トラック用重ね板ばねの応力分布とその計算*

Calculation of the Stress Distribution of Conventional
Leaf Springs for Motor Truck Use

青山 咸恒**・吉川 和男**

Toyota Central Res. & Dev. Lab. Inc.
Shigetsune AOYAMA・Kazuo YOSHIKAWA

1. ま え が き

重ね板ばねの設計計算には、各リーフを一枚の菱形板に展開して計算する「展開法」や、各リーフが互にその中央部と先端においてのみ接触すると仮定して計算を進める「板端法」¹⁾ が用いられている。展開法により求められる応力は、各リーフの平均応力相当値であるが、板端法では、各位置の応力値を比較的正しく計算することができる。しかし、板端法における「板端のみ接触」の仮定が成立するには、各リーフはある仕様条件を満足する必要のあることも報告されている²⁾。

板端法による計算を原則通り実行するとき、実験と矛盾する結果が得られる代表例の一つに、全長板が2枚あるトラック用重ね板ばねにおける全長板の応力がある。しかし、このような場合に有効な計算法は未だ十分明らかにされていない。

本報告では、まず、全長板が2枚ある重ね板ばねの応力を板端法で計算したときの問題点について述べ、つぎに、1番リーフと2番リーフの間には、2番リーフ板端のほか3番リーフ板端位置にも接触点（中間接触点）があり、力が伝達されると仮定して、応力を計算する。続いて、同様の中間接触点をすべてのリーフ間に設けた場合について応力計算を行ない、計算結果と実測応力との関係を検討する。

2. 解析対象ばね

解析対象とした重ね板ばねは、小型トラック用フロントばね（ばねAと呼ぶ）、大型トラック用フロントばね（ばねB）および小型トラック用リヤばね（ばねC）の3種類で、いずれも全長板が2枚ある。ばねAの場合、子板端部は原厚のままで、かゝり先も小さいが、ばねB、ばねCでは、子板端部はテーパ加工されている。これらのばねの構成（各リーフの長さ、断面形状、板端形状係数など）を図1に示す。なお、参考のため、ばねAの板

端法による計算応力と実測応力の比較を図2³⁾に示す。全長板の計算応力の分布は、実測値と全く異なった形になっている。

3. トラック用重ね板ばねにおける全長板の応力

3.1 板端法適用時の問題点

板端法では、1番リーフから最小子板に至るまで、力の伝達は常にリーフ先端のみで行なわれると仮定し、板間摩擦などの影響は省略して、各リーフにはり理論を適用して解析する。

図3には、ばねCに対して板端接触の仮定を機械的に適用した場合の、全長板2枚の負荷状況とたわみを示す。たわみは、ばね中心と板端ではもちろん等しいが、その間では、1番リーフのたわみが2番リーフのたわみより大きく、その差は最も大きいところで10mmにもなっている。このようなことは実際のばねでは起こらない。また、図4には、1番リーフと2番リーフの曲率 $1/\rho (=M/EI)$ を計算した結果を示す。曲率変化の状況は、1番リーフと2番リーフとで著しく異なっている。一方、このばねの1番リーフおよび2番リーフの実測応力は図2のように分布し、ばね中心から同じ距離の応力は、互に近い値を示している。この場合、2枚の全長リーフは等厚で、また、曲率と曲げ応力 σ との間には、 t を板厚とすると、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{E} \times \frac{2}{t} \dots \dots \dots (1)$$

の関係があるから、実際のばねでは、1番リーフと2番リーフの曲率がほぼ等しいことになる。

これらの結果から、以下では、1番リーフと2番リーフの間には、2番リーフの板端のみでなく、3番リーフの板端位置にも接触点があるとして解析を進めることにする。

3.2 中間接触点（3番リーフ板端位置）を設けたとき全長板に作用する荷重

図5には、1番リーフ、2番リーフの長さ、断面2次モーメント、荷重状況および座標系を示す。各リーフの

*昭和51年ばね技術研究会春期講演会にて発表

**株式会社 豊田中央研究所

図1 解析対象ばねの主要寸法

図2 ばねAの板端法による計算応力と実測応力の比較

図3 1 番リーフ, 2 番リーフのたわみ曲線(ばねC)
(荷重は板端法による計算値)

たわみを求めると、

$$y_1 = \frac{P_1 - P_2}{EI_1} \left(\frac{l_1 x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{P_{2,x}}{EI_1} \times \frac{l_3^2}{2} \left(x - \frac{l_3}{3} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$y_2 = \frac{P_2}{EI_2} \left(\frac{l_1 x^3}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{P_3 - P_{2,x}}{EI_2} \times \frac{l_3^2}{2} \left(x - \frac{l_3}{3} \right) \dots\dots\dots (3)$$

