複雑な形をした片持ばねの計算法*

Utility Formulas for Cantilever Springs with Straight and Curved Portions

小 口 宗三郎**

S. OGUCHI

1. ま え が き

ここで取扱うばねは、主として、比較的複雑な形をした——直線と円弧を組合せたような——薄板ばねで、単一集中荷重をうける、片持はりとして、計算できるものとする。

さて、ばねを計算するのに、通常次の三つの場合がある。

- (1) 形がきまっているばねの特性を求める場合
- (2) 形と、荷重やたわみがきまって、最大応力を求める場合

(3) 特性を満足するような、ばねの形を求める場合
これらの場合に対し、コイルばね等では、あらかじめ、計算式が用意されている。しかしながら、薄板ばねでは、その特質として、定った形というものがないために、特定な形のものを除いては、その都度、計算式をつくることから、始めなければならない。また、従来使われている、カステリアノの定理によって式をつくる方法は、一般に、なかなか容易ではない。

ここでは、やさしい計算法として、次の三つの方法について、述べることにする。

(a) 分割計算法

ばねが、直線と円弧から、できている場合に、これを適当な範囲に分割することにより、あらかじめ用意してある、数個の式を併用して、計算する方法。

(b) 簡略法

精度より、迅速さが要求される場合、またばねの形状が、式化し難い場合につかう。

(c) 計算図表

主として、ばねの特性から、形を求める場合に利用する。

2. 片持薄板ばねの基本式

〔記号〕

M : 曲げモーメント

E : 縦弾性係数

I : 断面二次モーメント

ρ_0 : 無荷重時の曲率半径

ρ : 曲げの力をうけたときの曲率半径

P : 集中荷重

δ : 荷重点のたわみ

ϕ : 荷重点のたわみ角

σ : 曲げ応力

h : はりの板厚

s : はりの実長

x : はりのある点から、荷重線までの距離

L : x の最大値

A : はりの軸線の、荷重線に関する、二次モーメント

I : はりの軸線の、荷重線に関する、一次モーメント

はりが曲げモーメントをうけるとき、曲率半径が十分大きければ、(図 1)

第 1 図 片 持 ば ね

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI}$$

また、 $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{d\phi}{ds}$, $M = P \cdot x$ であるから

$$d\phi = \frac{P}{EI} x \cdot ds \quad (2.1)$$

よって、荷重点における、荷重方向のたわみは、

$$\delta = \int x \cdot d\phi = \frac{P}{EI} \int x^2 \cdot ds \quad (2.2)$$

である。また、はりの断面が一定のときは

$$\delta = \frac{P}{EI} \int x^2 ds$$

となる。ここで

* ばね技術研究会昭和 46 年度春期講演会発表

** (株)多賀製作所

$$I = \int x^2 ds \quad (2.3)$$

とおけば

$$\delta = \frac{P}{EI} I \quad (2.4)$$

ここに、 I は、はりの軸線の、荷重線に関する二次モーメントであり、たわみの大きさに比例する。

また、荷重点におけるたわみ角は (2.1) より

$$\phi = \int d\phi = \frac{P}{E} \int \frac{x}{I} ds \quad (2.5)$$

であり、断面が一定の場合には、

$$\phi = \frac{P}{EI} \int x \cdot ds$$

である。ここで

$$\Gamma = \int x ds \quad (2.6)$$

とおけば

$$\phi = \frac{P}{EI} \Gamma \quad (2.7)$$

ここに Γ は、はりの軸線の、荷重線に関する一次モーメントであり、たわみ角の大きさに比例する。

はりに生ずる最大応力は

$$\sigma = \frac{PL}{I} \cdot \frac{h}{2} = E \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{L}{A} \cdot \delta \quad (2.8)$$

$$\text{または } \sigma = E \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{L}{\Gamma} \phi \quad (2.9)$$

である。

以上で明らかなように、 I と Γ の値を知ることができれば、たわみ δ 、たわみ角 ϕ と最大応力 σ は、式 (2.4)、(2.7)、(2.8) から容易に求めることができる。

