位を必要変位量とする。

2種のばね定数 k_1 ， k_2 のばねを比較使用するとした場合に，それぞれ第1ばねと第2ばねとは表1に示す。

この中前者は在来の設計法によるものを意味し，後者は新提案によるものを意味する。

2.2 特性値の条件と比較

第1および第2ばねは同一目的に使用するものであるため下記の条件があるものとする。

- (a) コイル外径は同一とする。
- (b) 第2ばねの線径はやや細目とする。

図1. ばね定数の小さいばねによる代用法

表1 2種のばねの使用時の比較

	(第1ばね)	(第2ばね)	(備考)
ばね定数	k_1	k_2	
初変位量	$\delta_{01} = P_i / k_1$	$\delta_{02} = P_i / k_2$	P は所要最小作動荷重
変位 (δ) 後の最大軸荷重	$P_1 = k_1 (\delta_{01} + \delta) = P_i + k_1 \delta$	$P_2 = k_2 (\delta_{02} + \delta) = P_i + k_2 \delta$	

東京理科大学理工学部，教授。

表2 仮定条件下における2種のばねの特性値と記号

	(第1ばね)	(第2ばね)	(備考)
線 径	d_1	$d_2 = d_1 \cdot \lambda$	$\lambda < 1$
コイル外径	$D_1 + d_1$	$D_2 + d_2 (= D_1 + d_1)$	[用途上の仮定]
コイル平均径	D_1	$D_2 (= D_1 + (d_1 - d_2))$	$D_2/D_1 = \mu (> 1)$
有効巻数	N_1	$N_2 (= N_1/\lambda)$	[用途上の仮定]
ばね指数	$C_1 = D_1/d_1$	$C_2 = D_2/d_2$	$C_2 = C_1(1-\lambda)/\lambda$

(C) 密着高さは双方同一とする。

以上の条件下における特性値の記号と基本式を(表2)に示す。

2.3 ワールの応力修正係数の比較

以下の式中の添字₁, ₂はそれぞれ第1, 第2コイルばねに対するものであることを示す。表2に示すような条件下にあっては,

$C_2 = (C_1 + 1 - \lambda)/\lambda$ であるので, これを代入することにより, ワールの応力修正係数の比, $= \kappa_2/\kappa_1$ を C_1 と λ のみ ($m=0.615$, 常数) で表わすことが出来る。

$$\eta = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{4C_2 - 1 + \frac{m}{C_2}}{4C_1 - 1 + \frac{m}{C_1}} = \frac{[(4C_2 - 1)C_2 + 4m(C_2 - 1)]}{[(4C_1 - 1)C_1 + 4m(C_1 - 1)]} \times \frac{C_1(C_1 - 1)}{C_2(C_2 - 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4C_1 + 4 - 4\lambda - \lambda \cdot \frac{C_1 + 1 - \lambda}{\lambda} + 4m \frac{C_1 + 1 - \lambda}{\lambda}}{[(4C_1 - 1)C_1 + 4m(C_1 - 1)]} \cdot \frac{C_1 + 1 - 2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{C_1 + 1 - \lambda}{\lambda} \\ &\quad \times (C_1 - 1) \\ &= \frac{[4(C_1 + 1) - 5\lambda](C_1 + 1 - \lambda) + 4m\lambda(C_1 + 1 - 2\lambda)}{[(4C_1 - 1)C_1 + 4m(C_1 - 1)](C_1 + 1 - 2\lambda)(C_1 + 1 - \lambda)} \\ &\quad \times C_1(C_1 - 1) \\ &= \frac{[4C_1 + 1]^2 - (9 - 4m)(C_1 + 1)\lambda + (5 - 8m)\lambda^2}{[4C_1^2 + (4m - 1)C_1 - 4m](C_1 + 1)^2 - 3\lambda(C_1 + 1) + 2\lambda^2} \cdot \frac{C_1(C_1 - 1)}{C_1(C_1 - 1)} \\ &\quad - (1) \end{aligned}$$

mの常数值を入れて計算すれば,

$$\eta = \frac{[4(C_1 + 1)^2 - 6.54(C_1 + 1)\lambda + 0.08\lambda^2]C_1(C_1 - 1)}{[4C_1^2 + 1.46C_1 - 2.46](C_1 + 1)^2 - 3\lambda(C_1 + 1) + 2\lambda^2} - (1a)$$