となる。これらの式に接触点の条件 ($x=l_1$, $x=l_3$ にお

図4 1番リーフ、2番リーフの曲率線図(ばねC)

いて $y_1=y_2$) を入れて、2番リーフの板端および中間接触点に作用する荷重 P_2 , $P_{2,x}$ について解くと

$$P_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \times P_1 \dots\dots\dots (4)$$

$$P_{2,x} = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \times P_3 \dots\dots\dots (5)$$

となる。この結果を用い、1番リーフと2番リーフに作用する荷重を求めると図6のようになる。

1番リーフ、2番リーフの板端および中間接触点に作用する荷重は、目玉中心および3番リーフ板端から伝えられる荷重 (P_1, P_3) を、それぞれ、両リーフの剛性に応じて按分した値になっている。これは、1番リーフと2番リーフを横に並べた(展開した)リーフの先端に目玉中心に作用する荷重 (P_1) が、また、3番リーフ板端位置に3番リーフの板端接触による荷重が作用する場合と等価である。

3.3 全長板2枚を横に並べた場合の計算応力

計算方法は、全長板2枚を展開して取扱うことを除けば、板端法と同じである。この方法により、ばねA、ばねCの応力分布を計算して、結果を実測応力とともに図7に示す。1番リーフと2番リーフの計算応力は、実測応力にかなり近くなっている。

図5 1番リーフ、2番リーフの荷重状況

図6 1番リーフ、2番リーフの各接触点に作用する荷重

図7 全長板2枚を横に並べた場合の計算応力

4. 中間接触点の一般化とその場合の計算方法

前節に示した全長板2枚を横に並べた計算は、1番リーフと2番リーフの間には、2番リーフの板端のほか3番リーフ板端位置でも、力の伝達があると仮定した場合に相当する。そこで、この仮定を一般化し、図8に示すように、「重ね板ばねの各リーフは、直接接合している子板よりさらに1枚下のリーフの板端位置（中間接触点）でも力を伝達する」と考えたとき、どのような計算結果が得られるかは興味がある。しかし、この命題はやや複雑であるから、マトリックス構造解析の手法を用いた計算方法を考えることにする。

4.1 重ね板ばねの「応力法」による計算

計算には、接触点に作用する垂直力を未知の力、すなわち、不静定力として取扱いうる応力法⁴⁾ (Force Method)を選ぶ。

図9には、重ね板ばねの応力法による解析モデルを示す。ばねは、外力ならびに各リーフ間の接触力（不静定力）の作用点および各リーフの板端近くで断面が変化し始める所などを境界とする、はり要素から構成されている。

まず、力の釣合方程式をマトリックスの形で書き表わ

図8 中間接触点の仮定（修正板端法：基本形）

図9 重ね板ばねの応力法による解析モデル

すと、

$$S = \{b_0 : b_1\} \begin{Bmatrix} R \\ \vdots \\ X \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで S は各要素の部材力、せん断力 Y_i と曲げモーメント M_i の組を並べたもの、 R は外力、 X は不静定力（接触力）で図9に示すように各リーフに対し、上向きの反力と下向きの負荷とから成立っている。不静定力 X_i の正值は図示の矢印の向きの力を示し、接触点での押付け力である。 b_0, b_1 は、単位外力、単位不静定力に対する部材力のマトリックスであり、外力や不静定力の影響の及ばない要素の部材力に対応するマトリックスの成分は零となる。

不静定構造物においては、力の釣合方程式のみでは問題を解く条件が不足している。これを補う方程式は、不静定力の真の値は構造物のひずみエネルギー U の値を最小にするという、最小仕事の原理 (Castigliano の第2定理) から得られる。

ひずみエネルギー U は、(6)式を用いると

$$U = \frac{1}{2} S^T F S$$

$$= \frac{1}{2} \{R : X\} \{b_0 : b_1\}^T F \{b_0 : b_1\} \begin{Bmatrix} R \\ \vdots \\ X \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 F はばね構造全体の撓性マトリックスであるが、ばねを構成する各要素の変形と部材力とを結び付け