3. I と Γ の分割計算法

3.1 はりの分割方法

前章で明らかなように、計算の主要点は、 I と Γ の計算法に、しぼられている。

ところで、 I と Γ は、その性質上、はりを自由に分割して計算することができる。すなわち

$$I = \int x^2 ds = I_1 + I_2 + \dots$$

$$\Gamma = \int x ds = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$$

である。したがって、要領よく分割すればあらかじめ用意した式を使って、計算することが、可能になってくる。

さて、われわれの通常取扱う薄板ばねは、直線と円弧から、なっている。これを分割するにあたっては、まず次のように、分けることにする。

荷重線を上下方向にとって、

(1) 荷重線で、左右に分ける。

(2) 直線部は、水平、斜めと垂直の三部に分ける。

(3) 円弧部は、円弧の中心を通る水平線で上下に分ける。

以上のように分割したときは、また次のような性質がある。

(a) I は荷重線に関する二次モーメントのため、荷重線の左右とも、正であるけれども Γ は一次モーメントのため、左と右とで正負が異なる。したがって、たわみ角は、左右で消し合うような関係になる。

(b) 荷重線の左右にある、対称な形状は、すなわち：図-2 の A と B および C と D は、モーメントの大きさは、全く同じである。

第2図 対 称 形

(c) 任意の水平線の、上下に対称な形状、図-2 の A と C、B と D は、モーメントの大きさも、正負の符号も、すべて同じである。

(d) 分割計算には、中空断面の、面積や二次モーメントを、計算するときのように、減法も使うことができる。

3.2 分割計算の基本式

l : 水平方向の長さ

m : 軸線の実長 S と水平方向の長さ l の比

R : 円弧の半径

α : 円弧の中心を通る水平線から、荷重線に向って測った中心角

l_0 : 円弧の中心から、荷重線までの距離

n : l_0 と R の比

C_R : 円弧部の I をあらわす係数

分割計算の基本式は I 、 Γ とも、直線部 3、円弧部 1 の計 4 個である。すなわち、

図 3-A 水平直線部

$$I_A = \frac{l^3}{3} \quad (3.3) \quad \Gamma_A = \frac{l^2}{2} \quad (3.4)$$

図 3-B 斜め直線部

第3図 分割の基本形

$$A_B = \frac{ml^3}{3} \quad (3.5) \quad \Gamma_B = \frac{ml^2}{2} \quad (3.6)$$

図 3-C 垂直直線部

$$A_C = S \cdot l^2 \quad (3.7) \quad \Gamma_C = S \cdot l \quad (3.8)$$

図 3-D 円弧部

$$A \text{ の一般式は, } A = \int x^2 \cdot ds$$

$$\text{これに, } x = l_0 + R \cos \alpha = R(n + \cos \alpha)$$

$$ds = R \cdot d\alpha$$

をいれて

$$A = \int_0^\alpha R^3 (n + \cos \alpha)^2 \cdot d\alpha$$

$$= R^3 \{ n^2 + 0.5 \alpha + 2n \sin \alpha + 0.25 \sin 2\alpha \} + C_1$$

$$\alpha = 0 \text{ のとき, } A = 0 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\text{よって, } A = R^3 \cdot C_R \quad (3.9)$$

$$C_R = (n^2 + 0.5) \alpha + 2n \sin \alpha + 0.25 \sin 2\alpha \quad (3.10)$$

となる。 C_R の値は、図 4 に図表化してあるから、容易に求めることができる。

$$\text{また, } \Gamma = \int x dx$$

$$= \int R^2 (n + \cos \alpha) d\alpha = R^2 (n\alpha + \sin \alpha) + C_2 \quad (3.11)$$

$$\alpha = 0 \text{ のとき, } \Gamma = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

〔注〕 円弧の中心が、荷重線の反対側に、出た場合は、 l_0 は負になる。したがって、 n もまた負として計算する。

これら 4 組の基本式による、分割部分の、代表的な計算例を、次にしめす。図-5 これらの例は、実際の計算に当っては、準基本式として、活用されるものである。

$$A-1 \quad A = \frac{1}{3} (l_2^3 - l_1^3), \quad \Gamma = \frac{1}{2} l (l_1 + l_2)$$