計算の便宜上からは $d_2/d_1 = \lambda$ の代りに,

$$(d_1 - d_2)/d_1 = \alpha \text{ とおけば} \quad - (2)$$

$$\alpha = 1 - \lambda \text{ または } \lambda = 1 - \alpha \quad - (2a)$$

$$\eta = \frac{[C_1(C_1 - 1)(4C_1^2 + 1.46C_1 - 2.46) + (6.54C_1 + 6.38)\alpha + 0.08\alpha^2]}{[4C_1^2 + 1.46C_1 - 2.46]\{C_1(C_1 - 1) + (3C_1 - 1)\alpha + 2\alpha^2\}} \quad - (3)$$

しかるに一般に, $C_1 \gg 1$, $\alpha \ll 1$ のために, α^2 の項を無視し,

$$\eta \doteq \frac{[C_1(C_1 - 1)(4C_1^2 + 1.46C_1 - 2.46) + (6.45C_1 + 6.38)\alpha]}{[4C_1^2 + 1.46C_1 - 2.46]\{C_1(C_1 - 1) + (3C_1 - 1)\alpha\}} \quad - (3a)$$

とした場合にも, その誤差は 0.001 以下となる。

この係数比 η の値を C_1 に対して (λ をパラメータとして) グラフに示せば図2となる [電算機による計算による]。

2.4 最大内部応力比 (τ_2/τ_1)

第1ばねに対するものは

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \kappa_1 8 D_1 P_1 / (\pi d_1^3) = \kappa_1 8 D_1 k_1 (\delta_{01} + \delta) / (\pi d_1^3) \\ &= \kappa_1 [G d_1 / (\pi N_1 D_1^3)] (\delta_{01} + \delta) \\ \therefore k_1 &= G d_1^4 / (8 N_1 D_1^3)\end{aligned}$$

第2ばねに対するものは

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \kappa_2 8 D_2 P_2 / (\pi d_2^3) = \kappa_2 8 D_2 (k_1 \delta_{01} + k_2 \delta) / (\pi d_2^3) \\ &= \kappa_2 [8 D_2 / (\pi d_2^3)] G \{ [d_1^4 / (8 N_1 D_1^3)] \delta_{01} + [d_2^4 / (8 N_2 D_2^3)] \delta \} \\ &= \kappa_2 (G / \pi) [d_1 / (N_1 D_1^2)] [(D_2 / D_1) (d_1 / d_2)^3 \delta_{01} + (N_1 / N_2) (D_1 / D_2)^2 (d_1 / d_2) \delta] \\ &= \kappa_2 [G d_1 / (\pi N_1 D_1^2)] [(\mu / \lambda^3) \delta_{01} + (\lambda / \mu^2) \delta]\end{aligned}$$

両者の比は,

$$\begin{aligned}(\tau_2/\tau_1) &= (\kappa_2/\kappa_1) [(\mu/\lambda^3) \delta_{01} + (\lambda/\mu^2) \delta] / (\delta_{01} + \delta) \\ &= \eta [(\mu/\lambda^3) \delta_{01} + (\lambda/\mu^2) \delta] / (\delta_{01} + \delta) \\ &= \eta (\mu^3 \delta_{01} + \lambda^3 \delta) / [\lambda^3 \mu^2 (\delta_{01} + \delta)]\end{aligned}\quad (4)$$

3. 新提案によるばねの使用可能範囲

ならびに最大軸荷重の比較

3.1 $\tau_2 < \tau_1$ なる条件を満足する初張力の範囲
(第1ばねに対して)式(4)において $\tau_2/\tau_1 < 1$ なるには,

$$\eta (\mu^3 \delta_{01} + \lambda^3 \delta) / [\lambda^3 \mu^2 (\delta_{01} + \delta)] < 1 \quad \text{となる。}$$