る部材撓性マトリックスが主対角線上に並び、その他の成分は零の形となっている。いま、

$$H = [b_0 : b_1]^T F [b_0 : b_1] \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおき、 H を力の列マトリックスに一致するように分割すると U は

$$U = \frac{1}{2} [R : X] \begin{Bmatrix} H_{RR} & H_{RX} \\ H_{XR} & H_{XX} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ X \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。(9)式を X について微分し、これを零と置くと

$$\frac{\partial U}{\partial X} = H_{XR}R + H_{XX}X = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

これを X について解けば、不静定力(接触力)が求まる。

外力 R の作用点の変位 r も Castigliano の第2定理を用い、次式によって得られる。

$$r = \frac{\partial U}{\partial R} = (H_{RR} - H_{RX}H_{XX}^{-1}H_{RX})R = C \cdot R \quad (11)$$

重ね板ばねのばね定数 k は、解析モデルを図8のように重ね板ばねの半分として、目玉中心に作用する外力 R に対応する(11)式の C を用いると

$$k = \frac{1}{C} \times 2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

として求められる。

4.2 部材撓性マトリックス

4.2.1 断面一様はりの部材撓性マトリックス

図10 はり要素にかかる力とモーメント

図10に示す負荷状態のはり要素において、部材力を Y_1 と M_1 とし、 Y_2 と M_2 を反力として取扱う(はり要素を左端で支持される片持はりともみなす)と、①部のたわみ v_1 とたわみ角 θ_1 は次式で表われる。

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} l^3/3 & l^2/2 \\ l^2/2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = f_s \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} & b_0 & b_1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} & F \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} R \\ X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_m \\ Y_1 M_1 \dots Y_i M_i \dots Y_n M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ M_i \\ \vdots \\ Y_n \\ M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & & & & \\ & f_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A & B \\ & & & C & D \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X_1 \dots X_i \dots X_n \end{bmatrix}$$

図12 Hマトリックス(子板端部①要素に着目: 図11参照)

$$f_s = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} l^3/3 & l^2/2 \\ l^2/2 & l \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 f_s はスパン l 間でのはりの断面形が一定の場合の部材撓性マトリックスである。したがって、子板端部の板厚をテーパ加工で減じたり、板幅を大きな3角かい先で変えたりしたときには、(14)式の部材撓性マトリックスを用いることはできない。そこで、以下では、子板端部には垂直力のみが作用し、曲げモーメントは作用しないことに着目して、断面変化のある板端部要素も取扱いうる、重ね板ばね解析用部材撓性マトリックスを求める。

4.2.2 Hマトリックスにおける板端要素の性質

図11に示す重ね板ばねにおいて、断面変化している子板端部の要素である①要素に作用する不静定力 X_i に着目して H マトリックスを書くことと図12のようになる。

図11 重ね板ばねの子板端部要素に作用する力

図中の $Y_1 M_1 \dots Y_i M_i \dots$, $R X_1 \dots X_i \dots$ は、これらの部材力、外力、不静定力に対応している行あるいは列を示すために便宜的に記入したものである。①要素に作用する力は X_i のみであるから、 $[b_0 : b_1]$ マトリックスにおける①要素の部材力に対応する Y_i , M_i 行の各成分は、 Y_i 行 X_i 列の成分のみが1で他はすべて零となる。 F マトリックス中の A, B, C, D 成分は、断面変化している板端部要素①の部材撓性マトリックス f_i の成分を便宜的に表わしたもので、変形と部材力とを結び付ける定数マトリックスである。

$$[H] = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix}$$

図 13 Hマトリックスの演算 (図 12 のつづき)

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ M_i \end{Bmatrix} = f_i \begin{Bmatrix} Y_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$f_i = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (16)$$

図 12 のマトリックスの積の演算を行なうと図 13 のようになり、 H マトリックスには成分 A のみが残る。この成分 A は (15) 式から明らかなように、要素①に単位せん断力が作用したときのたわみである。

4.2.3 重ね板ばね解析用部材撓性マトリックス

板端法では、子板板端のステップ部で板幅や板厚が直線的に変化している場合、この部分を片持はりとして扱い、自由端の集中荷重 Y とたわみ v の関係を次のように書き表わしている⁹⁾。

$$v = \frac{(1+K)l^3}{3EI} Y \quad (17)$$

ここで、 K は板端形状係数である。(17) 式の係数 $(1+K)l^3/3EI$ を (16) 式の成分 A と書き換えると

$$f_i = \begin{bmatrix} (1+K)l^3/3EI & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる。前述のように、 H マトリックスを求める過程で、 f_i マトリックスの成分 B, C, D は消える。そこで、(18) 式の成分 B, C, D と、これと対応する一様断面はりの部材撓性マトリックス [(14) 式] の成分、 $l^2/2EI, l^2/2EI, l/EI$ とを置換すると重ね板ばね解析用部材撓性マトリックス f_{ii} が得られる。

$$f_{ii} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} (1+K)l^3/3 & l^2/2 \\ l^2/2 & l \end{bmatrix} \quad (19)$$