第4図 C_R の計算図表

第5図 分割部分の例

$$\begin{aligned}
 \text{B-1 } A &= \frac{m}{3}(l_2^3 - l_1^3), \quad \Gamma = \frac{m}{2}(l_2^2 - l_1^2) = \frac{s}{2}(l_2 + l_1) \\
 \text{D-1 } C_{R90} &= 1.57n^2 + 2n + 0.785, \quad \Gamma = R^2(1.57n + 1) \\
 \text{D-2 } C_{R180} &= (n^2 + 0.5)\pi, \quad \Gamma = R^2 \cdot n\pi \\
 \text{D-3 } C_R &= C_{R\alpha_2} - C_{R\alpha_1}, \quad \Gamma = \Gamma_{\alpha_2} - \Gamma_{\alpha_1} \\
 \text{D-4 } C_R &= C_{R(\alpha+\beta)} - C_{R\alpha} = (n^2 + 0.5)\beta - 0.5 \sin \beta \\
 \Gamma &= R^2 \cdot n\beta \\
 \text{D-5 } C_R &= C_{R\alpha_1} + C_{R\alpha_2}, \quad \Gamma = \Gamma_{\alpha_1} + \Gamma_{\alpha_2} \\
 \text{D-6 } C_R &= 2C_{R90} - C_{R\alpha_1} - C_{R\alpha_2} \quad (n=0) \\
 \Gamma &= \Gamma_{90} - \Gamma_{\alpha_1} - (\Gamma_{90} - \Gamma_{\alpha_2}) = \Gamma_{\alpha_2} - \Gamma_{\alpha_1} \\
 \text{D-7 } l_0 &= R \cos \theta = -R \cos \alpha \\
 n &= l_0/R = -\cos \alpha \\
 C_R &= (\cos^2 \alpha + 0.5)\alpha - 0.75 \sin 2\alpha \\
 \Gamma &= R^2(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

3.3 A の形状係数 C_A

A の大きさを、同じ長さで、最も単純な形である真直梁の A との比であらわし、これを C_A とする。しかるときは

$$A = C_A \cdot \frac{L^3}{3} \quad (3 \cdot 12)$$

であらわされる。この C_A は、A の形状係数とでもいうべきものであり、真直梁に対するやわらかさの、また、たわみの倍率をあらわしている。

図4の計算図表には、よく使われる2種類の形状について、 C_A の値をのせてある。また後で述べる、設計の

ための計算図表では、 C_A は、パラメーターとして、重要な役割を受持っている。

計算例(1) 図-6 と基本形 A, A-1 および C より

第6図 直線折曲形

$$\begin{aligned}
 A_A &= A_C = l_e^3/3 & \Gamma_A &= \Gamma_C = l_e^2/2 \\
 A_B &= l_b \cdot l_a^2 & \Gamma_B &= l_b \cdot l_a \\
 A_D &= l_d^3/3 & \Gamma_D &= -l_d^2/2 \\
 A_E &= l_e \cdot l_d^2 & \Gamma_E &= -l_e \cdot l_d \\
 A_F &= (l_d^3 - l_f^3)/3 & \Gamma_F &= -(l_d^2 - l_f^2)/2 \\
 A &= \Sigma A_i = \frac{2}{3}l_a^3 + l_b \cdot l_a^2 + \frac{2}{3}l_d^3 - \frac{1}{3}l_f^3 + l_e \cdot l_d^2 \\
 \Gamma &= \Sigma \Gamma_i = l_a^2 + l_b \cdot l_a - l_d^2 - l_e \cdot l_d + l_f^2/2
 \end{aligned}$$

