ピッチとコイル径が変化するコイルばねの セッチングによる高さ変化の推定

Inference of Change of Height due to Pre-setting in Coil Springs with
Varied Pitch and Coil Diameter

下関 正義・佐藤 基行

Masayoshi SHIMOSEKI・Motoyuki SATO

1. 緒 言

一般の円筒コイルばねのセッチングに関する解析として、弾完全塑性を仮定した文献¹⁾がある。しかし、コイルばねのセッチングは、密着高さによって圧縮量に制限があるため、トーションバーのようにあまり大きな塑性加工を期待することはできない。つまり弾性限をわずかに越えたあたりでの加工が行なわれていることになり、その場合に材料を弾完全塑性体としてとらえるのは、いささか無謀である。そこでこの材料モデルを弾線形硬化塑性体²⁾に修正して解析し直したものとして文献³⁾があり、等ピッチ円筒ばねには充分適用できる。

しかし、現在特に自動車用懸架ばねにおいて、スペース上、コイル径を絞ったばねや騒音の問題からピッチを変えたばねが要求されており、すでに量産体制に入っている。このように複雑な形状のばねは勘と経験により見越し高さをつけるという試行錯誤にたよらざるをえないのが実状である。

そこで本報告の主目的はピッチとコイル径が場所によって変化するようなコイルばねにも適用できるように従来の解析結果をさらに発展させることにある。

つまり、コイルばねを有限要素に分割し、その要素に関し従来の解析結果³⁾を適用する。この場合、多次元量を取扱うことになるのでマトリックス法を使用する。

以上の基礎式をもとに、ばね諸元などを与えた具体例の数値計算を行ない結果を実験値と比較したところ、かなり良い精度で高さの変化量を推定できることが確認されたので、ここに報告する。

2. 理論解析

セッチング後の完成品の形状は、図面によって部分的な離散量で与えられており、一つの数式によってこれを記述するのは不可能である。したがって、ここでの解析は離散量をそのまま取扱うような方法に依らざるを得ない。そこで、まずコイルばねをいくつかの要素に分割する。その際各要素内でコイル径ならびにピッチを一定と

みなし得るに十分な分割数とする。

2.1 仮定

解析をするに当たって次の仮定をおく。

- (a) コイルばねの高さ変化は未修正応力に依存するものとする。
- (b) 加工硬化はひずみに対して直線的に増加するものとする。
- (c) 塑性変形後も横弾性係数は、加荷、減荷によらず一定であるものとする。
- (d) 軸荷重はコイル中心軸上に働くものとする。

2.2 記号

解析に用いる主な記号は次のとおりである。

d : 材料直径 (mm)

d_e : 材料の弾性部分の直径 (mm)

G : 横弾性係数 (kgf/mm²)

τ_e : ねじり弾性限 (kgf/mm²)

T : 丸棒に加わるトルク (kgf-mm)

T_e : 丸棒の弾性限界時トルク (kgf-mm)

θ : 比ねじり角 (mm⁻¹)

θ_e : 弾性限界時比ねじり角 (mm⁻¹)

P : コイルばねに加わる軸荷重 (kgf)

H : 各要素における高さを成分にもつ対角マトリックス (mm)

D : 各要素におけるコイル平均径を成分にもつ対角マトリックス (mm)

N : 各要素における巻数を成分にもつ対角マトリックス (—)

P : 各要素に作用する軸荷重を成分にもつ対角マトリックス (kgf)

(注) 上添字 * は未接着部, ' は接着部を示す。

下添字 I はセッチング前, II はセッチング時, III はセッチング後を示す。

2.3 構成方程式

丸棒の弾塑性ねじりではトルクと比ねじり角との関係式は、弾線形硬化塑性体を仮定した場合、次式⁴⁾で与えられる。

$$K = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta^3}\right) + \frac{1}{\beta^3} + \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \dots \dots (1)$$

ただし

α : 硬さの関数として与えられるスカラー量³⁾

$$\beta = \frac{d}{d_e} = \frac{\theta}{\theta_e} \dots \dots \dots (2)$$

ところが、ここで解析を行なおうとしているばねに関しては各位置によって β , したがって K が異なるため、これらの諸量を多次元化しておく必要がある。

また、ばねのセッチングによる見越量を求めるためには式(1), (2) より最終的に各コイル要素の高さ変化量を求める必要がある。そこで本節においては、式(1), (2) を多次元化し各コイル要素の高さで表わした式に書き改める。