すなわち、(19) 式は、子板端部の形状に合った板端形状係数 K を入れることにより、板端接触する板端部要素の部材撓性マトリックスとして、また、板端形状係数を $K=0$ と置くことにより、リーフの一様断面部の要素の部材撓性マトリックスとして用いることができる。

5. 応力分布の計算結果 (実験結果との比較)

前節で述べた計算法により、3 種のばねにつき、各リーフの応力分布を計算し、実験結果と比較する。

5.1 修正板端法 (基本形) による計算

ここで修正板端法 (基本形) と呼ぶのは「重ね板ばねの各リーフは、その板端で隣り合う親板側リーフに力を伝えるほか、その板端の接触力の効果が、直接接触过るリーフを介して、もう 1 枚親板側のリーフにまで及ぶ」という仮定に基づき計算である。

3 種のばねについて、板端および中間接触点に作用する接触力、ならびに、応力分布を計算し、図 14~16 に示す。計算応力分布を示す図には実測応力も併記した。

接触力は、ばね B 、ばね C の場合には、すべて正值 (押付け力) になっているが、ばね A の場合には、接触力 X_6, X_8, X_{10}, X_{12} が負値になっている。4.1 項中の接触力の向きの決め方から、負の接触力は、隣り合ったリーフ同志が接触点で引張り合う場合を示している。したがって、接触力が負値を取ることは、重ね板ばねでは考え難い。このことは、修正板端法 (基本形) において仮定したような中間接触が、ばねの仕様によっては起らない場合もあることを示している。

応力の計算結果は、従来法 (展開法、板端法) あるいは、前述の全長板の取扱いをかえた板端法による計算結果に比べ、実験結果と比較的良好に合っている。

5.2 接触力が負になる中間接触点を除外した場合

図 14 に示したばね A の場合のように、接触力が負値となるような接触点を設けることは、実物のばねには生じていないと思われる余分の拘束 (不静定力) をモデルに加えることになる。そこで、負値になった接触力 X_6, X_8, X_{10}, X_{12} のうち、その値が他に比べ小さい X_6 の作用点 x_6 を除いた接触点 (x_8, x_{10}, x_{12}) の拘束をはずした (不静定力を設定しない) 場合について計算すると、図 17 のようになる。

接触力はすべて正值になっている。計算応力分布は実測応力と比較的良好一致を示し、負の接触力を残したために図 14 の 4 番リーフ~6 番リーフにみられた鋸歯状

図 14 修正板端法（基本形）によるばねAの計算

図 16 修正板端法（基本形）によるばねCの計算

図 15 修正板端法（基本形）によるばねBの計算

図 17 ばねAの計算（接触力が負になる中間接触点を除外した場合）

図 18 ばねAの計算 (接触点を増した場合)

図 19 ばねBの計算 (接触点を増した場合)

の不自然な応力分布は姿を消している。

5.3 中間接触点をさらに増した場合

前項で述べたように、修正板端法 (基本形) の仮定により接触点を設けても、ばねの仕様によっては、接触点の多すぎる場合が出てきた。逆に、基本形で仮定した接触点の設定では、接触点がまだ少なすぎる場合も当然あると考えられる。そこで、「直接接触している子板の板端およびその子板より1枚下のリーフの板端位置のみでなく、2枚下のリーフの板端位置でも中間接触が起こる」と仮定して計算してみる。

検討はばねA、ばねBについて行なった。まず、上記仮定に従って接触点を設定して計算し、続いて、接触力が負値にならない接触点を残すように再計算した。

結果を図18、19に示す。ばねAでは、 x_8 のように修正板端法の基本形における接触点の決め方では取り上げられない接触点もある必要のあることが図から読み取れる。応力分布に関しては、1番リーフ、2番リーフの計算結果が実測応力とよく合うのみでなく、実験による3番リーフと4番リーフの肩の部分の複雑な応力分布も計算で比較的良好に再現されている。