計算例(2) 図-7 と基本形 D-4 により

第7図 波形

$$\begin{aligned}
 C_R &= (n^2 + 0.5)\beta - 0.5 \sin \beta \\
 \beta &= 120^\circ = 2.09 \text{ rad}, \quad \sin \beta = 0.866 \\
 \therefore C_R &= 2.09n^2 + 0.614 \\
 \text{また, } l_{01} &= R \cos 30^\circ = 0.866R \\
 \therefore n_1 &= 0.866 & n_1^2 &= 0.866^2 = 0.75 \\
 l_{02} &= 3l_{01} & \therefore n_2^2 &= 3^2 \cdot n_1^2 \\
 l_{03} &= 5l_{01} & \therefore n_3^2 &= 5^2 n_1^2 \\
 A &= R^3(C_{R1} + C_{R2} + C_{R3}) \\
 &= R^3\{2.09(1 + 3^2 + 5^2)0.75 + 0.614 \times 3\} \\
 &= 56.6R^3
 \end{aligned}$$

計算例(3) 図-8

上下対称であるから、片側の ABCD をとり、これを、(A)(B)(C)の三つに分割する。

$$\begin{aligned}
 \text{(A) } l_0 &= (R_1 + R_2)/\cos \theta, \quad n_A = l_0/R_1 \\
 C_{RA} &= (n_A^2 + 0.5)\alpha_1 + 2n_A \sin \alpha_1 + 0.25 \sin 2\alpha_1 \\
 \text{(B) } A_B &= m(l_2^3 - l_1^3)/3 \\
 m &= s/l = \csc \theta \\
 l_2 &= l_0 - R_1 \cos \theta, \quad l_1 = R_2 \cos \theta \\
 \therefore A_B &= \{(l_0 - R_1 \cos \theta)^3 - (R_2 \cos \theta)^3\}/3 \sin \theta
 \end{aligned}$$

第 8 図 線細工ばね

$$\textcircled{C} \quad C_{RC} = C_{R\alpha_2} - C_{R\theta}$$

$$n=0, \quad \alpha_2=90^\circ \quad \therefore C_{R\alpha_2}=0.785$$

$$C_{R\theta}=0.5\theta+0.25 \sin 2\theta \quad (\text{基本式 3-10, } n=0)$$

$$\therefore C_{RC}=0.785-0.5\theta-0.25 \sin 2\theta$$

④⑤⑥から片側の A は,

$$A = R_1^3 \cdot C_{RA} + A_B + R_2^3 C_{RC}$$

上下たわみの合計は $A = (P/EI) \cdot 2A$

4. 板幅が変化する片持ばね

薄板ばねでは、形のうえの必要から、部分的に板幅を変えることも少なくない。この場合には、当然 I は変化するけれども、 A は、本質的に変化しない。

しかしながら、ここでは、計算上の便法として、 I には代表的な板幅の値をいれて一貫させ、 A を適当に修正して、用いることにする。

こうすることによって、前述した、断面一定のばねと、全く同様に取扱うことができるので、計算もやさしくて、便利である。

まず、板幅は、段階的に変わるものとして

$$\delta = \frac{P}{E} \int \frac{x^2}{I} ds = \frac{P}{E} \left(\frac{A_1}{I_1} + \frac{A_2}{I_2} + \dots \right) \quad (4.1)$$

$$= \frac{P}{E(h^3/12)} \left(\frac{A_1}{b_1} + \frac{A_2}{b_2} + \dots \right) \quad (4.2)$$

ここで、代表幅を b_0 とし、そのときの I を、 I_0 とすれば、(4.2) 式は

$$\delta = \frac{P}{EI_0} \left(\frac{b_0}{b_1} A_1 + \frac{b_0}{b_2} A_2 + \dots \right) \quad (4.3)$$

となる。(4.3) 式で $b_0=1$ とすれば (4.2) 式が、また、 $b_0=12/h^3$ とすれば (4.1) 式が得られるから、(4.1)、(4.2) 式は、(4.3) 式の特別な場合に相当すると考えることもできる。

$$\text{ここで、} \frac{b_0}{b_1} A_1 = A_1', \quad \frac{b_0}{b_2} A_2 = A_2', \quad \dots$$

$$A_1' + A_2' + \dots = A_0$$

とおけば、(4.3) 式は

$$\delta = \frac{P}{EI_0} (A_1' + A_2' + \dots) = \frac{P}{EI_0} A_0 \quad (4.4)$$