これを移項して整理すれば,

$$[(\eta \mu / \lambda^3) - 1] \delta_{01} < [1 - (\eta \lambda^2 / \mu^2)] \delta$$

$$\therefore \delta / \delta_{01} > [(\eta \mu / \lambda^3) - 1] / [1 - (\eta \lambda^2 / \mu^2)]$$

$$= (\eta \mu - \lambda^3) \mu / [(\mu^2 - \eta \lambda^2) \lambda^3]$$

- (5)

ここで $f(\lambda) = P_1/P_2 = \delta_{01}/(\delta_{01} + \delta)$ とおけば,

$$f(\lambda) = 1/[1 + (\delta/\delta_{01})]$$

$$< 1/[1 + \{(\eta \mu - \lambda^3)/(\mu^2 - \eta \lambda^2)\} (\mu^2/\lambda^3)]$$

$$= (\mu^2 - \eta \lambda^2) \lambda^3 / (\lambda^3 \mu^2 - \eta \lambda^5 + \eta \mu^3 - \lambda^3 \mu^2)$$

$$\therefore f(\lambda) < (\mu^2 - \eta \lambda^2) \lambda^3 / [\eta (\mu^3 - \lambda^5)]$$

- (6)

この $f(\lambda)$ の値は最大軸荷重またはこれに相当する変位量に対する, 初張力またはこれに対する変位量の比を第1ばねに対して表わしたものであり, $f(\lambda)$ の値がこのより小さい場合には $\tau_2 < \tau_1$ を満足しうることを示す。この $f(\lambda)$ の値の限界を C_1 に対して図2に示してある。

3.2 $\tau_2 < \tau_1$ なる条件を満足する初張力の範囲
(第2ばねに対して)

同様にこれ为新提案の第2ばねについて求めれば,

$$\varphi(\lambda) = P_1/P_2 = \delta_{02}/(\delta_{02} + \delta)$$

$$= \delta_{01} (k_1/k_2) / [\delta_{01} (k_1/k_2) + \delta]$$

$$= 1/[1 + (k_2/k_1) (\delta/\delta_{01})]$$

$$= 1/[1 + (k_2/k_1) \{ (1/f) - 1 \}]$$

$$\text{しかるに } k_2/k_1 = (d_2/d_1)^4 (N_1/N_2) (D_1/D_2)^3 = \lambda^5/\mu^3$$

- (7)

$$\therefore \varphi(\lambda) > 1/[1 + (\lambda^5/\mu^3) (\eta/\lambda^3) (\mu^3 - \lambda^5)/(\mu^2 - \eta \lambda^2)]$$

- 1]

$$= 1/[1 + (\lambda^2/\mu) \{ (\eta \mu - \lambda^3)/(\mu^2 - \eta \lambda^2) \}]$$

$$= \mu(\mu^2 - \eta\lambda^2) / (\mu^3 - \lambda^5)$$

$$\therefore \varphi(\lambda) > (\mu\eta/\lambda^3)f(\lambda) \quad - (8)$$

この間の $\rho(\lambda)$ と $f(\lambda)$ との関係は

$$\varphi(\lambda)/f(\lambda) > \mu/\lambda^3 = (\kappa_2/\kappa_1)(D_2/D_1)(d_1/d_2)^3 \quad - (9)$$

この f の値は最大軸荷重またはそれに相当する変位量に対する、初張力またはそれに相当する変位量の比を、第2のばねについて表わしたもので、この値 $\varphi(\lambda)$ を C_2 に対して (C_1 と λ をパラメータとして) 示せば図3となる。