ばねBでは、中間接触点は、基本形に比べ、最終的には親板に近い x_3, x_6, x_9 が増えている。その接触力の大きさは、全長板間の接触点 (4番リーフ板端位置) x_3 に作用する X_3 は、目玉中心に作用する荷重の27%であるが、その他は6%以下の小さな値である。応力分布は実験結果とよく合っており、基本形による結果に比べると、特に、1番リーフにおいて実験結果と合う形に変わっている。

5.4 設計計算のための解析手順

前項までの結果から、「隣り合うリーフ間には、板端のほか、直接接触している子板以外のリーフ板端に関連した位置にできるだけ多くの接触点を設けて接触力を求め、その後、引張力の働く接触点の拘束をはずして再計算する」と、各リーフの応力分布が正しく求められることが明らかになった。しかし、そのためには、解析モデルの要素分割をふやす必要が生じ、計算の際の入力データの作成が面倒になる。そこで、設計計算の目的で、望ましい計算手順を検討する。取扱ってみたのは、「基本形の仮定による接触点のほか、1番リーフと2番リーフの間には1番リーフの2枚下のリーフ (4番リーフ) 板端位置にも接触点がある」と仮定する計算である。ただし、接触力が引張力として計算された場合は、その接触点の拘束をはずして再計算する。

上記の手順により、ばねB、ばねCについて計算した結果を図20、21に示す。計算応力分布は、ばねB、ばねCともに、実験結果とよく合っている。基本形による計算結果と比べると、特に、1番リーフにおいて実験値

図 20 ばねBの応力計算（設計計算手順による）

図 21 ばねCの応力計算（設計計算手順による）

と対応がよくなり、ばねCよりばねBの方がその傾向が強い。これには、2番リーフと3番リーフのステップの長さに関係しているように思われる。

ばねBについて、今回の計算と実験値の対応状況（図20）と、中間接触点を増やした場合の計算と実験値の対応状況（図19）とを比較すると、両者で特に有意差が認められるほどではない。これは、両計算モデルの相違点に相当する図19 a) の不静定力 X_6 , X_9 が、ほかの接触力に比べかなり小さいために、応力分布にあまり大きな影響を及ぼさないためではないかと思われる。

6. ま と め

全長板が2枚あるトラック用重ね板ばねについて、各リーフは隣り合うリーフの板端位置以外にも中間接触点（さらに下のリーフの板端位置）を持つと仮定（修正板端法）し、各リーフの応力計算を行なった。また計算結

果を実験値と比較し、設計計算の目的で望ましい計算手順を検討した。

1) 全長板が2枚ある重ね板ばねに、板端法を原則通り適用した場合の問題点を明らかにし、1番リーフと2番リーフは、板端のほかに、3番リーフ板端位置にも中間接触点を持ち、接触力が作用すると仮定した。この条件で、応力計算した結果は、全長板2枚を展開して板端法を適用する場合と等価であり、1番リーフと2番リーフの計算結果は、実験値にかなり近くなることが分った。

2) 全長板の間で考えたような中間接触点を、全リーフの間に一般化して、重ね板ばねの計算を行なうため、接触点に作用する力を不静定力として取扱う応力法による重ね板ばね計算法を求めた。

3) 3種の解析対象ばねにつき、各リーフ間に中間接触点を設けて試算した結果、「隣り合うリーフ間には、板端のほか直接接触していない子板の板端位置に、できるだけ多くの接触点を設けて接触力を求め、その後、引張力の働く接触点の拘束（不静定力の設定）をはずして再計算する」と、各リーフの応力分布を正しく求められることが明らかになった。

4) 設計計算のための計算手順としては、「重ね板ばねは、各リーフの子板側リーフ板端およびさらに1枚下のリーフ板端位置に接触点を持つほかに、1番リーフと2番リーフの間には、1番リーフの2枚下のリーフ（4番リーフ）板端位置にも接触点があると仮定して計算する。ただし、引張の接触力が計算された場合には、その接触点の拘束をはずして再計算する」ことが、計算の手間および結果の正しさの両面からみて望ましい。

本研究にあたり、応力分布の測定結果の一部は株式会社堀切バネ製作所から提供していただいた。また、研究の各段階において、豊田中央研究所の多くの方々からご援助、ご助言をいただいた。記して感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) 互理厚, ばね論文集, No. 1(1952), 57.
- 2) 小玉正雄, ばね論文集, No. 3(1955), 36.
- 3) ばね技術研究会性能分科会, ばね論文集, No. 6(1959), 10.
- 4) Martin, H. C., 吉識雅夫監訳, マトリックス法による構造力学の解法(1967), 198, 培風館.
- 5) ばね技術研究会編, ばね(1970), 105, 丸善.