この A' および A_0 は、便宜上板幅で修正されたものであり、本来の A とは性質の異なったものである。

また、最大応力は、 x/b が最大になる点に生じ、その点の板幅を b_s 、位置を l_s とすれば

$$\sigma_{\max} = E \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{b_0}{b_s} \cdot \frac{l_s}{A_0} \cdot \delta \quad (4.5)$$

として求めることができる。

特別な、しかもよくある例として……

(a) 一部のみが、板幅が異なっている場合。

(b) 一部の板幅を変更した場合。 A や特性は、どう変わるか。

(a) の場合にも、一部の板幅を、あとで変えたものとして、(b) と同じように計算した方が便利になる。

さて、初めの板幅を b_1 、変更後の板幅を b_2 、変更部の A を A_s とすれば、 A_0 の変化は、

$$\Delta A_0 = -A_s \frac{b_0}{b_2} + A_s \frac{b_0}{b_2} = A_s \left(\frac{b_0}{b_2} - \frac{b_0}{b_1} \right) \quad (4.6)$$

したがって

$$\Delta \delta = \frac{P}{EI_0} \Delta A_0 = \frac{P}{EI_0} A_s \left(\frac{b_0}{b_2} - \frac{b_0}{b_1} \right) \quad (4.7)$$

となる。すなわち、この場合には、板幅変更部分の A_s を計算するのみで、 $\Delta \delta$ を求めることができる。また、ばね定数の比は、

$$\frac{k'}{k} = \frac{\delta}{\delta + \Delta \delta} = \frac{A_0}{A_0 + \Delta A_0} \quad (4.8)$$

となる。

〔注 1〕 板の代表幅 b_0 は、実在する板幅に、こだわる必要はなく、好きな値でよい。

〔注 2〕 板幅が連続的に変わる場合には適当に細かく分割して、平均幅をとるか、または次章の簡略法による。

計算例 (1) 図-9 にて、 a b 間の板幅を、他の部の 80% とするとき、 A の値を求む。

$$l_0 = 2R$$

第 9 図 板幅の変わるばね

この場合、円弧を三分割して計算するのは厄介である。まず板幅が変わるものとして A_0 を計算する。

$$n=l_0/R=2, \text{ 図-4 の図表から } C_A=1.5$$

$$\therefore A_0=C_A L^3/3=1.5 \times (3R)^3/3=13.5R^3$$

つぎに、a b 間は、a b の長さが短いから、 $A_s \approx s \cdot l_0^2$ である。

$$\text{よって、} \Delta A_0=A_s \{ (1/0.8) - 1 \} = 0.25 A_s = 0.25 s l_0^2$$

$$A=A_0+\Delta A_0=13.5R^3+0.25 s l_0^2$$

計算例 (2) S K 材で、板厚 $h=1 \text{ mm}$ 。

ばね定数 $k=1/30$ 、のばねにおいて、一部の板幅を 10 mm から 15 mm に変えそとき、ばね定数 k の変化を求む。ただし、変更部は、斜めの直線部で、

$$A_s=m(l_2^3-l_1^3)/3=9 \times 10^4 \text{ mm}^3 \text{ とする。}$$

代表幅は自由にえらべるから、 $b_0=12$

$$\text{として、} I_0=b_0 h^3/12=12 \times 1^3/12=1$$

$$\text{したがって、} A_0=E I_0/k=21 \times 10^3 \times 1 \times 30=6.3 \times 10^5$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \Delta A_0 &= A_s (b_0/b_2 - b_0/b_1) \\ &= 9 \times 10^4 (12/15 - 12/10) = -3.6 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{k'}{k} = \frac{A_0}{A_0 + \Delta A_0} = \frac{6.3 \times 10^5}{6.3 \times 10^5 - 3.6 \times 10^4} = 1.06$$

このように、全体の真の A の値を知ることなしに、ばね特性の変化を計算することができる。

5. A と Γ を求める簡略法

計算に精度より、迅速さが要求される場合また、流線のような、円弧と直線の枠外にある場合、さらにまた、板幅が連続的に変化して、普通の計算が困難な場合などは、簡略法により、概算値を求めるのがよい。