まず、高さに関する3つのマトリックスを定義する。

$$\mathbf{H}_I = \text{diag.} [h_{I1}, h_{I2}, \dots, h_{In}]$$

$$\mathbf{H}_{II} = \text{diag.} [h_{II1}, h_{II2}, \dots, h_{IIn}]$$

$$\mathbf{H}_{III} = \text{diag.} [h_{III1}, h_{III2}, \dots, h_{IIIn}]$$

ただし、diag.: 対角マトリックス

なお、下添字2番目の数字は分割した各要素の番号を表す。

また、高さと同様にコイル平均径も各位置によって異なるため、各部による対角マトリックスとして次のように定義する。

$$\mathbf{D} = \text{diag.} [D_1, D_2, \dots, D_n]$$

また、各要素に分割した巻数の大きさについても次のように定義する。

$$\mathbf{N} = \text{diag.} [N_1, N_2, \dots, N_n]$$

以上の定義より、各位置における β, K の値を求めれば、

$$\beta = \frac{Gd}{\pi \tau_e} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{D}^{-2} (\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}) \dots \dots \dots (3)$$

$$\mathbf{K} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{I} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \beta^{-3} + \frac{1}{\alpha} \beta \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $\mathbf{I}$: 単位マトリックス
となる。

2.4 基礎式の誘導

前節における解析は、各要素でのたわみと荷重に関する構成方程式を材料非線形問題としてとらえたものである。

ところが今解析しようとしているような複雑な形状のばねでは、材料非線形以外に、幾何学的非線形も考慮しておく必要がある。つまり、弾性領域での変形も、図1のa-b間のごとく非線形となる。これは各部における接着荷重が異なることに起因しており、等ピッチ円筒コイルばねの場合には考慮する必要がないものであった(図1 a'-b)。

図1 $T/T_e \sim \theta/\theta_e$ 線図

そこで、この幾何学的非線形性を考慮しながら式(4)をさらに発展させ、最終的にはセッチング後の形状と、セッチング高さを与えて、巻き上り時のばねのピッチを求めることとして、以下の解析を進めていく。

つまり与えられるデータは

$$\mathbf{H}_{III}, \text{tr } \mathbf{H}_{III}, \text{tr } \mathbf{H}_{II}$$

ただし、tr: 主対角成分の和

であり、これらのデータをもとにセッチング荷重を求める。

ここで、各要素のたわみ性を次の対角マトリックスで定義する。

$$\mathbf{F} = \text{diag.} [F_1, F_2, \dots, F_n]$$

また、セッチング時にコイル間の接着はないもの、つまり、ばね特性は線形と考える。

ばね全体を考えれば、次のようになる。

$$\text{tr } \mathbf{H}_{III} - \text{tr } \mathbf{H}_{II} = P \times \text{tr } \mathbf{F} \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore P = \frac{\text{tr } \mathbf{H}_{III} - \text{tr } \mathbf{H}_{II}}{\text{tr } \mathbf{F}} \dots \dots \dots (6)$$

また、各要素に着目すれば

$$\mathbf{H}_{III} - \mathbf{H}_{II} = P \mathbf{F} \dots \dots \dots (7)$$

$$\mathbf{H}_{II} = \mathbf{H}_{III} - P \mathbf{F} \dots \dots \dots (8)$$

となり式(6)より

$$\mathbf{H}_{II} = \mathbf{H}_{III} - \frac{\text{tr } \mathbf{H}_{III} - \text{tr } \mathbf{H}_{II}}{\text{tr } \mathbf{F}} \mathbf{F} \dots \dots \dots (9)$$