3.3 $f(\lambda)$ に対する τ_2/τ_1 の値

3.1に示した $f(\lambda) = P_i/P$ が種々に変えうる場合に、これを単に f として表わせば、

$$f < \delta_{01}/(\delta_{01} + \delta), \text{ よって}$$

$$\delta/\delta_{01} < (1-f)/f \quad - (10)$$

式(4)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \tau_2/\tau_1 &< [\eta/(\lambda^3\mu^2)][(\mu^3 + \lambda^5\delta/\delta_{01})/(1 + \delta/\delta_{01})] \\ &= [\eta/(\lambda^3\mu^2)][(\mu^3 + \lambda^5(1-f)/f)/(1 + (1-f)/f)] \\ &= [\eta/(\lambda^3\mu^2)][\mu^3 f + \lambda^5(1-f)] \end{aligned}$$

$$\therefore \tau_2/\tau_1 < \eta[(\mu/\lambda^3)f + (\lambda^2/\mu^2)(1-f)] \quad - (11)$$

当然のことながら式(6)における

$$f = f_{max} = (\lambda^3/\eta)(\mu^2 - \eta\lambda^2)/(\mu^3 - \lambda^5) \text{ の場合には、}$$

$\tau_2/\tau_1 = 1$ となる。

3.4 ばねの最大軸荷重の減少率

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2)/P_1 &= [k_1(\delta_{01} + \delta) - (k_1\delta_{01} + k_2\delta)]/[k_1(\delta_{01} + \delta)] \\ &= (k_1 - k_2)\delta/[k_1(\delta_{01} + \delta)] = (k_1 - k_2)/[k_1(\delta_{01}/\delta + 1)] \end{aligned}$$

式(7)および(10)を代入すれば、

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2)/P_1 &< [1 - (\lambda^5/\mu^3)][1/\{f/(1-f) + 1\}] \\ &= [1 - (\lambda^5/\mu^3)](1-f) \quad - (12) \end{aligned}$$

4. 数 値 例

以上の各種の検討式を一例をとって数値計算を行い、概略の見当をつける資料とする。

(1) まず表1および2に相当する基本的諸元を表3に示す。なお表中の数値のうち、*印のあるもののみが与えられた値であるとし、その他のものは計算によって求められるものである。

(2) 次に表2の中に現われる各種の係数比は次のような値をとる。

$$\lambda = d_2/d_1 = 0.5/0.6 = 5/6, \quad \alpha = 1/6,$$

$$\mu = D_2/D_1 = 55/54,$$

$$\kappa_1 = (35/32) + (0.615/9) = 334.68/288 = 1.161$$

$$\kappa_2 = (43/40) + (0.615/11) = 497.6/440 = 1.131$$

表 3 数値例の基本的諸元

単位	# 1 コイルばね	# 2 コイルばね	備 考
材料の径 (線径)	mm $d_1 = 0.6^*$	$d_2 = 0.5^*$	
ばね指数	$C_1 = 9.0$	$C_2 = 11.0$	$D + d =$ (一定)
平均コイル径	mm $D_1 = 5.4^*$	$D_2 = 5.5$	$d, N =$ (一定)
有効巻数	$N_1 = 20^*$	$N_2 = 24$	
ばね定数	gr/mm $k_1 = 41.2$	$k_2 = 15.6$	
応力修正係数	$\kappa_1 = 1.161$	$\kappa_2 = 1.131$	$\eta = \kappa_2/\kappa_1 =$ 0.97317

(*与えられた値)

$$\eta = \kappa_2/\kappa_1 = (497.6/440) \times (288/334.68) = 0.97317 \approx 0.972$$

(3) 最大内部応力比と初張力の範囲 [図2による]

$$f(\lambda) < 0.32878 \approx 32.88\% \text{ [式(6)または図2による]}$$

$$\varphi(\lambda)/f(\lambda) = 1.76\eta = 1.7129 \text{ [式(9)による]}$$

$$\varphi(\lambda) < 0.3288 \times 1.7129 = 0.5632 = 56.32\%$$

$$\approx 56.3\% \text{ [図3による]}$$

式(11)による τ_2/τ_1 の値は、 λ および μ を代入することにより、

$$\tau_2/\tau_1 = [0.66942 + 1.09058f] \quad - (13)$$

なる一次式をもって現わすことが出来、上述の η の値を入れてグラフに示せば図4となる。 ($f < 32.88\%$)。

即ち $f = P_i/P_1$ が 32.88% より大きい状態で使われているとすれば、それ以上の効果がないことを意味するが、在来の考え方ではこれ程大きくはない筈である。 $\varphi = P_i/P_2$ では 56.3% までもありうる。