まず A を、次のように分割する。

$$A = \Sigma A_i = \Sigma K_i (l_i^3 - l_{i-1}^3) / 3$$

ここに K_i は、 A_i を真直はりと比較した係数である。次に長さ L を l_a, l_b, l_c, l_d に四分割する。(図-10)、しかし、

$$L^3 - l_3^3 = l_3^3 - l_2^3 = l_2^3 - l_d^3 = 0.3 L^3, \quad l_d^3 = 0.1 L^3$$

$$\text{とすれば、} l_a = 0.112 L, \quad l_b = 0.151 L$$

$$l_c = 0.272 L, \quad l_d = 0.465 L$$

$$\text{となり、} A = 0.1 (K_a + K_b + K_c + 0.33 K_d) L^3 \quad (5 \cdot 1)$$

とあらわすことができる。

ここで、次のような仮定を設ける。

仮定 (1) $K = [\text{実長 } S] / [\text{水平長}] = m$

仮定 (2) ばねの形状は、急変しない

しかるときは、分割の精度が、 m の値に及ぼす影響は小さいから、次のようにかくことができる。

$$l_a = 0.1 L \quad m_a = (S_a + S_a' + \dots) / l_a$$

$$l_b = 0.15 L \quad m_b = (S_b + S_b' + \dots) / l_b$$

$$l_c = 0.30 L \quad m_c = (S_c + S_c' + \dots) / l_c$$

$$l_d = 0.45 L \quad m_d = (S_d + S_d' + \dots) / l_d$$

第10図 簡略法による分割

これらを用いて、次式がえられる。

$$A = 0.1 (m_a + m_b + m_c + 0.3 m_d) L^3 \quad (5 \cdot 2)$$

$$C_A = 0.3 (m_a + m_b + m_c + 0.3 m_d) \quad (5 \cdot 3)$$

$$\Gamma = 0.1 (m_a + 1.3 m_b + 1.7 m_c + m_d) L^2 \quad (5 \cdot 4)$$

仮定 (1) について、

a の部分が、1/4 円弧の場合

$$\text{分割計算法によれば } A = 0.389 L^3$$

$$\text{簡略法によれば } A' = 0.387 L^3$$

となり、誤差は小さい。

R が大きくなれば、誤差は小さくなり、 R が小さくなれば、 $R=L/20$ で 1% 程度であり問題はない。

仮定 (2) について、

荷重線に平行な、または平行に近いような部分が、特に、分割境界線に近いところに、かなりの比重で含まれているときは、誤差を生じやすい。この場合は、いったん、その部分を除いて計算し、あとから $A_s = S \cdot l_0^2$ として追加すればよい。こうすれば、簡略法の精度は、通常の円弧を含む片持はりで、普通の計算法との差異は、5% 以内である。

板幅が変わる場合、

板幅が部分的に変わる場合は、その部分の実長 S を、板幅に反比例させて計算する。また板幅が、いろいろに変わる場合は、前章で、 A_i を修正したのと同じ要領で、代表幅に対して、 S を修正すればよい。