となり、 $\mathbf{H}_{II}$ が求まる。

以上のコイル間の接着はないと仮定した場合のたわみ量と実際の各要素における接着までのたわみ得る量とを比較する。

ここで各要素における接着時の高さを次のように定義する。

$$\mathbf{H}_s = \text{diag.} [h_{s1}, h_{s2}, \dots, h_{sn}]$$

また、各要素におけるたわみ得る量を H_{III}, H_s を使って、

$$\Delta H = H_{III} - H_s \dots\dots\dots (10)$$

と定義する。

ここで次式を導入し

$$[H_{III} - H_{II}] - \Delta H \dots\dots\dots (11)$$

各要素に関して式(11)の正負の判別を行なう。

もし、ここで式(11)が正になる要素があれば、その要素は前述のように、セッチング時にコイル間の接着なしと仮定した時のセッチング荷重 P 以前に接着することになる。つまり、 $H_{III} \leftrightarrow H_{II}$ 間には非線形特性となる。

それでは、ここで n 個の要素のうち $1 \sim k$ は接着、 $(k+1) \sim n$ は未接着とするならば、

$$P^* F^* = H_{III}^* - H_{II}^* \dots\dots\dots (12)$$

ただし $*$ は $(k+1) \sim n$ に適用

$$P' F' = \Delta H' \dots\dots\dots (13)$$

ただし $'$ は $1 \sim k$ に適用

となる。

ここで P' は $1 \sim k$ の各要素における接着荷重である。また、ここで未接着要素に注目すれば

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{\text{tr } H_{III}^* - \text{tr } H_{II}^*}{\text{tr } F^*} \\ &= \frac{(\text{tr } H_{III} - \text{tr } H_{III}') - (\text{tr } H_{II} - \text{tr } H_{II}')}{\text{tr } F^*} \\ &= \frac{(\text{tr } H_{III} - \text{tr } H_{II}) - (\text{tr } H_{III}' - \text{tr } H_{II}')}{\text{tr } F^*} \dots (14) \end{aligned}$$

式(14)を式(12)に代入することによって

$$\therefore H_{II}^* = H_{III}^* - \frac{(\text{tr } H_{III} - \text{tr } H_{II}) - (\text{tr } H_{III}' - \text{tr } H_{II}')}{\text{tr } F^*} F^* \dots\dots\dots (15)$$

が与えられる。以後はこれの繰返し計算になり

$$H_{III}^* - H_{II}^* - \Delta H^* \dots\dots\dots (16)$$

すべての要素で(16)式が負になるまで繰返す。このようにして得られた結果を用い、式(14)よりセッチング荷重 P^* を求めることができる。次に弾塑性の臨界点を探す。セッチング状態で各要素に作用する力は、未接着部と接着部によって異なる。未接着部に関しては、セッチング時の外力 P^* が、そのまま作用していることになる。一方、接着部に関しては、各位置にたわみ性と線間すきまによって定まる接着荷重が負荷されていることになる。そこで弾塑性域の臨界点はそれぞれ次式で与えられる。

$$D_{cr}^* = \frac{\pi \tau_e d^3}{8 P^*} \quad (\text{未接着部}) \dots\dots\dots (17)$$

$$D_{cr}^* = \frac{\pi \tau_e d^3}{8} (P')^{-1} \quad (\text{接着部}) \dots\dots\dots (18)$$

未接着部に関しては、式(17)により $(D^*)_i < D_{cr}^*$ なら

ば弾性域であり、 $(D^*)_i > D_{cr}^*$ ならば塑性域ということになる。また接着部に関しては式(18)と D との対角成分を比較することによって、同様な判別をすることができる。すなわち各要素は次のグループのいずれかに属する。

$$\text{i) } (D')_i < (D_{cr}')_i \quad (\text{接着部で弾性域}) \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{ii) } (D^*)_i < D_{cr}^* \quad (\text{未接着部で弾性域}) \dots\dots\dots (20)$$

$$\text{iii) } (D')_i > (D_{cr}')_i \quad (\text{接着部で塑性域}) \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{iv) } (D^*)_i > D_{cr}^* \quad (\text{未接着部で塑性域}) \dots\dots\dots (22)$$