(4) ばね最大軸荷重の比

$(P_1 - P_2)/P_1$ についても、式(12)の λ と μ の代りに上

図4 $f(\lambda)$ の変化に対する (τ_2/τ_1) 並びに $(P_1 - P_2)/P_1$ の値

記の数値を入れれば、これも

$$(P_1 - P_2)/P_1 = 0.61965(1 - f) \quad - (14)$$

の形で f に対して一次式となり、同じく図4にグラフをもて示す。

(5) これらの結果を総合し、また # 1ばねの設計値としての最大応力を $\tau_1 = 50 \text{ kg/mm}^2$ と選んだとすれば、#2ばねでは 47.77 kg/mm^2 ですみ、最大軸荷重も比率の上で 44.2%となる。

このときの応力等の計算値の比較表を表4で示すとともに図5をもつてグラフに示してある。

表 4 数値例に対する内部応力

	単位	# 1 コイルばね	# 2 コイルばね	備 考
最大内部応力	kg/mm^2	$\tau_1 = 50^*$	$\tau_2 = 47.77$	$\tau_2/\tau_1 = 59.5\%$
初張力 (必要量)	gr	$P_1 = 193.5^*$	$P_1 = 193.5^*$	P_i は同じ $P_i = k_1 \delta_1' f$ $= k_2 \delta_{i2}$
変位 必要量	mm	$\delta = 11.75^*$	$\delta = 11.75^*$	δ は同じ $P_1 = k_1 \cdot \delta_1'$ $P_2 = k_2 \cdot (\delta_{i2} + \delta)$ $= k_2 \delta_2'$
最大軸荷重	gr	$P_1 = 676$	$P_2 = 377$	$f = 0.286$ $\varphi = 0.514$
最大変位 (相当) 量	mm	$\delta_1' = 16.45$	$\delta_2' = 24.15$	
初張 (相当) 変位量	mm	$f \delta_1' = 4.7$	$\delta_{i2} = 12.4$	

(*与えられた値)
(矢印は計算順を示す)

図 5 同一初張力、同一変位の場合の2種のコイル最大軸荷重と内部応力 (例)

5. む す び

このような著想は著者独自のものではないことは前報の文献⁽²⁾でも紹介してある。また経験的に行われているものは、一部には既に世の中にある。すなわち著者の見せられたスイス人による設計図、あるいは米国製タイプライターないし計算機類には多数に使用されている。

ただし内外の文献を見ても、設計の指針、使用範囲の限界、製造技術上の明確な理論的限界が与えられていないので、ここに理論的説明を行ったものである。

すなわち限定された作動範囲に使用される引張コイルばねにあっては、初張力に相当する最小作動荷重が同じであれば、作動後における最大軸荷重はもちろんのこと最大内部応力も、より弱いばねの方が小さくてすむという条件がありうることである。しかし使用上の限界があることは自明のことである。

ばね全体の自由長を大きくとらずに最小作動荷重を大きくしうる、いわゆる第2種の初張力の製造技術をどこまで上げうるかが問題であるが、これについては稿を改めて発表する予定である。

なお設計上から、作動長さが小さい場合には比較的問題となることが少いが、サージングの起り易い場合、錆その他外部よりの侵蝕の激しい場合等には不利なことが多い。ステンレス線を使用する場合にも適用出来る筈であるが、使用温度変化等によって、横弾性係数 G が著しく変わるような場合、あるいは規格には採用されていないが、ばね用ステンレス線としては好評の析出硬化形 (例えば A I S I 規格 17-7 PH) 材料では低温脆性の性質がありうるので、特に注意が必要である。

文 献

- (1) 著者、ばね論文集14号、1969、p51
- (2) 前田禎三訳、リヒターフオス原著、精密機器の要素、II、1966、p338、東京図書