計算例 図-11 のような片持ばねの C_A を求む。また、このばねの板幅を、直線的に変えて、先端部の幅を、取付部の幅の 30% にしたときの C_A を求む。

図-11 A のように、 $L=100$ として書き、 S を弦の長

第11図 簡略法による計算例

さで測れば,

$$m_a = 32/10 = 3.2 \quad m_b = 20/15 = 1.33$$

$$m_c = 31/30 = 1.03 \quad m_d = 45/45 = 1$$

$$\therefore C_A = 0.3(3.2 + 1.33 + 1.03 + 0.3 \times 1) = 1.76$$

この場合には、分割計算法による値と、ほとんど差異はない。

次に板幅が変わる場合は、図-11 B のようになるものとし、各部分の板幅は、中間点の値をとる。しかし、固定部の幅を代表幅として、 S を幅の逆比で修正すれば

$$m_i' = \frac{S_i}{l_i} \cdot \frac{b_0}{b_i} = m_i \frac{b_0}{b_i}$$

$$m_a' = 3.2/0.92 = 3.5 \quad m_b' = 1.33/0.77 = 1.7$$

$$m_c' = 1.03/0.63 = 1.6 \quad m_d' = 1/0.42 = 2.4$$

$$\therefore C_A' = 0.3(3.5 + 1.7 + 1.6 + 2.4 \times 0.3) = 2.25$$

$$\delta = \frac{P}{EI_0} C_A' \cdot \frac{L^3}{3}$$

I_0 は固定部の断面二次モーメント。

6. 薄板ばねの計算図表

この計算図表は、主として、予定されているばね特性をもつような、ばねの形状を、見つけ出すのに使われる。

前にのべたように、たわみと応力の基本式は、

$$\delta = \frac{P}{EI} A$$

$$\sigma = E \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{L}{A} \cdot \delta$$

であらわされる。これに、 $I = bh^3/12$ 、 $A = C_A \cdot L^3/3$ 、と薄板の係数 $(1-\nu^2)$ —— ν はポアソン比——をいれて整理すれば、次のようになる。

$$\frac{b \cdot \delta}{P} = 4 C_A \frac{1-\nu^2}{E} \left(\frac{L}{h} \right)^3 \quad (6.1)$$

$$\sigma \frac{L}{\delta} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{2}{3} C_A \frac{1-\nu^2}{E} = 1 \quad (6.2)$$

さて、この二つの式に、含まれている変数は、合計9個である。いま、 P と δ をきめてばねを設計する場合に、一次的に、 σ と E を仮定し、さらに $1-\nu^2$ を省略しても、なお二つの式で、 L b h C_A の4個の変数をきめなければならない。この試行錯誤の計算を、なるべく容易にするために、図表化したのが図-12の計算図表である。

第12図 薄板ばねの計算図表

また、図表化にあたり、

$$C_A \frac{1-\nu^2}{E} = C_{A0} \frac{1}{20 \times 10^3} \quad (6 \cdot 3)$$

とおいて、 ν を省略し、 C_{A0} をパラメーターとした。したがって、SUS の場合には、 $(1-\nu^2)$ が 1.05 となり、 C_{A0} をそのまま C_A として使えるけれども、他の材質の場合には、適当に換算する必要がある。

〔注〕 この図表を、線細工ばねに、利用する場合は、④の b/k の代りに、 $0.59 d/k$ を、使えばよい。

計算例、荷重 0.5 kg のとき、たわみ 6 mm の板ばねの形を求む。ただし、材質は SUS とし許容応力を 60 kg/mm² とする。

$$k = P/\delta = 0.5/6 = 1/12, \quad \sigma/\delta = 60/6 = 10.$$

図表における、 b/k , L/h , $\sigma L/\delta$ の読みを、それぞれ、 A , B , C とすれば、 $b = A/12$, $h = L/B$, $L = C/10$ となる。

さて、第一次の目安として、最も単純な形の、 $C_{A0} = 1$ の p 点をえらべば、図表から

$$C = 480, B = 62, A = 48$$

よって、 $L = C/10 = 48$, $h = L/B = 0.77$, $b = A/12 = 4$, を得る。

形をコンパクトにするときは、 C_A を大きくとる。 $C_{A0} = 3$ の q 点をえらべば、

$$C = 280, B = 36, A = 28$$

よって、 $L = 280/10 = 28$, $h = 28/36 = 0.77$, $b = 28/12 = 2.3$ 。

また上方に移って、 C すなわち $\sigma L/\delta$ を小さくすれば、 L は減少し、 b は増大する。

よって、 r 点をえらべば、 $C_{A0} = 1.5$

$$C = 270, B = 74, A = 120$$

となり、 $L = 270/10 = 27$, $h = 27/74 = 0.36$, $b = 120/12 = 10$ 。

かくて、逐次、好みの形状に近づけることができる。

7. 任意の点におけるたわみとたわみ角

2章において、たわみを求める基本式を、つくるにあたり、そのたわみを、荷重点におけるものに限定した。そして、その結果として、 A と Γ の値を求める計算法が、成りたっている。