上記の4グループに関して各々の要素における H_I を求める。

i), ii) のグループ

このグループは接着、未接着にかかわらず弾性域であるから

$$H_I' = H_{III}' \dots\dots\dots (23)$$

$$H_I^* = H_{III}^* \dots\dots\dots (24)$$

である。

iii) グループ

このグループは塑性域であり、接着しているので P' で評価する。 P' は式(13)より求め、この P' を使えば、

$$K' = \frac{T}{T_e} = \frac{1}{2T_e} D' P' \dots\dots\dots (25)$$

となる。式(1)を次のように書き直し

$$\frac{1}{\alpha} \beta'^4 + \left\{ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) - K' \right\} \beta'^3 - \frac{I}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ここに式(25)を代入すれば、 β' が P' の関数として得られ、最終的に、

$$H_I' = 2T_e \beta' (D' P')^{-1} \Delta H' + H_{II}' \dots\dots\dots (27)$$

となる。

iv) のグループ

このグループは塑性域の未接着であるからスカラー量 P^* によって評価できる。

$$K^* = \frac{1}{2T_e} P^* D^* \dots\dots\dots (28)$$

式(1)を式(26)と同様に次のように書き直し

$$\frac{1}{\alpha} \beta^{*4} + \left\{ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) - K^* \right\} \beta^{*3} - \frac{I}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = 0 \dots\dots\dots (29)$$

ここに式(28)を代入すれば式(27)と同様に

$$H_I^* = 2T_e \beta^* (D^* P^*)^{-1} (H_{III}^* - H_{II}^*) + H_{II}^* \dots (30)$$

となる。

以上の4グループにおける、各要素の H_I', H_I^* を合成すれば、

$$\text{tr } H_I = \text{tr } H_I' + \text{tr } H_I^* \dots\dots\dots (31)$$

となり、ばね全体の巻き上り高さが得られる。

図2 ばね概略図

図3 展開曲線

3. 具体的検討

2章に得られた諸式を用いて、具体的な数値計算を行ない、実測値と照合してみることにする。

対象とするばねは、図2のような完成形状とする。またセッティング時の高さ $tr H_{II}$ は

$$tr H_{II} = 123 \text{ (mm)}$$

とする。次に各要素は1/8巻の大ききで分割することとし、図2より得られる H_{III} , D の情報を使い P^* , P' を求める。また、 $\tau_e = 0.16 H_B$ より³⁾、 $\tau_e = 68.64 \text{ (kgf/mm}^2\text{)}$ とすれば、式(19) (20) のグループ i), ii) は存在

図4

せず全域にわたり塑性変形していることになる。したがってばねはグループ iii), (iv) に分類され、さらに文献3) より

$$\alpha = (-4.17 \times 10^{-3}) H_B + 3.707 \dots\dots\dots (32)$$

であるから、 $\alpha = 1.93$ とし、式(27) (30)を適用すれば、巻き上り形状 H_I が算出される。結果は図3, 4に示す通りであり、実測値と比較して実用上十分な精度とみなしてよいことがわかる。なお図中、 H_I 計算値 (○印) と H_I 実測値 (・印) とが若干ずれている箇所は、コイル径が所定の値に成形されていないためと思われる。

4. 結 言

ピッチならびにコイル平均径が場所によって変化するようなコイルばねに関して、各位置でのセッティングによる高さ変化量を決定するような理論式は存在しない。

そこで本報告において、この解析を行ない、マトリックス法によってこれを定式化した。マトリックス法を使

用した理由は、数式がはん雑になるため、これを簡明に表示させることにあるが、これに加えて実用的にはコンピュータ処理の簡便さも無視し得ないメリットであると考えている。

実際には、

1. コイルばねを有限要素に分割する
2. 各要素に関して従来の解析³⁾を適用する
3. 種々の状態を考慮し合成する

という解析を行なった。特に 3. については従来の解析にはない、幾何学的非線形性を考慮している。

また、解析結果を用いて、具体的な数値計算を行ない、

実測値と比較したところ、かなり良い精度で近似できることが確認された。

参考文献

- 1) 水野：“ばねの製造・設計の材料力学(4)” 機械の研究 No. 24, Vol. 8 (1970) p. 64, 養賢堂.
- 2) 国尾：“固体力学の基礎” p. 205, 培風館.
- 3) 下関, 押田：“コイルばねのセッチングによる高さ変化量について” ばね論文集, No. 20 (1975) p. 70.
- 4) A.M. WAHL: “Mechanical Springs” p. 260 McGRAW-HILL.