しかしながら、この荷重点における、たわみとたわみ角を求める過程から、またその結果を利用して、荷重点以外の点におけるものを求めることができる。

図-13 において、荷重点 B における、たわみとたわみ角は、次式であらわされる。

$$\delta_B = \frac{P}{EI} \Gamma_{AB} = \frac{P}{EI} (\Gamma_{AC} + \Gamma_{CB}) \quad (7 \cdot 1)$$

第13図 荷重点以外のたわみ

$$\phi_B = \frac{P}{EI} \Gamma_{AB} = \frac{P}{EI} (\Gamma_{AC} + \Gamma_{CB}) \quad (7 \cdot 2)$$

〔D点のたわみとたわみ角〕

BD 間には、荷重のための変形はない、したがって、

$$\phi_D = \phi_B = (P/EI) \Gamma_{AB} \quad (7 \cdot 3)$$

$$\delta_D = \delta_B + \phi_B \cdot l_D = (P/EI) (\Gamma_{AB} + \Gamma_{AB} \cdot l_D) \quad (7 \cdot 4)$$

〔C点のたわみとたわみ角〕

(7-2) 式のこどく、 B 点のたわみ角は、 $\widehat{AC}$ の変形によるたわみ角と、 $\widehat{CB}$ の変形によるたわみ角の和である。そして、 $\widehat{AC}$ の変形によるたわみ角は、また C 点のたわみ角でもある。

$$\text{よって、} \phi_C = (P/EI) \Gamma_{AC} \quad (7 \cdot 5)$$

また、 $\widehat{AC}$ の変形による、 B 点のたわみは、

$$\delta_{B(AC)} = \frac{P}{EI} \Gamma_{AC} = \delta_C + \phi_C \cdot l_C$$

$$\therefore \delta_C = \delta_{B(AC)} - \phi_C \cdot l_C = \frac{P}{EI} (\Gamma_{AC} - \Gamma_{AC} \cdot l_C) \quad (7 \cdot 6)$$

8. 二点支持の片持ばね

差しこみ、はさみつけ、などの方法で固定される板ばねは、二点支持状態にちかく、支持部分の変形のため、荷重点のたわみを大きくすることがある。

第14図 二点支持の片持ばね

図-14 において、C 点のまわりの釣合いから、

$$Q = P \cdot l_A / l_B \quad (8 \cdot 1)$$

である。いま、C 点を固定と仮定し、 $\widehat{CA}$ $\widehat{CB}$ の二つのばねを考えて、A 点に対する Δ と Γ をそれぞれ Δ_A , Γ_A とし、B 点に対する Δ を Δ_B とすれば、

$$\phi_A = (P/EI) \Gamma_A$$

$$\delta_A = (P/EI) \Delta_A$$

$$\delta_B = (Q/EI) \Delta_B = (P/EI) \Delta_B (l_A / l_B)$$

となる。

実際には、 $\delta_B = 0$ であるから、上式の δ_B に対応するだけ、C 点が傾く。その傾きを ϕ_C とすれば、

$$\phi_C = \delta_B / l_B = (P/EI) \Delta_B (l_A / l_B^2) \quad (8 \cdot 2)$$

となり、A 点における、実際のたわみとたわみ角は、

$$\delta_{A'} = \delta_A + \phi_C \cdot l_A = \frac{P}{EI} \left(\Delta_A + \Delta_B \frac{l_A^2}{l_B^2} \right) \quad (8 \cdot 3)$$

$$\phi_{A'} = \phi_A + \phi_C = \frac{P}{EI} \left(\Gamma_A + \Delta_B \frac{l_A}{l_B^2} \right) \quad (8 \cdot 4)$$

となる。

9. む す び

薄板ばねは、非常に広範囲に、使用されているにもかかわらず、適当な計算法がないために、計算されないまま使用され、そのために、トラブルを生じた場合も少なくないと思う、この計算法により、それらが、いくぶんでも解消されれば幸である。